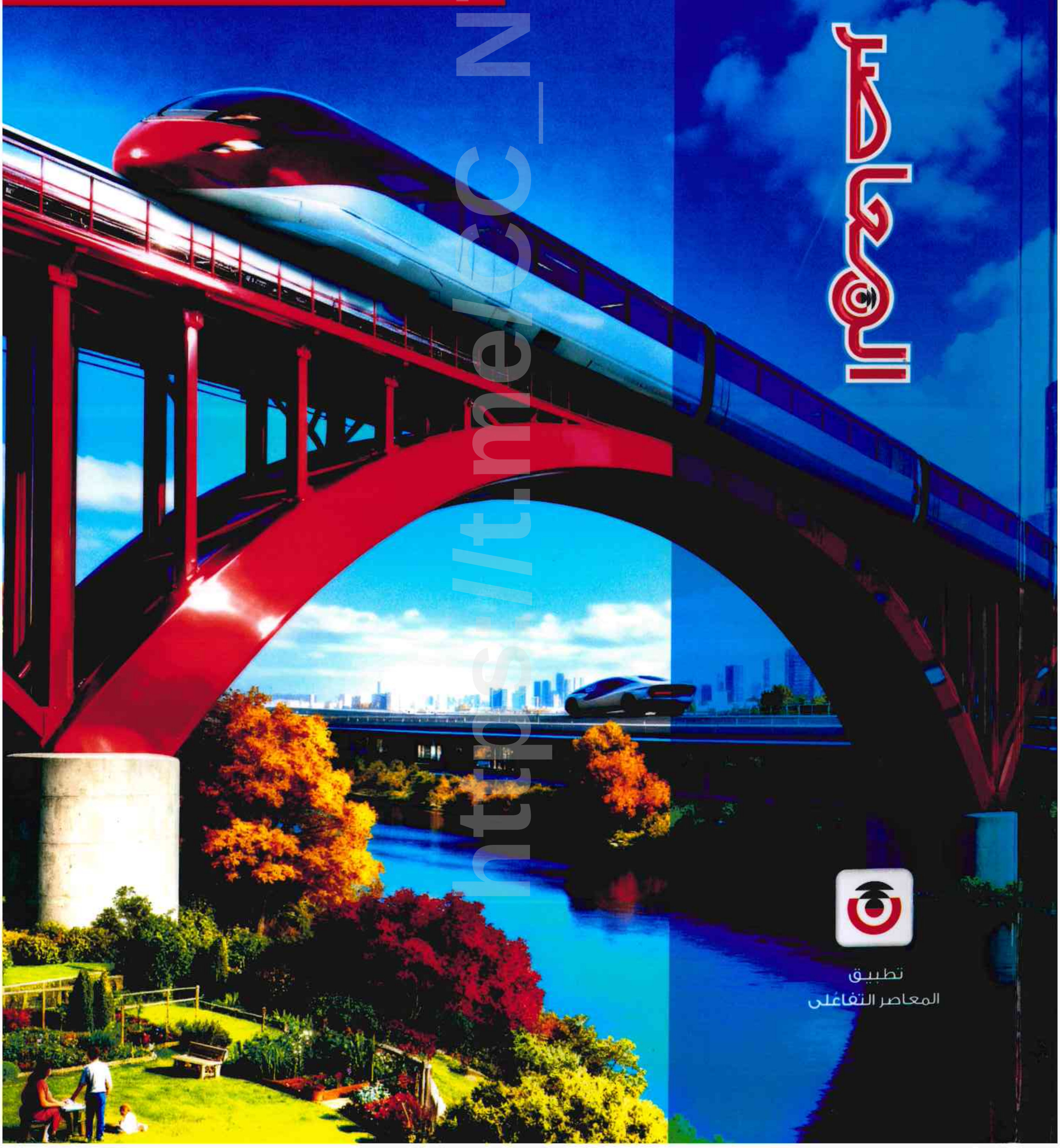
2026

الرياضيات البحتة

إعداد نخبة من خبراء التعليم

الصف الثانى الثانوى
القسم العلمى
الفصل الدراسى الثانى

الجزء الخاص بالشرح والتمارين

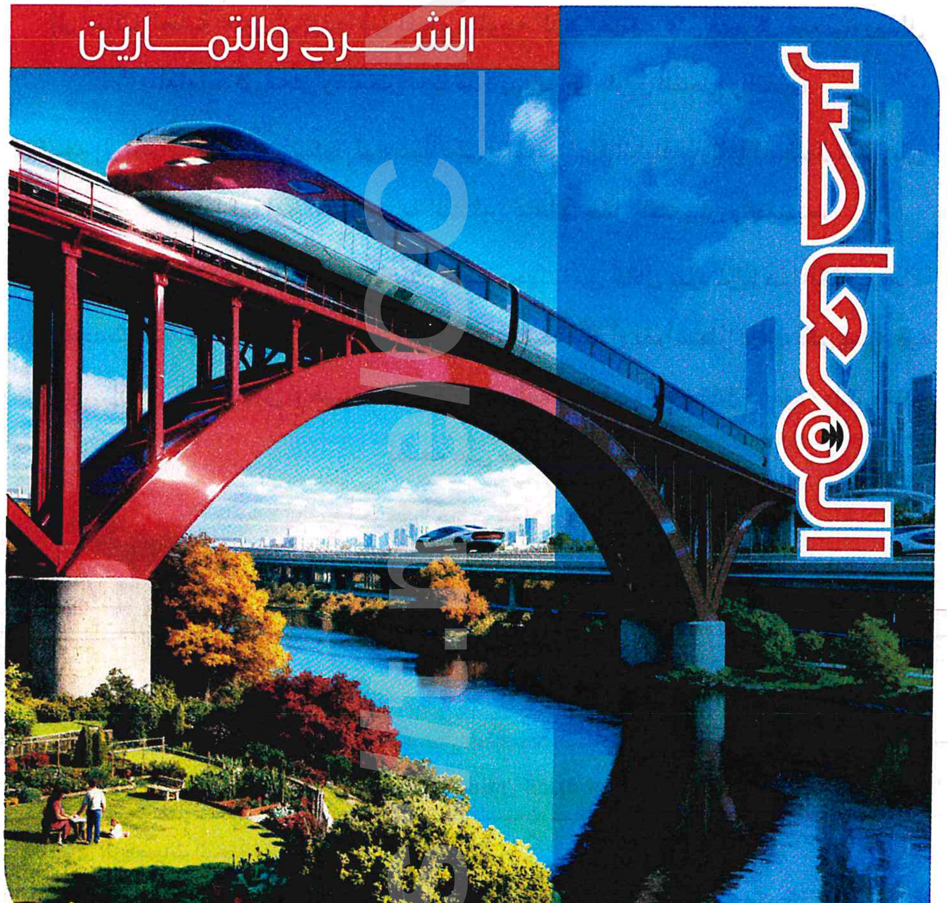


المعاصر

تطبيق
المعاصر التفاعلى

الرياضيات البحتة

إعداد نخبة من خبراء التعليم



GPS

مكتبة الطلبة
للطبع والنشر والتوزيع
٣ شارع كامل صدقى - الفجالة
تليفون: ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٠٢/٢٥٩٣٤٠١٢
www.gpseducation.com
الخط الساخن
١٥٠١٤

الثانى الثانوى
القسم العلمى
الفصل الدراسى الثانى

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

الحمد لله الذى وفقنا لتقديم هذا الكتاب من مجموعة كتب «المعاصر» فى الرياضيات... نقدمه إلى أبنائنا الطلبة آملين أن يجدوا فيه المعلم والموجه الذى يعينهم على فهم كل صعب، ويذلل أمامهم كل مغلق وغامض، ويأخذ بأيديهم إلى طريق النجاح والتفوق.

ونقدمه إلى إخواننا المدرسين ليكون لهم عونًا على أداء رسالتهم الشاقة، ونافذة يطلون منها على خبرات إخوة لهم أمضوا قرابة الثلاثين عامًا فى حقل التدريس والتوجيه.

ونحن لن نلجأ – فى هذا التقديم – إلى تقييم عملنا وجهدنا من خلال سرد لمزايا هذا الكتاب وما استحدث فيه، ولكننا نترك ذلك لكل من يطوى صفحة منه أو يقرأ سطرًا فيه ، لكى يبدى فيه رأيًا ... إن كان نقدًا فنحن نرحب به ... وإن كانت كلمة ثناء فهى خير مقابل نرجوه ، وأعز وسام نضعه على صدورنا.

والله لا يضيع أجر من أحسن عملًا، وهو ولى التوفيق ،

« المؤلفون »

بطاقة فهرسة

فهرسة أثناء النشر إعداد إدارة الشئون الفنية - دار الكتب المصرية

المعاصر فى الرياضيات البحتة / إعداد نخبة من خبراء التعليم. -
القاهرة : جى بى إس للطبع والنشر والتوزيع ، ٢٠٢٥.
٣ مج ؛ ٢٨ سم.
الصف الثانى الثانوى. القسم العلمى ، الفصل الدراسى الثانى.
المحتويات : جـ١. الجزء الخاص الشرح والتمارين.-
جـ٢. الجزء الخاص بالامتحانات.-
جـ٣. الجزء الخاص بالإجابات.
تدمك : ١ - ٢٣٩ - ٩٧٠ - ٩٧٧ - ٩٧٨
١ - الرياضيات - تعليم وتدريس.
٢ - التعليم الثانوى.
٣ - الرياضيات - أسئلة وأجوبة.
٥١٠,٧

رقم الإيداع : ٢٥٨٤٣ / ٢٠٢٥م

QR Code

التطبيق التفاعلى من سلسلة كتب ...

المعاصر الامتحان

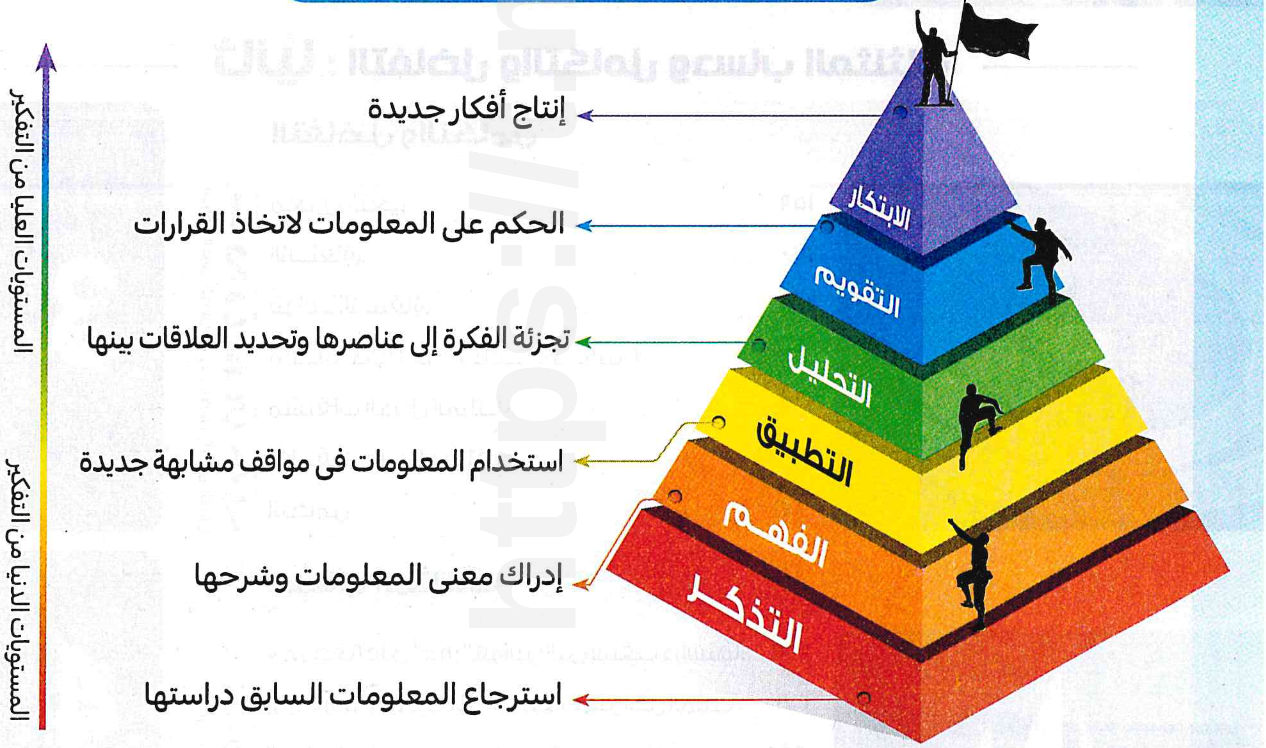
كيفية الاستخدام: **1.** نزل التطبيق. **2.** أنشئ حسابك. **3.** أدخل الكود الموجود على ظهر الغلاف.

استمتع بجميع مزايا التطبيق

لجميع المواد الدراسية

شرح
فيديوهات
ألعاب تعليمية
امتحانات تفاعلية
تدريبات
تواصل مع معلمك
تقارير متابعة
إشعارات
أخبار

تصنيف بلوم للمستويات المعرفية



ملاحظة: تم تصنيف الأسئلة بداخل كل تمرين طبقًا لمستويات هرم بلوم والإشارة لها كالتالى:

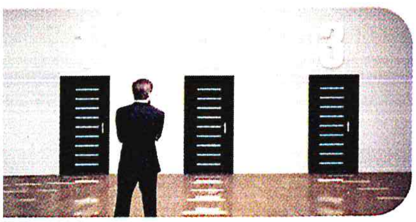
● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا (تحليل أو تقويم أو ابتكار)

محتويات الكتاب

أولًا : الجبر

الوحدة 1 — المتتابعات والمتسلسلات

الوحدة 2 — التباديل والتوافيق



ثانيًا : التفاضل والتكامل وحساب المثلثات

الوحدة 3 — التفاضل والتكامل

الوحدة 4 — حساب المثلثات

أولًا

الجبر

الوحدة **1** المتتابعات والمتسلسلات.

الوحدة **2** التباديل والتوافيق.

الوحدة 1

المتتابعات والمتسلسلات

دروس الوحدة

- الدرس 1 المتتابعات.
- الدرس 2 المتسلسلات ورمز التجميع.
- الدرس 3 المتتابعة الحسابية.
- الدرس 4 المتسلسلات الحسابية.
- الدرس 5 المتتابعة الهندسية.
- الدرس 6 المتسلسلات الهندسية.

الدرس 1

المتتابعات

* المتتابعة الحقيقية غير المنتهية هى دالة مجالها = $ص^+$ ومجالها المقابل = ح وبالتالى يكون بيان المتتابعة هو مجموعة الأزواج المرتبة (س ، ص) حيث س ∈ $ص^+$ ، ص ∈ ح وعلى ذلك يمكن كتابة بيان المتتابعة على الصورة : د = {(١ ، د (١)) ، (٢ ، د (٢)) ، (٣ ، د (٣)) ، ... ، (ن ، د (ن)) ، ...}

* وحيث إن المساقط الأولى للأزواج المرتبة المحددة لبيان المتتابعة هى عناصر $ص^+$ وهى معروفة لدينا فإنه يمكن الاستغناء عن كتابتها فى بيان المتتابعة والاكتفاء بكتابة المساقط الثانية داخل قوسين من النوع ( ) تمييزًا لها عن قوسى المجموعة { }

* وعلى ذلك يمكن التعبير عن المتتابعة كما يأتى : (د (١) ، د (٢) ، د (٣) ، ... ، د (ن) ، ...) والقيم د (١) ، د (٢) ، د (٣) ، ... تسمى حدود المتتابعة حيث د (١) هو الحد الأول للمتتابعة ويرمز له بالرمز $ح_١$ ، د (٢) هو الحد الثانى للمتتابعة ويرمز له بالرمز $ح_٢$ ، د (ن) هو الحد النونى للمتتابعة ويرمز له بالرمز $ح_ن$ وهكذا .....

وبذلك يمكن التعبير عن المتتابعة بصورة أخرى كما يأتى : $(ح_ن) = (ح_١ ، ح_٢ ، ح_٣ ، ... ، ح_ن ، ...)$

* وإذا كان مجال الدالة يتكون من أول (ن) من الأعداد الصحيحة الموجبة فإن المتتابعة تكون منتهية.

فمثلًا : إذا كانت الدالة د : $ص^+$ ⟵ ح حيث د (س) = ٢ س + ٣ فإن :

د (١) = ٢ (١) + ٣ = ٥ ، د (٢) = ٢ (٢) + ٣ = ٧ ، د (٣) = ٢ (٣) + ٣ = ٩

، د (٤) = ٢ (٤) + ٣ = ١١ ، ...

فإن : (د (١) ، د (٢) ، د (٣) ، د (٤) ، ...) **أى** (٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ...) تسمى متتابعة

ويكون : $ح_١$ = ٥ ، $ح_٢$ = ٧ ، $ح_٣$ = ٩ ، $ح_٤$ = ١١ وهكذا

وبصفة عامة يكون : د (ن) = ٢ ن + ٣ حيث ن ∈ $ص^+$ ويرمز لذلك بالرمز $ح_ن$

(الحد النونى) حيث $ح_ن$ = ٢ ن + ٣ والذى من خلاله يمكن إيجاد قيمة أى حد إذا علمت رتبته ن

ملاحظات

1. لاحظ الفرق بين $(ح_{ن})$ ، $ح_{ن}$ حيث $(ح_{ن})$ ترمز للمتتابعة بينما $ح_{ن}$ ترمز للحد النونى للمتتابعة.
2. حدود المتتابعة هى صور عناصر مجال المتتابعة.
3. لاحظ الفرق بين المتتابعة والمجموعة حيث إن :
   * المتتابعة تخضع لترتيب عناصرها بينما المجموعة لا تخضع لترتيب عناصرها.
   * المتتابعة قد تتكرر عناصرها بينما المجموعة لا يمكن أن تتكرر عناصرها.

المتتابعة المنتهية والمتتابعة غير المنتهية

تعريف

- **المتتابعة المنتهية هى** : متتابعة عدد حدودها منته أى لها عدد محدود من العناصر.
- **المتتابعة غير المنتهية هى** : متتابعة عدد حدودها غير منته أى لها عدد لا نهائى من العناصر.

مثال ١

بين أى المتتابعات الآتية منتهية وأيها غير منتهية :

1. (٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ... ، ٣٢)
2. $(\frac{١}{٢}$ ، ١ ، ٢ ، ٤ ، ...)
3. $(ح_{ن})$ حيث $ح_{ن} = ٢ن - ٣$ ، $ن \in ص^{+}$
4. $(ح_{ن})$ حيث $ح_{ن} = \frac{(-١)^{ن}}{٢ن}$ ، $ن \in \{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥\}$

الحل

1. متتابعة منتهية.
2. متتابعة غير منتهية. $\therefore$ عدد الحدود غير منته.
3. $\because ن \in ص^{+}$ $\therefore$ المتتابعة غير منتهية.
4. $\because ن \in \{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥\}$ $\therefore$ عدد الحدود = ٥ $\therefore$ المتتابعة منتهية.

الحد العام للمتتابعة

يرمز للحد العام للمتتابعة بالرمز $ح_{ن}$ ويسمى أحياناً بالحد النونى حيث $ح_{ن}$ هو صورة العنصر الذى ترتيبه ن فى المتتابعة ويمكن استنتاجه من خلال بعض الحدود المعطاة من المتتابعة وذلك بإدراك العلاقة بين قيمة الحد $ح_{ن}$ ورتبة الحد ن

مثال ٢

اكتب الحد العام لكل من المتتابعات الآتية :

١ (٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ...)

٢ $(\frac{1}{2} ، \frac{1}{4} ، \frac{1}{8} ، \frac{1}{16} ، ...)$

٣ $(\frac{-1}{3} ، \frac{1}{4} ، \frac{-1}{5} ، \frac{1}{6} ، ...)$

الحل

١ ∵ $ح_1 = 2(1)$ ، $ح_2 = 2(2)$ ، $ح_3 = 2(3)$ ، $ح_4 = 2(4)$ ، ...

∴ الحد العام هو : $ح_ن = 2ن$

٢ ∵ $ح_1 = (\frac{1}{2})^1$ ، $ح_2 = (\frac{1}{2})^2$ ، $ح_3 = (\frac{1}{2})^3$ ، $ح_4 = (\frac{1}{2})^4$ ، ...

∴ الحد العام هو : $ح_ن = (\frac{1}{2})^ن$

٣ ∵ $ح_1 = \frac{(-1)^1}{2+1}$ ، $ح_2 = \frac{(-1)^2}{2+2}$ ، $ح_3 = \frac{(-1)^3}{2+3}$ ، $ح_4 = \frac{(-1)^4}{2+4}$ ، ...

∴ الحد العام هو : $ح_ن = \frac{(-1)^ن}{2+ن}$

لاحظ أنه يمكن استنتاج الحد العام لبعض المتتابعات كما يلي :

١ متتابعة أعداد العد (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ...) حدها العام هو $ح_ن = ن$ بينما المتتابعة (٤ ، ٥ ، ٦ ، ...) تمثل متتابعة أعداد العد إبتداء من الحد الرابع ويكون حدها العام هو $ح_ن = ن + 3$

٢ متتابعة أعداد العد الفردية (١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ...) حدها العام هو $ح_ن = 2ن - 1$ بينما المتتابعة (١١ ، ١٣ ، ١٥ ، ...) تمثل متتابعة أعداد العد الفردية ابتداء من الحد السادس ويكون حدها العام هو $ح_ن = 2(ن + 5) - 1$

٣ متتابعة أعداد العد الزوجية (٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ...) حدها العام هو $ح_ن = 2ن$ بينما المتتابعة (١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ...) تمثل متتابعة الأعداد الزوجية ابتداء من الحد الخامس ويكون حدها العام هو $ح_ن = 2(ن + 4)$

٤ متتابعة الأعداد المربعة (١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ...) حدها العام $ح_ن = ن^2$ بينما المتتابعة (٩ ، ١٦ ، ٢٥ ، ٣٦ ، ...) تمثل متتابعة الأعداد المربعة ابتداء من الحد الثالث ويكون حدها العام هو $ح_ن = (ن + 2)^2$

مثال ③

اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتابعة $(ح_{ن})$ حيث :

1 $ح_{١} = ٥$ ، $ح_{ن+١} = ٣\,ح_{ن}$ حيث $ن \geq ١$ واكتب الحد العام للمتتابعة.

2 $ح_{ن+٢} = ح_{ن+١} + ح_{ن}$ ، $ن \geq ١$ ، $ح_{١} = ٣$ ، $ح_{٢} = ٧$

3 $ح_{ن} = \dfrac{(-١)^{ن-١}}{٢ن + ٣}$

الحـــل

1 ∵ $ح_{ن+١} = ٣\,ح_{ن}$

∴ بوضع $ن = ١$ ∴ $ح_{٢} = ٣\,ح_{١}$ ∴ $ح_{٢} = ٣\,(٥) = ١٥$

، بوضع $ن = ٢$ ∴ $ح_{٣} = ٣\,ح_{٢}$ ∴ $ح_{٣} = ٣\,(١٥) = ٤٥$

، بوضع $ن = ٣$ ∴ $ح_{٤} = ٣\,ح_{٣}$ ∴ $ح_{٤} = ٣\,(٤٥) = ١٣٥$

، بوضع $ن = ٤$ ∴ $ح_{٥} = ٣\,ح_{٤}$ ∴ $ح_{٥} = ٣\,(١٣٥) = ٤٠٥$

∴ الخمسة حدود الأولى من المتتابعة هى : ٥ ، ١٥ ، ٤٥ ، ١٣٥ ، ٤٠٥

أى أن : $(٥ \times ٣^{٠} ، ٥ \times ٣ ، ٥ \times ٣^{٢} ، ٥ \times ٣^{٣} ، ٥ \times ٣^{٤})$

∴ الحد العام هو : $ح_{ن} = ٥ \times ٣^{ن-١}$

2 ∵ $ح_{ن+٢} = ح_{ن+١} + ح_{ن}$

∴ بوضع $ن = ١$ ∴ $ح_{٣} = ح_{٢} + ح_{١} = ٧ + ٣ = ١٠$

، بوضع $ن = ٢$ ∴ $ح_{٤} = ح_{٣} + ح_{٢} = ١٠ + ٧ = ١٧$

، بوضع $ن = ٣$ ∴ $ح_{٥} = ح_{٤} + ح_{٣} = ١٧ + ١٠ = ٢٧$

∴ الخمسة حدود الأولى من المتتابعة هى : ٣ ، ٧ ، ١٠ ، ١٧ ، ٢٧

3 ∵ $ح_{ن} = \dfrac{(-١)^{ن-١}}{٢ن + ٣}$

∴ بوضع $ن = ١$ ∴ $ح_{١} = \dfrac{(-١)^{١-١}}{٢\,(١) + ٣} = \dfrac{١}{٥}$

، بوضع $ن = ٢$ ∴ $ح_{٢} = \dfrac{(-١)^{٢-١}}{٢\,(٢) + ٣} = \dfrac{-١}{٧}$

، بوضع $ن = ٣$ ∴ $ح_{٣} = \dfrac{(-١)^{٣-١}}{٢\,(٣) + ٣} = \dfrac{١}{٩}$

، بوضع $ن = ٤$ $\therefore$ $ح_٤ = \frac{(-١)^{٤ - ١}}{٢(٤) + ٣} = \frac{-١}{١١}$

، بوضع $ن = ٥$ $\therefore$ $ح_٥ = \frac{(-١)^{٥ - ١}}{٢(٥) + ٣} = \frac{١}{١٣}$

$\therefore$ الخمسة حدود الأولى من المتتابعة هى : $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{-١}{٧}$ ، $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{-١}{١١}$ ، $\frac{١}{١٣}$

ملاحظات

١ فى المثال السابق : العلاقة $ح_{ن+٢} = ح_{ن+١} + ح_ن$ هى علاقة بين حدود المتتابعة وتعنى أن كل حد يساوى مجموع الحدين السابقين له مباشرة.

٢ إذا اختلفت إشارة كل حد فى المتتابعة عن إشارة الحد التالى له مباشرة

فإن المتتابعة تسمى بالمتتابعة التذبذبية ففى المثال السابق :

المتتابعة $(\frac{١}{٥}$ ، $\frac{-١}{٧}$ ، $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{-١}{١١}$ ، $\frac{١}{١٣}$ ، ...) تسمى متتابعة تذبذبية.

٣ بعض المتتابعات ليست لها قاعدة معروفة حتى الآن وبالتالى ليس معروف حدها العام مثل متتابعة الأعداد الأولية (٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ...)

معلومة إثرائية

المتتابعة $(ح_ن)$ التى حدودها (١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٣ ، ...)

تعرف باسم متتابعة فيبوناتشى وكل حد فى هذه المتتابعة ناتج من مجموع الحدين السابقين له مباشرة وتتحدد قاعدتها كالآتى $ح_{ن+٢} = ح_ن + ح_{ن+١}$ لكل $ن \in ص^+$ ، $ح_١ = ح_٢ = ١$

المتتابعة التزايدية - التناقصية - الثابتة

تعريف

لكل $ن \geq ١$:

- تسمى المتتابعة $(ح_ن)$ **تزايدية** إذا كان $ح_{ن+١} > ح_ن$ أى : $ح_{ن+١} - ح_ن > ٠$.
- تسمى المتتابعة $(ح_ن)$ **تناقصية** إذا كان $ح_{ن+١} < ح_ن$ أى : $ح_{ن+١} - ح_ن < ٠$.
- تسمى المتتابعة $(ح_ن)$ **ثابتة** إذا كان $ح_{ن+١} = ح_ن$ أى : $ح_{ن+١} - ح_ن = ٠$.

مثال ٤

بين أى المتتابعات $(ح_ن)$ الآتية تزايدية وأيها تناقصية وأيها غير ذلك :

١ $(ح_ن) = (٣ن - ٢)$ ‏ ‏ ٢ $(ح_ن) = \left(\frac{١}{٢ن + ١}\right)$

٣ $(ح_ن) = \left(\frac{(-١)^ن}{ن} + ٢\right)$ ‏ ‏ ٤ $(ح_ن) = (٥)$

الحل

١ ∵ $ح_{ن+١} - ح_ن = (٣(ن+١) - ٢) - (٣ن - ٢)$

$= \cancel{٣ن} + ٣ - ٢ - \cancel{٣ن} + ٢ = ٣ > ٠$

∴ المتتابعة $(ح_ن)$ تزايدية لجميع قيم $ن \in ص^+$

٢ ∵ $ح_{ن+١} - ح_ن = \frac{١}{٢(ن+١)+١} - \frac{١}{٢ن+١} = \frac{١}{٢ن+٣} - \frac{١}{٢ن+١}$

$= \frac{(٢ن+١) - (٢ن+٣)}{(٢ن+٣)(٢ن+١)} = \frac{-٢}{(٢ن+٣)(٢ن+١)} < ٠$

∴ المتتابعة $(ح_ن)$ تناقصية لجميع قيم $ن \in ص^+$

٣ $ح_{ن+١} - ح_ن = \left(\frac{(-١)^{ن+١}}{ن+١} + ٢\right) - \left(\frac{(-١)^ن}{ن} + ٢\right) = \frac{(-١)^{ن+١}}{ن+١} - \frac{(-١)^ن}{ن}$

$= (-١)^{ن+١}\left(\frac{١}{ن+١} + \frac{١}{ن}\right) = (-١)^{ن+١}\left(\frac{٢ن+١}{ن(ن+١)}\right)$

، ∵ المقدار الناتج موجب إذا كان ن عددًا فرديًا ، سالب إذا كان ن عددًا زوجيًا

∴ المتتابعة $(ح_ن)$ ليست تزايدية وليست تناقصية.

٤ ∵ $ح_{ن+١} - ح_ن = ٥ - ٥ =$ صفر

∴ المتتابعة $(ح_ن)$ ثابتة لجميع قيم $ن \in ص^+$

ملاحظة

المتتابعة الثابتة : هى متتابعة جميع حدودها متساوية أى حدها العام على الصورة :

$ح_ن = أ$ حيث $أ \in ح$ ويكون $ح_{ن+١} - ح_ن =$ صفر وقد تكون منتهية أو غير منتهية

مثل المتتابعة (٥ ، ٥ ، ٥ ، ٥) أ، المتتابعة (-٢ ، -٢ ، -٢ ، -٢ ، ...)

مثال ٥

أوجد الحد العام للمتتابعة (٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ٢١ ، ...) ثم أوجد :

١ $ح_٧$ ، $ح_{١٠}$ فى المتتابعة. ٢ رتبة الحد الذى قيمته ٦٥ فى المتتابعة.

الحـل

∵ $ح_١ = ٥ + ٤ (١)$ ، $ح_٢ = ٥ + ٤ (٢)$ ، $ح_٣ = ٥ + ٤ (٣)$ ، $ح_٤ = ٥ + ٤ (٤)$

∴ الحد العام : $ح_ن = ٥ + ٤ ن$

١ $ح_٧ = ٥ + ٤ (٧) = ٣٣$ ، $ح_{١٠} = ٥ + ٤ (١٠) = ٤٥$

٢ بفرض $ح_ن = ٦٥$ ∴ $٥ + ٤ ن = ٦٥$

∴ $٤ ن = ٦٠$ ∴ $ن = ١٥$

∴ $ح_{١٥} = ٦٥$

معلومة إثرائية

* إذا علم عدد محدود من الحدود المتتالية بدون قاعدة فلا يمكن تعيين حد عام وحيد لهذه المتتابعة ولتوضيح ذلك نأخذ المتتابعتين التاليتين $(ح_ن) = (ن^٢)$

، $(حَ_ن) = (ن^٢ + (ن - ١) (ن - ٢) (ن - ٣) (ن - ٤))$

فنجد أن الأربعة حدود الأولى فى كل من المتتابعتين متشابهة وهى ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ بينما الحد الخامس مختلف حيث $ح_٥ = (٥)^٢ = ٢٥$ ، $حَ_٥ = (٥)^٢ + ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٤٩$

وبالتالى يكون $ح_ن$ ، $حَ_ن$ وصف صحيح للمتتابعة (١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ...)

أى أنه : لا يمكن إيجاد حد عام وحيد.

تمارين 1

على المتتابعات

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) المتتابعة الحقيقية غير المنتهية هى دالة مجالها هو ....

(أ) $ح$ (ب) $ح^+$ (جـ) $ص$ (د) $ص^+$

(٢) الحد التالى فى المتتابعة : (١ ، ٢ ، ٤ ، ٧ ، ١١ ، ...) هو ....

(أ) ١٥ (ب) ١٦ (جـ) ١٧ (د) ١٨

(٣) الحد التالى فى المتتابعة : $\left(\frac{٣}{١٣} ، \frac{٧}{١٠} ، \frac{١١}{٧} ، \frac{١٥}{٤} ، ...\right)$ هو ....

(أ) $\frac{١٩}{٢}$ (ب) ١٩ (جـ) $-\frac{٢٣}{٢}$ (د) $\frac{١٦}{٣}$

(٤) الحد العاشر من حدود المتتابعة : (١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٣ ، ...) هو ....

(أ) ٢٩ (ب) ٣٤ (جـ) ٥٥ (د) ٨٩

(٥) الحد الخالى من س فى المتتابعة : (٨ − ٦س ، ٧ − ٤س ، ٦ − ٢س ، ...) هو ....

(أ) $ح_٧$ (ب) $ح_٦$ (جـ) $ح_٥$ (د) $ح_٤$

(٦) الحد السادس فى المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = \frac{(-١)^ن}{٢ن}$ هو ....

(أ) ٦ (ب) $\frac{-١}{١٢}$ (جـ) $\frac{١}{١٢}$ (د) $\frac{١}{٦}$

(٧) الحد الرابع فى المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = \frac{\sqrt{ن}}{ن + ١}$ هو ....

(أ) ٤ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{٢}{٥}$

(٨) $ح_٥ = ٧$ فى المتتابعة ....

(أ) $(ح_ن) = (٢ن + ١)$ (ب) $(ح_ن) = (٣ن^٢ - ن)$

(جـ) $(ح_ن) = (ن + ٢)$ (د) $(ح_ن) = (٢^ن - ١)$

(٩) فى المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_{ن+١} = ن ح_ن$ ، $ن \geq ١$ إذا كان : $ح_١ = ١$ فإن : $ح_٢ =$ ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) $\frac{١}{٢}$

(١٠) الحدود الخمسة الأولى من المتتابعة ($ح_ن$) = (ن(ن − ١)) هى ....

(أ) (١ ، ٢ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٠)   (ب) (٠ ، ٢ ، ٦ ، ١٠ ، ١٤)

(جـ) (٠ ، ٢ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٠)   (د) (١ ، ٢ ، ٤ ، ٧ ، ١١)

(١١) الخمسة حدود الأولى من المتتابعة ($ح_ن$) التى فيها $ح_{ن+١} = \frac{(-١)^{ن}}{٣ ح_ن}$ ، $ح_١ = ٩$ هى ....

(أ) (٩ ، $\frac{١}{٢٧}$ ، −٩ ، ٢٧ ، ٩)   (ب) (٩ ، $\frac{١}{٩}$ ، −٩ ، $\frac{١}{٢٧}$ ، −٢٧)

(جـ) (٩ ، $\frac{١}{٢٧}$ ، $\frac{-١}{٨١}$ ، $\frac{١}{٢٤٣}$ ، $\frac{-١}{٧٢٩}$)   (د) (٩ ، $-\frac{١}{٢٧}$ ، −٩ ، $\frac{١}{٢٧}$ ، ٩)

(١٢) فى المتتابعة ($ح_ن$) إذا كان : $ح_١ = ٢$ ، $ح_{ن+١} = ح_ن - ن$ حيث ن ≥ ١

فإن الحدود الخمسة الأولى هى ....

(أ) (١ ، ٢ ، −١ ، −٤ ، −٨)   (ب) (٢ ، −١ ، ١ ، ٣ ، −٨)

(جـ) (٢ ، ١ ، −١ ، −٤ ، −٨)   (د) (٢ ، ١ ، −١ ، −٣ ، −٨)

(١٣) الخمسة حدود الأولى من المتتابعة التى فيها $ح_١ = ١$ ، $ح_٢ = ٢$ ، $ح_ن = ح_{ن-١} + ح_{ن-٢}$

لكل ن > ٢ هى ....

(أ) (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥)   (ب) (١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦)

(جـ) (١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨)   (د) (١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ١٢)

(١٤) إذا علم أن ($ح_ن$) متتابعة فيها : $ح_ن = ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ... + ح_{ن-١}$ حيث ن > ٢

فإن : $ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ح_٤ + ح_٥ - ح_٦ =$ ....

(أ) صفر   (ب) ٣٢   (جـ) ٦٤   (د) ٧٢

(١٥) الحد العام لمتتابعة ($ح_ن$) هو $ح_ن = ٣$ فإن الخمسة حدود الأولى فيها ....

(أ) (٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧)   (ب) (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥)

(جـ) (٣ ، ٣ ، ٣ ، ٣ ، ٣)   (د) (٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨)

(١٦) تكون المتتابعة تناقصية إذا كان : $ح_{ن+١}$ .... $ح_ن$ لكل ن ≥ ١

(أ) >   (ب) <   (جـ) =   (د) ≤

(١٧) يقال للمتتابعة ($ح_ن$) إنها تزايدية لجميع قيم ن ∈ $ص^{+}$ إذا كان ....

(أ) $\frac{ح_ن}{ح_{ن+١}} > ١$ (ب) $ح_ن = ح_{ن+١}$ (جـ) $ح_{ن+١} > ح_ن$ (د) $\frac{ح_ن}{ح_{ن+١}} > -١$

(١٨) تسمى المتابعة التى حدها النونى $ح_ن = \frac{(-١)^ن}{٣ن - ٢}$ متتابعة ....

(أ) تزايدية. (ب) تناقصية. (جـ) تذبذبية. (د) ثابتة.

(١٩) المتتابعة التى حدها النونى $ح_ن = \frac{٢}{ن} - ١$ حيث $ن \in ص^+$ تمثل ....

(أ) متتابعة تزايدية. (ب) متتابعة تناقصية.

(جـ) متتابعة ثابتة. (د) متتابعة تذبذبية.

(٢٠) المتتابعة التى حدها العام $ح_ن = \left(\frac{١}{٣}\right)^{ن+١}$ تكون ....

(أ) تزايدية. (ب) تناقصية. (جـ) تذبذبية. (د) منتهية.

(٢١) المتتابعة $(ح_ن) = \left((-١)^ن (ن^٢ + ١)\right)$ تكون ....

(أ) تزايدية. (ب) تناقصية. (جـ) تذبذبية. (د) ثابتة.

(٢٢) أى من المتتابعات $(ح_ن)$ التالية تكون متناقصة حيث $ن \in ص^+$ ؟

(أ) $(ح_ن) = (-ن^٢)$ (ب) $(ح_ن) = (ن)$

(جـ) $(ح_ن) = (ن^٣)$ (د) $(ح_ن) = (ن + ١)$

(٢٣) أى مما يأتى يمثل الحد العام لمتتابعة متناقصة ؟

(أ) $ن$ (ب) $ن^٢$ (جـ) $ن^٢ - ٥$ (د) $\frac{ن + ١}{ن}$

(٢٤) المتتابعة (١ ، ٤ ، ٧ ، ١١ ، ...) تكون ....

(أ) تناقصية. (ب) تذبذبية. (جـ) منتهية. (د) غير منتهية.

(٢٥) المتتابعة (٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ... ، ٢١) تكون ....

(أ) تناقصية. (ب) تذبذبية. (جـ) منتهية. (د) غير منتهية.

(٢٦) المتتابعة $(ح_ن) = (ن^٢ - ١)$ ، $ن \in ص^+$ تمثل ....

(أ) تناقصية. (ب) تذبذبية. (جـ) منتهية. (د) غير منتهية.

(٢٧) المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = \frac{٣}{ن} + ١$ ، $ن \in \{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥\}$ تكون ....

(أ) تزايدية. (ب) تذبذبية. (جـ) منتهية. (د) غير منتهية.

(٢٨) الحد النونى للمتتابعة : (١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ...) هو ....

(أ) $٢ ن$ (ب) $٤ ن$ (جـ) $٢^ن$ (د) $ن^٢$

(٢٩) الحد النونى للمتتابعة : (-١ ، ٤ ، -٩ ، ١٦ ، ...) هو ....

(أ) $- ن^٢$ (ب) $(-١)^ن ن^٢$ (جـ) $(-ن)^٢$ (د) $-٤ ن$

(٣٠) الحد العام للمتتابعة : $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{٢}{٣} ، \frac{٣}{٤} ، \frac{٤}{٥} ، ...\right)$ هو ....

(أ) $\frac{\text{ن}}{٢\text{ن}}$ (ب) $\frac{\text{ن}}{\text{ن}+١}$ (جـ) $\frac{١}{\text{ن}}$ (د) $\frac{\text{ن}}{٢\text{ن}-١}$

(٣١) الحد العام للمتتابعة : $\left(١ ، \frac{١}{١٠} ، \frac{١}{١٠٠} ، \frac{١}{١٠٠٠} ، ...\right)$ هو $\text{ح}_{\text{ن}}$ = ...

(أ) $\text{ن}^{\text{ن}-١}$ (ب) $(١٠)^{-\text{ن}}$ (جـ) $\left(\frac{١}{١٠}\right)^{\text{ن}-١}$ (د) $(٠,١)^{\text{ن}+١}$

(٣٢) الحد النونى للمتتابعة : $\left(٢ ، ٢ ، \frac{٨}{٣} ، ٤ ، ...\right)$ هو ....

(أ) $\text{ح}_{\text{ن}} = \text{ن} - ١$ (ب) $\text{ح}_{\text{ن}} = ٢\text{ن} - ١$

(جـ) $\text{ح}_{\text{ن}} = ٢^{\text{ن}-١}$ (د) $\text{ح}_{\text{ن}} = \frac{٢^{\text{ن}}}{\text{ن}}$

(٣٣) الحد العام للمتتابعة : $\left(\frac{١}{٣} ، \frac{١}{٢} ، \frac{٣}{٥} ، \frac{٢}{٣} ، ...\right)$ هو ....

(أ) $\frac{١}{\text{ن}}$ (ب) $\frac{١}{\text{ن}-١}$ (جـ) $\frac{\text{ن}}{\text{ن}+١}$ (د) $\frac{\text{ن}}{\text{ن}+٢}$

(٣٤) الحد النونى للمتتابعة : $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٦} ، \frac{١}{١٢} ، ...\right)$ هو $\text{ح}_{\text{ن}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{\text{ن}^٢+\text{ن}}$ (ب) $\frac{١}{\text{ن}} + \frac{١}{\text{ن}+١}$ (جـ) $\frac{١}{\text{ن}^٢+٢}$ (د) $\frac{١}{\text{ن}+٣}$

(٣٥) الحد العام لمتتابعة الأعداد الصحيحة الزوجية الموجبة هو ....

(أ) ٤ن (ب) ٢ن (جـ) ٢ن − ٢ (د) ٤ن − ٢

(٣٦) الحد العام لمتتابعة الأعداد الصحيحة الزوجية الموجبة الأكبر من ٢ هو ....

(أ) ٢ن (ب) ٢ن + ٢ (جـ) ٤ن (د) ٤ن − ٢

(٣٧) الحد العام للمتتابعة : (−١ ، ٢ ، −٤ ، ٨ ، −١٦ ، ...) هو ....

(أ) $-(٢)^{\text{ن}-١}$ (ب) $(-٢)^{\text{ن}-١}$

(جـ) $\text{ح}_١ = -١$ ، $\text{ح}_٢ = ٢$ ، $\text{ح}_{\text{ن}+٢} = \text{ح}_{\text{ن}}\text{ح}_{\text{ن}+١}$ (د) $(-١)^{\text{ن}}(٢)^{\text{ن}-١}$

(٣٨) الحد العام للمتتابعة : ((٢ × ٣) ، (٣ × ٤) ، (٤ × ٥) ، (٥ × ٦) ، ...) هو $\text{ح}_{\text{ن}}$ = ...

(أ) (ن − ١) (ن + ١) (ب) ن(ن + ١)

(جـ) ٢ن(ن + ١) (د) (ن + ١) (ن + ٢)

(٣٩) أى مما يأتى لا يمكن أن يكون الحد العام للمتتابعة $(\text{ح}_{\text{ن}})$ = (١ ، −١ ، ١ ، −١ ، ...)

(أ) $\text{ح}_{\text{ن}} = -(-١)^{\text{ن}}$ (ب) $\text{ح}_{\text{ن}} = (-١)^{\text{ن}-١}$

(جـ) $\text{ح}_{\text{ن}} = -\text{جتا}(\text{ن}\pi)$ (د) $\text{ح}_{\text{ن}} = \text{جتا}(\text{ن}\pi)$

(٤٠) فى المتتابعة (٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ...) :

أولًا : الحد العام هو $ح_{ن}$ = ...

(أ) ٢ ن (ب) ٤ ن − ٢ (جـ) ن + ١ (د) ٣ ن − ١

ثانيًا : $ح_{١١}$ = ...

(أ) ٢٢ (ب) ٣٢ (جـ) ٣٤ (د) ٢٨

ثالثًا : رتبة الحد الذى قيمته ٥٩ هو ....

(أ) $ح_{١٥}$ (ب) $ح_{٢٢}$ (جـ) $ح_{١٨}$ (د) $ح_{٢٠}$

(٤١) فى المتتابعة (٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ...) :

أولًا : الحد العام هو = ...

(أ) ٢ ن (ب) ن + ١ (جـ) ٢ (ن + ١) (د) $٢^{ن}$

ثانيًا : رتبة الحد الذى قيمته ١٢٨ هو ....

(أ) $ح_{٥}$ (ب) $ح_{٧}$ (جـ) $ح_{٨}$ (د) $ح_{٦}$

(٤٢) الحد العاشر من حدود المتتابعة : (حتا π ، حتا $\frac{\pi}{٢}$ ، حتا $\frac{\pi}{٣}$ ، حتا $\frac{\pi}{٤}$ ، ...) يساوى ....

(أ) حتا ١٠ π (ب) حا $\frac{٩\pi}{١٠}$ (جـ) حتا $\frac{٢}{٥}\pi$ (د) حا $\frac{٢\pi}{٥}$

(٤٣) فى المتتابعة ($ح_{ن}$) حيث $ح_{ن}$ = ٣ $ن^{٢}$ − ١ إذا كان $ح_{م}$ = ٧٤ فإن : م = ...

(أ) ± ٥ (ب) ٥ (جـ) ٤ (د) ٧٤

(٤٤) فى المتتابعة ($ح_{ن}$) إذا كان : $ح_{ن}$ = أ + ن ب وكان $ح_{١}$ = ٥ ، $ح_{٣}$ = ١١

فإن : ب − أ = ...

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٥

(٤٥) عدد حدود المتتابعة : (١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ... ، ٦٢٥) هو ....

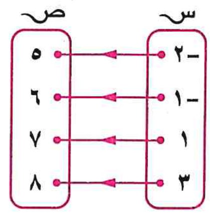
(أ) ٢٥ (ب) ١٢٥ (جـ) ٦٢٥ (د) ٥٠

(٤٦) فى المتتابعة ($ح_{ن}$) إذا كان $ح_{١}$ = ١ ، $ح_{ن+١}$ = ٤ $ح_{ن}$ + ك ، $ح_{٣}$ = ٣١

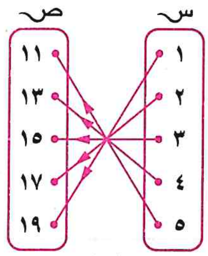
فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٤

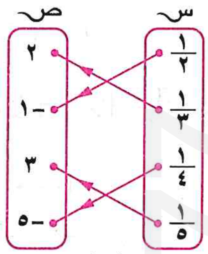
٤٧ أى الدوال الآتية تمثل متتابعة حقيقية ؟



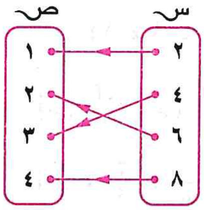
(أ)



(ب)

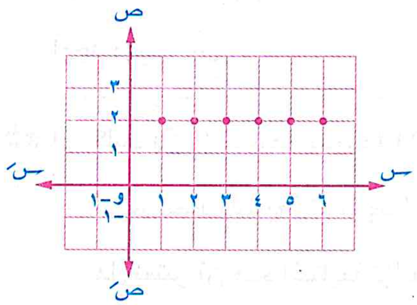


(جـ)



(د)

٤٨ الشكل المقابل يمثل متتابعة ....



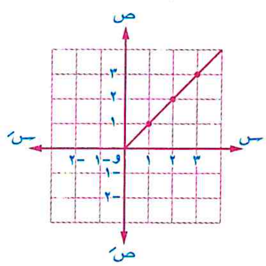
(أ) متزايدة.

(ب) متناقصة.

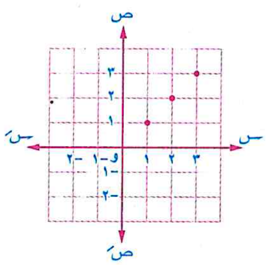
(جـ) ثابتة.

(د) متذبذبة.

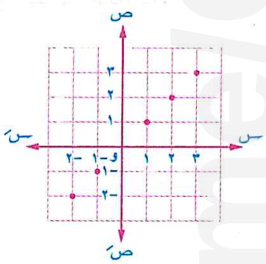
٤٩ أى الأشكال الآتية تمثل متتابعة ؟



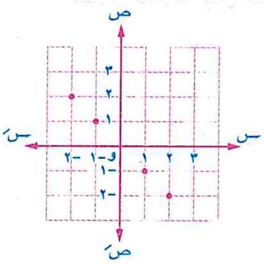
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ اكتب الخمسة حدود الأولى لكل من المتتابعات التى حدها العام يعطى بالقواعد الآتية :

① $\text{ح}_{\text{ن}} = ٢\text{ن} - ٣$

② $\text{ح}_{\text{ن}} = \frac{(-١)^{\text{ن}}}{\text{ن} + ٣}$

③ $\text{ح}_{\text{ن}} = \text{جا}\left(\frac{\text{ن}}{٤}\pi\right)$

④ $\text{ح}_{\text{ن}} = ١ + \frac{٢}{\sqrt{\text{ن}}}$

⑤ $\text{ح}_{١} = ٢$ ، $\text{ح}_{\text{ن}+١} = ٢\,\text{ح}_{\text{ن}}$ ، $\text{ن} \geq ١$

⑥ $\text{ح}_{١} = -١$ ، $\text{ح}_{\text{ن}+١} = \frac{-١}{\text{ح}_{\text{ن}}}$ ، $\text{ن} \geq ١$

٢ بين أى المتتابعات $(\text{ح}_{\text{ن}})$ الآتية تزايدية وأيها تناقصية وأيها غير ذلك :

① $(\text{ح}_{\text{ن}}) = (٢\text{ن} + ٥)$

② $(\text{ح}_{\text{ن}}) = \left(\frac{١}{٣\text{ن} - ١}\right)$

③ $(\text{ح}_{\text{ن}}) = \left(\left(\frac{-١}{٣}\right)^{\text{ن}}\right)$

④ $(\text{ح}_{\text{ن}}) = \left(\frac{(-١)^{\text{ن}}}{٢\text{ن}} + ٤\right)$

⑤ $(\text{ح}_{\text{ن}}) = (٣ - ٢\text{ن})$

⑥ $(\text{ح}_{\text{ن}}) = \left(٢\left(\frac{٣}{٢}\right)^{\text{ن}-١}\right)$

⑦ $\left((-١)^{\text{ن}}(\text{ن} + ١)\right)$

٣ اكتب الحد العام لكل من المتتابعات الآتية :

(١) (١ ، ٨ ، ٢٧ ، ٦٤ ، ...)

(٢) (حا $\frac{\pi}{٣}$ ، حا $\frac{٢\pi}{٣}$ ، حا π ، حا $\frac{٤\pi}{٣}$ ، ...)

(٣) ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٩}{٨}$ ، $\frac{٢٧}{١٦}$ ، ...)

---

٤ فى المتتابعة $(ح_ن)$ إذا كان $ح_١ = ٩$ ، $ح_٣ = ٣٦$ ، $ح_{ن+١} = ح_ن + ن س$

أوجد : قيمة س «٩»

---

٥ إذا كانت $(ح_ن)$ متتابعة حدودها (١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٣ ، ...)

(١) ادرس نمط المتتابعة ثم أوجد الحدين الثامن والتاسع.

(٢) هل نعتبر أن هذه المتتابعة تزايدية أم تناقصية أم غير ذلك ؟ فسر إجابتك.

(٣) اكتب العلاقة بين حدود هذه المتتابعة.

الدرس 2

المتسلسلات ورمز التجميع

رمز التجميع $\sum$

يستخدم رمز التجميع $\sum$ (ويقرأ سيجما) لكى يرمز لمجموع ن حدًا من الحدود المتتالية فى المتتابعة ($ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، ... ، $ح_ر$ ، ... ، $ح_ن$ ، ...)

بدءًا من الحد الأول بأن نكتب : $\sum_{ر=١}^{ن} ح_ر$ وتقرأ مجموع $ح_ر$ من ر = ١ إلى ر = ن

أى أن : $\sum_{ر=١}^{ن} ح_ر = ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + \cdots + ح_ن$

ملاحظة

ليس من الضرورى أن يبدأ المجموع من الحد الأول أى أنه يمكن استخدام رمز التجميع $\sum$ للتعبير عن مجموع الحدود المتتالية فى المتتابعة بدءًا من حدها الأول أو الثانى أو الثالث أو الحد رقم ك فى المتتابعة إلى الحد رقم ن :

فمثلًا : $\sum_{ر=ك}^{ن} ح_ر = ح_ك + ح_{ك+١} + ح_{ك+٢} + \cdots + ح_ن$

مثال ١

أوجد ناتج كل مما يأتى :

١ $\sum_{ر=١}^{٧} ر$ ٢ $\sum_{ر=٤}^{٧} (٢ ر^٢ - ١)$ ٣ $\sum_{ر=١}^{٥} \left(\frac{١}{ر+١} - \frac{١}{ر} \right)$

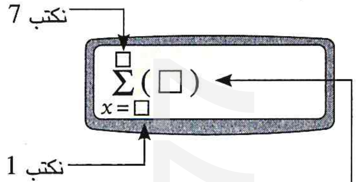
الحل

١ بوضع ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ٧ $\therefore \sum_{ر=١}^{٧} ر = ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧ = ٢٨$

ملاحظة

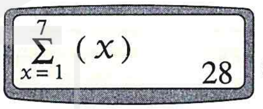
يمكن استخدام الآلة الحاسبة فى إيجاد ناتج $\sum_{ر=١}^{٧} ر$ كما يلى :

١ نضغط SHIFT ثم Σ Log فيظهر لنا



نكتب x وذلك بالضغط على ALPHA ثم X)

٢ نضغط = فيظهر الناتج



٢ بوضع ر = ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧

$$\therefore \sum_{ر=٤}^{٧} (٢ر^{٢} - ١) = (٢(٤)^{٢} - ١) + (٢(٥)^{٢} - ١) + (٢(٦)^{٢} - ١) + (٢(٧)^{٢} - ١)$$

$$= ٣١ + ٤٩ + ٧١ + ٩٧ = ٢٤٨$$

٣ بوضع ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

$$\therefore \sum_{ر=١}^{٥} \left(\frac{١}{ر+١} - \frac{١}{ر}\right) = \left(\frac{١}{١+١} - \frac{١}{١}\right) + \left(\frac{١}{٢+١} - \frac{١}{٢}\right) + \left(\frac{١}{٣+١} - \frac{١}{٣}\right)$$

$$+ \left(\frac{١}{٤+١} - \frac{١}{٤}\right) + \left(\frac{١}{٥+١} - \frac{١}{٥}\right)$$

$$= \cancel{\frac{١}{٢}} - ١ + \cancel{\frac{١}{٣}} - \cancel{\frac{١}{٢}} + \cancel{\frac{١}{٤}} - \cancel{\frac{١}{٣}} + \cancel{\frac{١}{٥}} - \cancel{\frac{١}{٤}} + \frac{١}{٦} - \cancel{\frac{١}{٥}}$$

$$= - ١ + \frac{١}{٦} = \frac{-٥}{٦}$$

الخواص الجبرية للتجميع

إذا كانت : $(ع_ر)$ ، $(هـ_ر)$ متتابعتين ، $ن \in ص^{+}$ ، $حـ \in ح$ فإن :

١ $\sum_{ر=١}^{ن} حـ = حـ ن$

فمثلًا : • $\sum_{ر=١}^{ن} ٥ = ٥ ن$ • $\sum_{ر=١}^{ن} (-٣) = -٣ ن$

٢ $\sum_{ر=١}^{ن} ر = \frac{ن(ن+١)}{٢}$ **أى أن :** $١ + ٢ + ٣ + \cdots + ن = \frac{ن(ن+١)}{٢}$

فمثلًا : $\sum_{ر=١}^{١٠} ر = ١ + ٢ + ٣ + \cdots + ١٠ = \frac{١٠(١٠+١)}{٢} = ٥٥$

٣ $\sum_{ر=١}^{ن} ر^{٢} = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$

أى أن : $١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + \cdots + ن^{٢} = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$

فمثلًا : $\sum_{ر=١}^{٥} ر^{٢} = ١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + ٤^{٢} + ٥^{٢} = \frac{٥(٥+١)(٢\times٥+١)}{٦} = ٥٥$

٤ $\sum_{ر=١}^{ن} ح\,ع_{ر} = ح \sum_{ر=١}^{ن} ع_{ر}$

فمثلًا : • $\sum_{ر=١}^{٥} ٣ر = ٣ \sum_{ر=١}^{٥} ر = ٣ \times \frac{٥(٥+١)}{٢} = ٤٥$

• $\sum_{ر=١}^{ن} ١٢ر^{٢} = ١٢ \sum_{ر=١}^{ن} ر^{٢} = ١٢ \times \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦} = ٢ن(ن+١)(٢ن+١)$

٥ $\sum_{ر=١}^{ن} (ع_{ر} \pm هـ_{ر}) = \sum_{ر=١}^{ن} ع_{ر} \pm \sum_{ر=١}^{ن} هـ_{ر}$

فمثلًا : $\sum_{ر=١}^{ن} (٢ر+٣) = \sum_{ر=١}^{ن} ٢ر + \sum_{ر=١}^{ن} ٣ = ٢\sum_{ر=١}^{ن} ر + ٣ن$

$= \cancel{٢} \times \frac{ن(ن+١)}{\cancel{٢}} + ٣ن = ن^{٢} + ن + ٣ن = ن^{٢} + ٤ن$

مثال ٢

أوجد بطريقتين مختلفتين : $\sum_{ر=١}^{٤} (ر^{٢} + ٣ر - ٢)$

الحـــل

الطريقة الأولى : (إيجاد المفكوك)

بوضع $ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤$

$\therefore \sum_{ر=١}^{٤} (ر^{٢} + ٣ر - ٢) = (١^{٢} + ٣ \times ١ - ٢) + (٢^{٢} + ٣ \times ٢ - ٢)$

$+ (٣^{٢} + ٣ \times ٣ - ٢) + (٤^{٢} + ٣ \times ٤ - ٢) = ٢ + ٨ + ١٦ + ٢٦ = ٥٢$

الطريقة الثانية : (باستخدام خواص التجميع)

$\sum_{ر=١}^{٤} (ر^{٢} + ٣ر - ٢) = \sum_{ر=١}^{٤} ر^{٢} + ٣\sum_{ر=١}^{٤} ر - \sum_{ر=١}^{٤} ٢$

$= \frac{٤(٤+١)(٢\times٤+١)}{٦} + ٣ \times \frac{٤(٤+١)}{٢} - ٢ \times ٤ = ٣٠ + ٣٠ - ٨ = ٥٢$

ملاحظة

جميع الخواص الجبرية السابقة لرمز التجميع لا تستخدم إلا فى حالة إيجاد مجموع المتتابعة بدءًا من الحد الأول أى لإيجاد : $\sum_{ر=١}^{ن} ع_{ر}$

مثال ٣

أوجد قيمة كل مما يأتى باستخدام خواص رمز التجميع $\sum$:

[١] $\sum_{ر=٨}^{١٢} (٢ ر + ٣)$ [٢] $\sum_{ر=٥}^{٨} (ر^{٢} - ٢ ر)$

الحل

[١] لاحظ أن : $\sum_{ر=٨}^{١٢} (٢ ر + ٣)$

تعنى مجموع حدود المتتابعة بدءًا من الحد الثامن إلى الحد الثانى عشر.

، ∵ مجموع الحدود من $ح_{٨}$ إلى $ح_{١٢}$ = (مجموع الحدود من $ح_{١}$ إلى $ح_{١٢}$) − (مجموع الحدود من $ح_{١}$ إلى $ح_{٧}$)

$$\therefore \sum_{ر=٨}^{١٢} (٢ ر + ٣) = \sum_{ر=١}^{١٢} (٢ ر + ٣) - \sum_{ر=١}^{٧} (٢ ر + ٣)$$

$$= \left(\sum_{ر=١}^{١٢} ٢ ر + \sum_{ر=١}^{١٢} ٣\right) - \left(\sum_{ر=١}^{٧} ٢ ر + \sum_{ر=١}^{٧} ٣\right)$$

$$= \left(٢ \times \frac{١٢ \, (١٢ + ١)}{٢} + ٣ \times ١٢\right) - \left(٢ \times \frac{٧ \, (٧ + ١)}{٢} + ٣ \times ٧\right)$$

$$= (١٥٦ + ٣٦) - (٥٦ + ٢١) = ١٩٢ - ٧٧ = ١١٥$$

[٢] $$\sum_{ر=٥}^{٨} (ر^{٢} - ٢ ر) = \sum_{ر=١}^{٨} (ر^{٢} - ٢ ر) - \sum_{ر=١}^{٤} (ر^{٢} - ٢ ر)$$

$$= \left(\sum_{ر=١}^{٨} ر^{٢} - \sum_{ر=١}^{٨} ٢ ر\right) - \left(\sum_{ر=١}^{٤} ر^{٢} - \sum_{ر=١}^{٤} ٢ ر\right)$$

$$= \left(\frac{٨ \, (٨ + ١) \, (٢ \times ٨ + ١)}{٦} - ٢ \times \frac{٨ \, (٨ + ١)}{٢}\right)$$

$$- \left(\frac{٤ \, (٤ + ١) \, (٢ \times ٤ + ١)}{٦} - ٢ \times \frac{٤ \, (٤ + ١)}{٢}\right) = (٢٠٤ - ٧٢) - (٣٠ - ٢٠)$$

$$= ١٣٢ - ١٠ = ١٢٢$$

المتسلسلات

المتسلسلة هى : عملية جمع لحدود المتتابعة

أى أنه : لأى متتابعة ($ح_{١}$ ، $ح_{٢}$ ، $ح_{٣}$ ، ..... ، $ح_{ن}$ ، .....) حيث $ن \in ص^{+}$

، $ح_{ن}$ هو الحد الذى ترتيبه $ن$ من المتتابعة.

يكون : $ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣} + ... + ح_{ن} + ...$ هى المتسلسلة المرتبطة بهذه المتتابعة.

١ المتسلسلة المنتهية

لأى متتابعة منتهية $(ح_١ ، ح_٢ ، ح_٣ ، \dots ، ح_ن)$ يكون :

$ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + \dots + ح_ر + \dots + ح_ن = \sum_{ر=١}^{ن} ح_ر$ متسلسلة منتهية.

أى أن : مجموع كل حدود المتتابعة المنتهية يسمى متسلسلة منتهية.
والقيمة العددية للمتسلسلة هى مجموع حدود المتتابعة المناظرة.

مثال ٤

اكتب كلًا من المتسلسلتين الآتيتين باستخدام رمز التجميع $\sum$ ثم أوجد مجموع حدود المتتابعة المناظرة :

١ $٣ + ٥ + ٧ + \dots + ٢١$ **٢** $٣ + ٨ + ١٥ + ٢٤ + \dots + ٤٤٠$

الحل

١ $\because ٣ + ٥ + ٧ + \dots + ٢١ = (١ + ٢ \times ١) + (١ + ٢ \times ٢) + (١ + ٢ \times ٣) + \dots + (١ + ٢ \times ١٠)$

$\therefore$ الحد العام للمتتابعة $(٣ ، ٥ ، ٧ ، \dots ، ٢١)$ هو $ح_ر = ١ + ٢ ر$

، عدد حدود المتتابعة : $ن = ١٠$ $\therefore ٣ + ٥ + ٧ + \dots + ٢١ = \sum_{ر=١}^{١٠} (١ + ٢ ر)$

، $\because \sum_{ر=١}^{١٠} (١ + ٢ ر) = \sum_{ر=١}^{١٠} ١ + ٢ \sum_{ر=١}^{١٠} ر = ١ \times ١٠ + ٢ \times \frac{١٠ (١٠ + ١)}{٢} = ١٢٠$

$\therefore$ مجموع حدود المتتابعة المناظرة : $(٣ ، ٥ ، ٧ ، \dots ، ٢١) = ١٢٠$

٢ $\because ٣ + ٨ + ١٥ + ٢٤ + \dots + ٤٤٠$

$= ١ (١ + ٢) + ٢ (٢ + ٢) + ٣ (٣ + ٢) + ٤ (٤ + ٢) + \dots + ٢٠ (٢٠ + ٢)$

$\therefore$ الحد العام للمتتابعة $(٣ ، ٨ ، ١٥ ، \dots ، ٤٤٠)$ هو $ح_ر = ر (ر + ٢)$

، عدد حدود المتتابعة : $ن = ٢٠$

$\therefore ٣ + ٨ + ١٥ + \dots + ٤٤٠ = \sum_{ر=١}^{٢٠} ر (ر + ٢) = \sum_{ر=١}^{٢٠} ر^٢ + ٢ \sum_{ر=١}^{٢٠} ر$

$= \frac{٢٠ (٢٠ + ١) (٤٠ + ١)}{٦} + ٢ \times \frac{٢٠ (٢٠ + ١)}{٢}$

$= ٣٢٩٠$

$\therefore$ مجموع حدود المتتابعة المناظرة : $(٣ ، ٨ ، ١٥ ، \dots ، ٤٤٠) = ٣٢٩٠$

مثال ٥

اكتب مفكوك كل من المتسلسلتين الآتيتين ، وأوجد مجموع حدود المتتابعة المناظرة :

١ $\sum_{ر=١}^{٥} (١ + ر)$ ‏ ‏ ‏ ٢ $\sum_{ر=١}^{٦} (ر^{٢} + ٢)$

الحــل

١ بوضع ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

$\therefore \sum_{ر=١}^{٥} (١ + ر) = (١ + ١) + (١ + ٢) + (١ + ٣) + (١ + ٤) + (١ + ٥)$

$= ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ = ٢٠$

∴ مجموع حدود المتتابعة : (٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦) = ٢٠

٢ بوضع ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦

$\therefore \sum_{ر=١}^{٦} (ر^{٢} + ٢) = (١^{٢} + ٢) + (٢^{٢} + ٢) + (٣^{٢} + ٢) + (٤^{٢} + ٢) + (٥^{٢} + ٢) + (٦^{٢} + ٢)$

$= ٣ + ٦ + ١١ + ١٨ + ٢٧ + ٣٨ = ١٠٣$

∴ مجموع حدود المتتابعة : (٣ ، ٦ ، ١١ ، ١٨ ، ٢٧ ، ٣٨) = ١٠٣

ملاحظة

في المثال السابق : يمكن استخدام خواص علامة التجميع $\sum$ فى إيجاد قيمة المتسلسلة

أى مجموع حدود المتتابعة المناظرة دون إيجاد مفكوك المتسلسلة.

١ $\sum_{ر=١}^{٥} (١ + ر) = \sum_{ر=١}^{٥} ١ + \sum_{ر=١}^{٥} ر = ١ \times ٥ + \frac{٥ \times ٦}{٢} = ٢٠$

٢ $\sum_{ر=١}^{٦} (ر^{٢} + ٢) = \sum_{ر=١}^{٦} ر^{٢} + \sum_{ر=١}^{٦} ٢ = \frac{٦ (٦ + ١) (٢ \times ٦ + ١)}{٦} + ٢ \times ٦ = ١٠٣$

٢ المتسلسلة غير المنتهية

وهى المتسلسلة التى بها عدد لا نهائى من الحدود ويرمز لها بالرمز $\sum_{ر=١}^{\infty} ح_{ر}$

فمثلًا : المتسلسلة : −٢ + ٤ − ٨ + ١٦ − ٣٢ + ⋯ غير منتهية.

والمتتابعة المناظرة لها : (−٢ ، ٤ ، −٨ ، ١٦ ، −٣٢ ، ⋯) حدها العام هو $ح_{ر} = (-٢)^{ر}$

ولذلك فإن : $-٢ + ٤ - ٨ + ١٦ - ٣٢ + \cdots = \sum_{ر=١}^{\infty} (-٢)^{ر}$

مثال ٦

اكتب مفكوك كل من المتسلسلتين الآتيتين :

١ $\sum_{ر=١}^{\infty} ((\frac{١}{٣})^{ر} - ١)$ ٢ $\sum_{ر=١}^{\infty} (\frac{١}{ر + ١} - \frac{١}{ر})$

الحل

١ $\sum_{ر=١}^{\infty} ((\frac{١}{٣})^{ر} - ١) = ((\frac{١}{٣})^{١} - ١) + ((\frac{١}{٣})^{٢} - ١) + ((\frac{١}{٣})^{٣} - ١) + ((\frac{١}{٣})^{٤} - ١) + \cdots$

$= \frac{-٢}{٣} + \frac{-٨}{٩} + \frac{-٢٦}{٢٧} + \frac{-٨٠}{٨١} + \cdots = -\frac{٢}{٣} - \frac{٨}{٩} - \frac{٢٦}{٢٧} - \frac{٨٠}{٨١} - \cdots$

٢ $\sum_{ر=١}^{\infty} (\frac{١}{ر + ١} - \frac{١}{ر}) = (\frac{١}{١ + ١} - \frac{١}{١}) + (\frac{١}{٢ + ١} - \frac{١}{٢}) + (\frac{١}{٣ + ١} - \frac{١}{٣}) + (\frac{١}{٤ + ١} - \frac{١}{٤}) + \cdots$

$= \frac{-١}{٢} + \frac{-١}{٦} + \frac{-١}{١٢} + \frac{-١}{٢٠} + \cdots = -\frac{١}{٢} - \frac{١}{٦} - \frac{١}{١٢} - \frac{١}{٢٠} - \cdots$

مثال ٧

استخدم رمز التجميع $\sum$ فى كتابة كل من المتسلسلتين الآتيتين :

١ $١ \times ٢ + ٢ \times ٣ + ٣ \times ٤ + ٤ \times ٥ + \cdots$

٢ $٣ + ١ + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٩} + \cdots$

الحل

١ $\because$ الحد العام للمتتابعة : $(١ \times ٢ ، ٢ \times ٣ ، ٣ \times ٤ ، ٤ \times ٥ ، \ldots)$

هو $ح_ر = ر (ر + ١)$

$\therefore ١ \times ٢ + ٢ \times ٣ + ٣ \times ٤ + ٤ \times ٥ + \cdots = \sum_{ر=١}^{\infty} ر (ر + ١)$

٢ $\because$ الحد العام للمتتابعة : $(٣ ، ١ ، \frac{١}{٣} ، \frac{١}{٩} ، \ldots)$ هو $ح_ر = ٣^{٢ - ر}$

$\therefore ٣ + ١ + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٩} + \cdots = \sum_{ر=١}^{\infty} ٣^{٢ - ر}$

تمارين 2

على المتسلسلات ورمز التجميع

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\sum_{ر=١}^{٥} ٣ =$ ....

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ١٥ (د) ٢٤٣

② $\sum_{ر=٢}^{٥} ٣ =$ ....

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ١٥ (د) ١٢

③ $\sum_{ر=١}^{٤} ر =$ ....

(أ) ٢٠ (ب) ١٠ (جـ) ٤ (د) ٦

④ $\sum_{ر=١}^{١٠} ر^{٢} =$ ....

(أ) ١٠ (ب) ٥٥ (جـ) ٢٢٠ (د) ٣٨٥

⑤ قيمة المتسلسلة $\sum_{ر=٧}^{٢٣} ٣ ر =$ ....

(أ) ٢٥٥ (ب) ٧٦٥ (جـ) ٨٠٧ (د) ٨٢٨

⑥ قيمة المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{١٥} (ر^{٢} + ر + ١) =$ ....

(أ) ١٣٧٥ (ب) ٣٧٢٠ (جـ) ١٤٤٠٠ (د) ٢٢٣٢٠٠٠

⑦ قيمة المتسلسلة $\sum_{ن=١}^{١٠} (-١)^{ن} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ١٠

⑧ إذا كان : $\sum_{ر=١}^{ن} (ر) = ١٣٦$ فإن : $\sum_{ر=١}^{ن} (٤ ر) =$ ....

(أ) ١٤٠ (ب) ٥٤٤ (جـ) ٢٧٢ (د) ٣٤

⑨ $\sum_{ر=١}^{١٥} (٣ ر + ٢) + \sum_{ر=١٦}^{٣٥} (٣ ر + ٢) =$ ....

(أ) $\sum_{ر=١}^{٣٥} (٣ ر + ٢)$ (ب) $\sum_{ر=١}^{٣٥} (٣ ر + ٢)^{٢}$

(جـ) $\sum_{ر=١}^{٣٥} (٦ ر + ٤)$ (د) $\sum_{ر=١}^{٣٥} (٣ ر + ٤)$

(١٠) إذا كان : $\sum\limits_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (١٠٠ - ٤\,\text{ر}) =$ صفر فإن : ن = ...

(أ) ٢٥ (ب) ٤٩ (جـ) ٥٠ (د) ٩٨

(١١) إذا كان : $\sum\limits_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{ر}^{٢}) = ٥٥$ ، $\sum\limits_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (٢\,\text{ر} - ١) = ٢٥$

فإن : $\sum\limits_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{ر}^{٢} + ٢\,\text{ر} - ١) =$ ....

(أ) ٥٥ (ب) ٣٠ (جـ) ٨٠ (د) ١٣٧٥

(١٢) إذا كان : $\sum\limits_{\text{ر}=١}^{٢٥} (٣ + \text{ك}\,\text{ر}) = ١٠٠$ فإن : ك = ...

(أ) ٢٥ (ب) ١٣ (جـ) $\frac{١}{١٣}$ (د) $\frac{١}{٢٥}$

(١٣) مجموع مضاعفات العدد ٦ الموجبة الأقل من ١٠٠ هو ....

(أ) $\sum\limits_{\text{ر}=١}^{١٠٠} ٦\,\text{ر}$ (ب) $\sum\limits_{\text{ر}=١}^{١٦} ٦\,\text{ر}$

(جـ) $\sum\limits_{\text{ر}=١}^{١٦} \text{ر}$ (د) $\sum\limits_{\text{ر}=١}^{٦} (١٠٠ - ٦\,\text{ر})$

(١٤) الحد العشرين فى المتسلسلة (٢ × ٤ + ٤ × ٦ + ٦ × ٨ + ...) يساوى ....

(أ) ١٦٨٠ (ب) ١٦٠٠ (جـ) ٨٤٠ (د) ٤٢٠

(١٥) ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ... + ٢٠ باستخدام رمز التجميع = ...

(أ) $\sum\limits_{\text{ر}=١}^{٢٠} ١$ (ب) $\sum\limits_{\text{ر}=١}^{٢٠} \text{ر}^{٢}$ (جـ) $\sum\limits_{\text{ر}=١}^{٢٠} (\text{ر} + ١)$ (د) $\sum\limits_{\text{ر}=١}^{٢٠} \text{ر}$

(١٦) ٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ... + ٣٠ باستخدام رمز التجميع = ...

(أ) $\sum\limits_{\text{ر}=١}^{٣٠} \text{ر}$ (ب) $\sum\limits_{\text{ر}=١}^{١٥} \text{ر}$ (جـ) $\sum\limits_{\text{ر}=١}^{١٥} ٢\,\text{ر}$ (د) $\sum\limits_{\text{ر}=١}^{٣٠} ٢\,\text{ر}$

(١٧) $١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + ٤^{٢} + ... + ٨^{٢}$ باستخدام رمز التجميع = ...

(أ) $\sum\limits_{\text{ر}=١}^{٨} \text{ر}^{٢}$ (ب) $\sum\limits_{\text{ر}=١}^{٦٤} \text{ر}$ (جـ) $\sum\limits_{\text{ر}=١}^{٨} ٢\,\text{ر}$ (د) $\sum\limits_{\text{ر}=١}^{٨} ٢\,\text{ر}^{٢}$

(١٨) ٣ + ٦ + ٩ + ١٢ + ... باستخدام رمز التجميع = ...

(أ) $\sum\limits_{\text{ر}=١}^{\infty} ٣\,\text{ر}$ (ب) $\sum\limits_{\text{ر}=١}^{\infty} (\text{ر} + ٣)$ (جـ) $\sum\limits_{\text{ر}=١}^{\infty} (\text{ر} + ٢)$ (د) $\sum\limits_{\text{ر}=١}^{\infty} \text{ر}^{٣}$

(١٩) $٢ + ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + \cdots$ باستخدام رمز التجميع = ...

(أ) $\sum_{ر=١}^{\infty} \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر}$ (ب) $\sum_{ر=١}^{٥} \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر-١}$ (جـ) $\sum_{ر=١}^{\infty} \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر-٢}$ (د) $\sum_{ر=١}^{٥} \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر-٢}$

(٢٠) $-١ - ٨ - ٢٧ - ٦٤ - \cdots - ٢١٦$ باستخدام رمز التجميع = ...

(أ) $\sum_{ر=١}^{٢١٦} (-ر)^{٣}$ (ب) $\sum_{ر=١}^{١٥} -ر^{٣}$ (جـ) $\sum_{ر=١}^{٦} (-١)^{ر} (ر)^{٣}$ (د) $\sum_{ر=١}^{٦} (-ر)^{٣}$

(٢١) $(١ \times ٢) + (٢ \times ٣) + (٣ \times ٤) + (٤ \times ٥) + \cdots$ باستخدام رمز التجميع يساوى ....

(أ) $\sum_{ر=١}^{\infty} ر\,(ر + ١)$ (ب) $\sum_{ر=١}^{\infty} ر\,(ر - ١)$

(جـ) $\sum_{ر=١}^{\infty} (ر + ١)(ر + ٢)$ (د) $\sum_{ر=١}^{\infty} (ر - ١)(ر + ١)$

(٢٢) المتسلسلة : $(٢ \times ٣) + (٣ \times ٤) + (٤ \times ٥) + \cdots$ باستخدام رمز التجميع = ...

(أ) $\sum_{ر=١}^{\infty} (ر + ١)(ر + ٢)$ (ب) $\sum_{ر=٢}^{\infty} ر\,(ر + ١)$

(جـ) $\sum_{ر=٣}^{\infty} ر\,(ر - ١)$ (د) جميع ما سبق.

(٢٣) المتسلسلة : $(٧ \times ١) + (٧ \times ٢) + (٧ \times ٣) + \cdots + (٧ \times ٢٠)$

باستخدام رمز التجميع = ...

(أ) $٧ \sum_{ر=١}^{١٤٠} ر$ (ب) $\sum_{ر=١}^{\infty} ٧\,ر$ (جـ) $\sum_{ر=١}^{٢٠} ٧ \sum_{ر=١}^{٢٠} ر$ (د) $\sum_{ر=١}^{٢٠} ٧\,ر$

(٢٤) $(١ \times ٢ \times ٣) + (٣ \times ٤ \times ٥) + (٥ \times ٦ \times ٧) + \cdots$ باستخدام رمز التجميع تساوى ....

(أ) $\sum_{ر=١}^{\infty} ر\,(ر + ١)(ر + ٢)$ (ب) $\sum_{ر=١}^{٧} ر\,(ر + ١)(ر + ٢)$

(جـ) $\sum_{ر=١}^{٥} (٢ر - ١)(٢ر)(٢ر + ١)$ (د) $\sum_{ر=١}^{\infty} (٢ر - ١)(٢ر)(٢ر + ١)$

(٢٥) $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٨} + \cdots + \frac{١}{٢٠}$ باستخدام رمز التجميع = ...

(أ) $\sum_{ر=١}^{٢٠} \frac{١}{٢\,ر}$ (ب) $\sum_{ر=١}^{\infty} \frac{١}{ر + ١}$ (جـ) $\sum_{ر=١}^{١٠} \frac{١}{٢\,ر}$ (د) $\sum_{ر=٠}^{٢٠} \frac{١}{ر + ٢}$

(٢٦) $-\frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} - \frac{١}{٨} + \frac{١}{١٦} - \cdots$ باستخدام رمز التجميع = ...

(أ) $\sum_{ر=١}^{\infty} -١ \sum_{ر=١}^{\infty} ٢^{-ر}$ (ب) $\sum_{ر=٠}^{١٦} (-١)^{ر} \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر+١}$

(جـ) $\sum_{ر=١}^{\infty} ٢^{-ر}$ (د) $\sum_{ر=١}^{\infty} \left(-\frac{١}{٢}\right)^{ر}$

(٢٧) باستخدام رمز التجميع يمكن التعبير عن المتسلسلة

٩ + ٩٩ + ٩٩٩ + ٩٩٩٩ + ... إلى ن حدًا بالصورة ....

(أ) $\sum_{س=١}^{\infty} (١٠^{س} \times ٩)$ (ب) $\sum_{س=١}^{ن} (٩ + ١٠ س)$

(جـ) $\sum_{س=٠}^{ن} (٩ + ١٠ س)$ (د) $\sum_{س=١}^{ن} (١٠^{س} - ١)$

(٢٨) إذا كان أ = $\sum_{س=١}^{١٠٠} س$ ، ب = $\sum_{س=٢}^{١٠١} س$ ، حـ = $\sum_{س=١}^{٩٩} س$ فإن : ....

(أ) أ > ب > حـ (ب) أ > حـ > ب (جـ) حـ > أ > ب (د) حـ > ب > أ

(٢٩) إذا كان : $ح_{١} = ١ + ٢ + ٣ + ... + ن$ ، $ح_{٢} = ١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + ... + ن^{٢}$ فإن : ....

(أ) $ح_{١} = ح_{٢}^{٢}$ (ب) $ح_{٢} = ح_{١}^{٢}$ (جـ) $\frac{ح_{٢}}{ح_{١}} = \frac{٢ن + ١}{٣}$ (د) $\frac{ح_{٢}}{ح_{١}} = ن$

(٣٠) إذا كان : $\sum_{س=١}^{ن} س = ٥٥$ فإن : $\sum_{س=١}^{ن} س^{٢} =$ ....

(أ) ٣٨٥ (ب) ٥٠٦ (جـ) ١١١٥ (د) ٣٠٢٥

(٣١) $١^{٢} + ١ + ٢^{٢} + ٢ + ٣^{٢} + ٣ + ... + ن^{٢} + ن =$ ....

(أ) $\frac{ن(ن+١)}{٢}$ (ب) $\left(\frac{ن(ن+١)}{٢}\right)^{٢}$

(جـ) $\frac{ن(ن+١)(ن+٢)}{٣}$ (د) $\frac{ن(ن+١)(ن+٢)(ن+٣)}{٤}$

(٣٢) مجموع مساحات المربعات التى أضلاعها (٣ ، ٤ ، ٥ ، ... ، ١٠) من السنتيمترات = ... سم^{٢}

(أ) ٣٦٠ (ب) ٣٨٠ (جـ) ٣٤٠ (د) ٣٥٠

(٣٣) إذا كان مجموع ن حدًا الأولى من حدود متتابعة الأعداد الصحيحة الموجبة يساوى $\frac{١}{٥}$ مجموع مربعات هذه الحدود فإن ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

(٣٤) مجموع أول ٢٠٢٢ حد من حدود المتتابعة (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ...) يساوى ....

(أ) ٥٠٥١ (ب) ٥٠٥٢ (جـ) ٥٠٥٣ (د) ٥٠٥٤

(٣٥) مجموع السبعة حدود الأولى فى المتتابعة (٣ ، ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ...) يساوى ....

(أ) $\sum_{س=١}^{٧} (س + ١)$ (ب) $\sum_{س=١}^{٧} (٢ س + ١)$

(جـ) $\sum_{س=١}^{٧} ٣ (س - ١)$ (د) $\sum_{س=١}^{٧} (٤ س - ١)$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ اكتب مفكوك كل من المتسلسلات الآتية :

① $\sum\limits_{\text{ر}=1}^{5} (3\text{ر} - 2)$ ② $\sum\limits_{\text{ر}=1}^{8} ((-1)^{\text{ر}} + 4\text{ر})$

③ $\sum\limits_{\text{ر}=1}^{\infty} ((\frac{1}{2})^{\text{ر}} - 1)$ ④ $\sum\limits_{\text{ر}=1}^{\infty} (\frac{1}{\text{ر}} - \frac{1}{\text{ر}+1})$

---

٢ اكتب مفكوك كل من المتسلسلات الآتية ، ثم أوجد مجموع المفكوك :

① $\sum\limits_{\text{ر}=1}^{4} (\text{ر}^2)$ ② $\sum\limits_{\text{ر}=1}^{5} (1 - \text{ر}^2)$

③ $\sum\limits_{\text{ر}=1}^{5} (\frac{-1}{2})^{\text{ر}}$ ④ $\sum\limits_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\frac{1}{\text{ر}+1} - \frac{1}{\text{ر}})$

---

٣ أوجد بطريقتين مختلفتين :

① $\sum\limits_{\text{ر}=1}^{5} (2\text{ر}^2 - 3\text{ر} + 5)$ ② $\sum\limits_{\text{ر}=1}^{4} (3 - 2\text{ر} + \text{ر}^2)$

---

٤ إذا علمت أن : $\sum\limits_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ر} = \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2}$ ، $\sum\limits_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ر}^2 = \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)(2\text{ن}+1)}{6}$

فأوجد باستخدام خواص رمز التجميع $\sum$ قيمة كل مما يأتى :

① $\sum\limits_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{ر} + 2)$ ② $\sum\limits_{\text{ر}=1}^{6} (2\text{ر}^2 - 1)$

③ $\sum\limits_{\text{ر}=8}^{12} 2(\text{ر} + 5)$ ④ $\sum\limits_{\text{ر}=4}^{7} (\text{ر}^2 - 2\text{ر} + 3)$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : $\sum\limits_{\text{ر}=1}^{20} \text{جا}\,\theta = 10$ فإن إحدى قيم θ هى ....

(أ) 30° (ب) 60° (جـ) 90° (د) 120°

② إذا كان س_1 ، س_2 هما جذرا المعادلة : $\text{س}^2 - (\text{م} - 2)\,\text{س} - 1 = 0$ وكان : $\sum\limits_{\text{ر}=1}^{2} \text{س}_{\text{ر}} = 3$

فإن : م = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

③ إذا كان : $\sum_{ر=١}^{ن} (٣) = ١٢$ وكان : د $(س) = ٣ - ٢س + س^{٢}$ فإن : $\sum_{ر=١}^{ن}$ د $(ر) = ...$

(أ) ١٢ (ب) ٢٢ (جـ) ٥٢ (د) ٦٢

④ إذا كان : $\sum_{س=١}^{م} (س) + \sum_{ص=١}^{م} (ص) + \sum_{ع=١}^{م} (ع) = ١٦٥$ فإن : م = ...

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٠

⑤ إذا كان : $\sum_{ن=١}^{ك} (ن + ١)^{٢} = ٨٤ + \sum_{ن=١}^{ك} (ن - ١)^{٢}$ فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٩

⑥ إذا كان : $\sum_{ك=١}^{ن} ك = س$ ، $\sum_{ك=١}^{ن} ك^{٢} = ٧س$ فإن : ن = ...

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٥

⑦ $\sum_{س=١}^{٩٠} [\text{جتا}(س^{\circ}) - \text{جا}(س^{\circ})] = ...$

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ٩٠

⑧ إذا كان : $\sum_{س=١}^{٦} (أس + ب) = ١٥$ ، $\sum_{س=٢}^{٦} (أس + ب) = ٧$ فإن : أ + ب = ...

(أ) −٥ (ب) −٤ (جـ) ٤ (د) ٨

⑨ إذا كان : $\sum_{ر=١}^{ن} \text{لو} \left(\frac{ر + ١}{ر}\right) = ٢$ فإن : ن = ...

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٩٩ (د) ١٠٠

⑩ إذا كان : $س = \sum_{ر=١}^{ن} ٣ر$ ، $ص = \sum_{ر=١}^{ن} (٣ر + ٢)$ وكان : ص − س = ١٠

فإن : ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٨ (جـ) ١١ (د) ١٣

⑪ إذا كان : ن > ٨ وكان : $\sum_{ر=٥}^{ن} ر^{٢} = س$ ، $\sum_{ر=٥}^{٨} ر^{٢} + \sum_{ر=٨}^{ن} ر^{٢} = ص$ فإن : ....

(أ) س = ص (ب) س = ص + ٦٤

(جـ) ص = س + ٦٤ (د) ص = ٦٤ س

⑫ $\sum_{أ=١}^{٢} \sum_{ب=١}^{٢} \sum_{حـ=١}^{٢} أ ب حـ = ...$

(أ) ٨ (ب) ٢٧ (جـ) ٦٤ (د) ١٢٥

الدرس 3

المتتابعة الحسابية

تعريف

المتتابعة الحسابية هى المتتابعة التى يكون فيها الفرق بين كل حد والحد السابق له مباشرة يساوى مقدارًا ثابتًا يسمى أساس المتتابعة ويرمز له عادة بالرمز (ء)

أى أن $ء = ح_{ن+١} - ح_{ن}$ لكل $ن \in ص^{+}$

ومن التعريف السابق فإن المتتابعة الحسابية تكون :

- تزايدية عندما ء > ٠
- تناقصية عندما ء < ٠
- ثابتة عندما ء = ٠

مثال ١

بين أى المتتابعات الآتية تكون متتابعة حسابية وأيها ليست حسابية وأوجد أساس كل متتابعة حسابية :

١ (٥ ، ٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ...)

٢ (−١٧ ، −١٥ ، −١٣ ، −١١ ، ...)

٣ $(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٥} ، \frac{١}{٨} ، \frac{١}{١١} ، ...)$

الحل

١ $\because ح_٢ - ح_١ = ح_٣ - ح_٢ = ح_٤ - ح_٣ = ٤$ $\therefore$ المتتابعة حسابية وأساسها = ٤

٢ $\because ح_٢ - ح_١ = ح_٣ - ح_٢ = ح_٤ - ح_٣ = ٢$ $\therefore$ المتتابعة حسابية وأساسها = ٢

٣ $\because ح_٢ - ح_١ = \frac{١}{٥} - \frac{١}{٢} = -\frac{٣}{١٠}$

، $ح_٣ - ح_٢ = \frac{١}{٨} - \frac{١}{٥} = -\frac{٣}{٤٠}$

$\therefore ح_٢ - ح_١ \neq ح_٣ - ح_٢$

$\therefore$ المتتابعة ليست حسابية.

معلومة إثرائية

المتتابعة التى مقلوبات حدودها تكون متتابعة حسابية تسمى بالمتتابعة التوافقية مثل المتتابعة $(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٥} ، \frac{١}{٨} ، \frac{١}{١١} ، ...)$ بالمثال المجاور.

مثال ٢

بين أى المتتابعات الآتية تكون متتابعة حسابية وأيها ليست حسابية وأوجد أساس كل متتابعة حسابية :

١ $(ح_ن) = (٣ن - ٢)$ ٢ $(ح_ن) = (٢ن^٢ - ١)$ ٣ $(ح_ن) = (٣^ن)$

الحل

لمعرفة ما إذا كانت المتتابعة $(ح_ن)$ تكون متتابعة حسابية أم لا نوجد $ح_{ن+١} - ح_ن$ فإذا كان الناتج يساوى مقدارًا ثابتًا كانت $(ح_ن)$ متتابعة حسابية وكان هذا المقدار الثابت أساسها ، بينما إذا كان الناتج ليس بمقدار ثابت فإن $(ح_ن)$ ليست متتابعة حسابية.

١ ∵ $ح_{ن+١} - ح_ن = \left(٣(ن+١) - ٢\right) - (٣ن - ٢) = ٣ن + ٣ - ٢ - ٣ن + ٢ = ٣$ = مقدار ثابت.

∴ $(ح_ن) = (٣ن - ٢)$ متتابعة حسابية أساسها = ٣

٢ ∵ $ح_{ن+١} - ح_ن = \left(٢(ن+١)^٢ - ١\right) - (٢ن^٢ - ١) = ٢ن^٢ + ٤ن + ٢ - ١ - ٢ن^٢ + ١ = ٤ن + ٢$

وهذا ليس بمقدار ثابت لأنه يعتمد على قيمة ن

∴ $(ح_ن) = (٢ن^٢ - ١)$ ليست متتابعة حسابية.

٣ ∵ $ح_{ن+١} - ح_ن = (٣^{ن+١}) - (٣^ن) = ٣^ن(٣ - ١) = ٢ × ٣^ن$ وهذا ليس بمقدار ثابت لأنه يعتمد على قيمة ن

∴ $(ح_ن) = (٣^ن)$ ليست متتابعة حسابية.

ملاحظة

المتتابعة الحسابية : هى دالة من الدرجة الأولى فى ن حيث ن ∈ $ص^+$ ويكون معامل ن هو أساس المتتابعة أو دالة ثابتة مجالها $ص^+$ ويكون أساسها = صفر ففى المثال السابق :

١ $(ح_ن) = (٣ن - ٢)$ متتابعة حسابية لأن $(ح_ن)$ دالة من الدرجة الأولى فى ن وأساسها ء = ٣

٢ $(ح_ن) = (٢ن^٢ - ١)$ متتابعة ليست حسابية لأن $(ح_ن)$ دالة من الدرجة الثانية فى ن

الحد العام (النونى) للمتتابعة الحسابية

إذا كانت $(ح_ن)$ متتابعة حسابية حدها الأول = أ ، أساسها = ء فإن

الصورة العامة للمتتابعة الحسابية هى : (أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، أ + ٣ء ، ...)

أى أن : $ح_١$ = أ ، $ح_٢$ = أ + ء ، $ح_٣$ = أ + ٢ء وهكذا ...

ونلاحظ فى هذه الصورة أن معامل ء يقل دائمًا واحد عن رتبة الحد وعليه يكون :

$ح_{٢٥}$ = أ + ٢٤ء ، $ح_{٧٥}$ = أ + ٧٤ء ، وهكذا ...

ومنها نجد أن الحد العام (النونى) للمتتابعة الحسابية هو $ح_ن = أ + (ن - ١)ء$

فمثلًا : فى المتتابعة الحسابية (٥ ، ٧ ، ٩ ، ...) يكون أ = ٥ ، ء = ٢

ومنها فإن الحد العام $ح_ن = ٥ + (ن - ١) × ٢$ ، $ح_٥ = ٥ + ٤ × ٢ = ١٣$ ، $ح_{١٢} = ٥ + ١١ × ٢ = ٢٧$

ومما سبق فإنه

إذا كانت المتتابعة الحسابية منتهية وعدد حدودها = ن فإنه يرمز لحدها الأخير بالرمز ل

حيث : ل = أ + (ن − ١) ء

وتكون الصورة العامة للمتتابعة الحسابية فى هذه الحالة على الصورة :

(أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، ... ، ل − ٢ء ، ل − ء ، ل)

ملاحظات هامة

١ لإيجاد رتبة الحد الذى يساوى قيمة معلومة س نضع | ح_ن = س

٢ لإيجاد رتبة أول حد تكون قيمته أقل من قيمة معلومة س نضع | ح_ن < س

٣ لإيجاد رتبة أول حد تكون قيمته أكبر من قيمة معلومة س نضع | ح_ن > س

٤ لإيجاد رتبة أول حد موجب فى المتتابعة الحسابية نضع | ح_ن > ٠

٥ لإيجاد رتبة أول حد سالب فى المتتابعة الحسابية نضع | ح_ن < ٠

٦ الحد الذى رتبته ك من النهاية هو الحد الذى رتبته (ن − ك + ١) من البداية حيث ن عدد حدود المتتابعة.

مثال ٤

فى المتتابعة الحسابية (٩٥ ، ٩٢ ، ٨٩ ، ...) أوجد :

١ قيمة ح_٦

٢ رتبة الحد الذى قيمته ٦٨

٣ رتبة أول حد سالب.

٤ رتبة أول حد تقل قيمته عن ٢٥

الحل

∵ أ = ٩٥ ، ء = ٩٢ − ٩٥ = −٣

١ ح_٦ = أ + ٥ء = ٩٥ + ٥ × −٣ = ٨٠

٢ بوضع ح_ن = ٦٨

∴ ٩٥ + (ن − ١) × −٣ = ٦٨

∴ ٩٨ − ٣ن = ٦٨

∴ ن = ١٠

∴ أ + (ن − ١)ء = ٦٨

∴ ٩٥ − ٣ن + ٣ = ٦٨

∴ −٣ن = −٣٠

∴ ح_١٠ = ٦٨

٣ بوضع ح_ن < ٠

∴ ٩٥ + (ن − ١) × −٣ < ٠

∴ −٣ن < −٩٨

∴ أول حد سالب هو ح_٣٣

∴ أ + (ن − ١)ء < ٠

∴ ٩٨ − ٣ن < ٠

∴ ن > ٣٢ ٢/٣

٤ بوضع $ح_{ن} < ٢٥$

∴ ٩٥ + (ن − ١) × −٣ < ٢٥

∴ −٣ن < −٧٣

∴ أ + (ن − ١) ء < ٢٥

∴ ٩٨ − ٣ن < ٢٥

∴ ن > $٢٤\frac{١}{٣}$

∴ أول حد قيمته تقل عن ٢٥ هو $ح_{٢٥}$

مثال ٥

في المتتابعة الحسابية (−٤٢ ، −٣٩ ، −٣٦ ، ... ، ٢١)

١ أوجد عدد حدود المتتابعة.

٢ أوجد رتبة وقيمة أول حد موجب.

٣ أوجد قيمة $ح_{٩}$ من النهاية.

٤ هل يوجد حد قيمته −١١ ؟

الحل

∵ أ = −٤٢ ، ء = −٣٩ + ٤٢ = ٣ ، ل = ٢١

١ ∵ ل = أ + (ن − ١) ء

∴ ٢١ = −٤٥ + ٣ن

∴ ن = ٢٢

∴ ٢١ = −٤٢ + (ن − ١) × ٣

∴ ٦٦ = ٣ن

∴ عدد حدود المتتابعة = ٢٢

٢ بوضع $ح_{ن} > ٠$

∴ −٤٢ + (ن − ١) × ٣ > ٠

∴ ٣ن > ٤٥

∴ أول حد موجب هو $ح_{١٦}$

∴ أ + (ن − ١) ء > ٠

∴ −٤٥ + ٣ن > ٠

∴ ن > ١٥

∴ $ح_{١٦}$ = أ + ١٥ ء = −٤٢ + ١٥ × ٣ = ٣

٣ بكتابة حدود المتتابعة من النهاية يكون حدها الأول = ٢١ وأساسها = −٣

∴ $ح_{٩}$ من النهاية = أ + ٨ ء = ٢١ + ٨ × −٣ = ٢١ − ٢٤ = −٣

حل آخر :

$ح_{٩}$ من النهاية = $ح_{(٢٢ - ٩ + ١)}$ من البداية = $ح_{١٤}$ من البداية

∴ $ح_{٩}$ من النهاية = أ + ١٣ ء = −٤٢ + ١٣ × ٣ = −٣

٤ بفرض أن $ح_{ن}$ = −١١

∴ −٤٢ + (ن − ١) × ٣ = −١١

∴ ن = $١١\frac{١}{٣}$ $\notin$ $ص^{+}$

∴ أ + (ن − ١) ء = −١١

∴ −٤٥ + ٣ن = −١١

∴ لا يوجد في المتتابعة حد قيمته −١١

مثال ٦

إذا كانت المتتابعة (١٧ ، س ، ... ، ص ، ٧١) متتابعة حسابية وكان ٣ س = ص + ٤

فأوجد قيمة كل من : س ، ص

الحل

∵ المتتابعة حسابية. ∴ الأساس = مقدار ثابت

∴ س − ١٧ = ٧١ − ص ∴ س + ص = ٨٨ (١)

، ∵ ٣ س = ص + ٤ (معطى) ∴ ٣ س − ص = ٤ (٢)

وبجمع (١) ، (٢) : ∴ ٤ س = ٩٢ ∴ س = ٢٣

وبالتعويض فى (١) : ∴ ص = ٦٥

مثال ٧

إذا كان $ح_{٢ن+١}$ من المتتابعة الحسابية (١ ، ٣,٥ ، ٦ ، ...) يساوى $ح_{٥ن-١}$ من المتتابعة الحسابية (٢٣ ، ٢١,٥ ، ٢٠ ، ...) فأوجد : قيمة ن

الحل

بالنسبة للمتتابعة الأولى : أ = ١ ، ء = ٣,٥ − ١ = ٢,٥

∴ $ح_{٢ن+١}$ = أ + (٢ ن + ١ − ١) ء = أ + ٢ ن ء

∴ $ح_{٢ن+١}$ = ١ + ٢ ن × $\frac{٥}{٢}$ = ١ + ٥ ن (١)

بالنسبة للمتتابعة الثانية : أ = ٢٣ ، ء = ٢١,٥ − ٢٣ = −١,٥

∴ $ح_{٥ن-١}$ = أ + (٥ ن − ١ − ١) ء = أ + (٥ ن − ٢) ء

∴ $ح_{٥ن-١}$ = ٢٣ + (٥ ن − ٢) (−١,٥)

∴ $ح_{٥ن-١}$ = ٢٣ − ٧,٥ ن + ٣ = ٢٦ − ٧,٥ ن (٢)

، ∵ $ح_{٢ن+١}$ من المتتابعة الأولى = $ح_{٥ن-١}$ من المتتابعة الثانية.

، من (١) ، (٢) : ∴ ١ + ٥ ن = ٢٦ − ٧,٥ ن

∴ ١٢,٥ ن = ٢٥ ∴ ن = ٢

مثال ٨

أوجد الحد الثامن المشترك بين المتتابعتين الحسابيتين (٢ ، ٥ ، ٨ ، ...) ، (-٥ ، -١ ، ٣ ، ...)

الحل

بفرض أن $ح_ن$ من المتتابعة الأولى = $حَ_ك$ من المتتابعة الثانية

∴ ٢ + (ن - ١) × ٣ = -٥ + (ك - ١) × ٤

∴ ٢ + ٣ ن - ٣ = -٥ + ٤ ك - ٤ ∴ ٣ ن = -٨ + ٤ ك

∴ ن = $\frac{-٨ + ٤ ك}{٣}$ ∴ ن = $\frac{٤ (ك - ٢)}{٣}$

، ∵ ن عدد صحيح موجب.

∴ (ك - ٢) من مضاعفات العدد ٣ الأكبر من الصفر

∴ ك - ٢ = ٣ ومنها ك = ٥ ∴ الحد المشترك الأول = $حَ_٥$ = ١١

أ، ك - ٢ = ٦ ومنها ك = ٨ ∴ الحد المشترك الثانى = $حَ_٨$ = ٢٣

أ، ك - ٢ = ٩ ومنها ك = ١١ ∴ الحد المشترك الثالث = $حَ_{١١}$ = ٣٥

∴ الحدود المشتركة تكون المتتابعة الحسابية

(١١ ، ٢٣ ، ٣٥ ، ...)

∴ الحد المشترك الثامن = ١١ + ٧ × ١٢ = ٩٥

لاحظ أن :

أساس متتابعة الحدود المشتركة هو المضاعف المشترك الأصغر لأساس المتتابعتين الأصليتين.

تعيين المتتابعة الحسابية

* المقصود بتعيين المتتابعة الحسابية هو معرفة كل من حدها الأول وأساسها حتى يمكن تكوينها.

مثال ٩

أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها الثالث ١١ وحدها السادس ٢٠

الحل

∵ $ح_٣$ = ١١

∴ أ + ٢ ء = ١١ (١)

، ∵ $ح_٦$ = ٢٠

∴ أ + ٥ ء = ٢٠ (٢)

وبطرح (١) من (٢) : ∴ ٣ ء = ٩ ∴ ء = ٣

وبالتعويض فى (١) : ∴ أ + ٢ × ٣ = ١١ ∴ أ = ١١ - ٦ = ٥

∴ المتتابعة هى (٥ ، ٨ ، ١١ ، ...)

لاحظ أن :

* إذا كان : $ح_س$ ، $ح_ص$ حدين فى متتابعة حسابية حيث س ≠ ص

فإن ء (أساس المتتابعة) = $\frac{ح_ص - ح_س}{ص - س}$

أى أن : ء = $\frac{ح_٦ - ح_٣}{٦ - ٣}$ = $\frac{٢٠ - ١١}{٦ - ٣}$ = ٣

مثال ١٠

متتابعة حسابية فيها $ح_{٢} + ح_{٤} = ٢$ ، $ح_{٦} + ح_{٧} + ح_{٨} = -٤٥$ ، أوجد المتتابعة.

الحـــل

∵ $ح_{٢} + ح_{٤} = ٢$ ∴ $(أ + ء) + (أ + ٣ء) = ٢$

∴ $٢أ + ٤ء = ٢$ وبالقسمة على ٢ ∴ $أ + ٢ء = ١$ (١)

، ∵ $ح_{٦} + ح_{٧} + ح_{٨} = -٤٥$ ∴ $(أ + ٥ء) + (أ + ٦ء) + (أ + ٧ء) = -٤٥$

∴ $٣أ + ١٨ء = -٤٥$ وبالقسمة على ٣ ∴ $أ + ٦ء = -١٥$ (٢)

وبطرح (١) من (٢) : ∴ $٤ء = -١٦$ ∴ $ء = -٤$

وبالتعويض فى (١) : ∴ $أ - ٨ = ١$ ∴ $أ = ٩$ ∴ المتتابعة هى (٩ ، ٥ ، ١ ، ...)

مثال ١١

متتابعة حسابية مجموع حديها الرابع والخامس ٢٢ والنسبة بين حديها التاسع والرابع عشر ٢ : ٣ أوجد المتتابعة.

الحـــل

∵ $ح_{٤} + ح_{٥} = ٢٢$ ∴ $(أ + ٣ء) + (أ + ٤ء) = ٢٢$

∴ $٢أ + ٧ء = ٢٢$ (١)

، ∵ $\frac{ح_{٩}}{ح_{١٤}} = \frac{٢}{٣}$ ∴ $\frac{أ + ٨ء}{أ + ١٣ء} = \frac{٢}{٣}$

∴ $٣أ + ٢٤ء = ٢أ + ٢٦ء$ ∴ $أ = ٢ء$ (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) : ∴ $٤ء + ٧ء = ٢٢$ ∴ $١١ء = ٢٢$ ∴ $ء = ٢$

وبالتعويض فى (٢) : ∴ $أ = ٤$ ∴ المتتابعة هى (٤ ، ٦ ، ٨ ، ...)

مثال ١٢

متتابعة حسابية حدها الثانى خمسة أمثال حدها السادس ، مجموع مربعى حديها الأول والرابع ٤٠٥ فما هى المتتابعة ؟

الحـــل

∵ $ح_{٢} = ٥ ح_{٦}$ ∴ $أ + ء = ٥ (أ + ٥ء)$

∴ $-٤أ = ٢٤ء$ ∴ $أ = -٦ء$ (١)

، ∵ $ح_{١}^{٢} + ح_{٤}^{٢} = ٤٠٥$ ∴ $أ^{٢} + (أ + ٣ء)^{٢} = ٤٠٥$ (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) : ∴ $(-٦ء)^{٢} + (-٦ء + ٣ء)^{٢} = ٤٠٥$

∴ $٣٦ء^{٢} + ٩ء^{٢} = ٤٠٥$ ∴ $٤٥ء^{٢} = ٤٠٥$

∴ $ء^{٢} = ٩$ ∴ $ء = \pm ٣$

وبالتعويض فى (١) عن $ء = ٣$ ∴ $أ = -١٨$

∴ المتتابعة هى (-١٨ ، -١٥ ، -١٢ ، ...)

وبالتعويض فى (١) عن $ء = -٣$ ∴ $أ = ١٨$ ∴ المتتابعة هى (١٨ ، ١٥ ، ١٢ ، ...)

ملاحظتان

(١) إذا علم مجموع ثلاثة أعداد فى تتابع حسابى يفضل فرضهم على الصورة : (أ − ء ، أ ، أ + ء)

(٢) إذا علم مجموع أربعة أعداد فى تتابع حسابى يفضل فرضهم على الصورة :

(أ − ٣ء ، أ − ء ، أ + ء ، أ + ٣ء)

مثال ١٣

ثلاثة أعداد تكون متتابعة حسابية مجموعها ٢١ وحاصل ضربها ٢٣١ ، أوجد هذه الأعداد.

الحل

بفرض أن الأعداد هى : أ − ء ، أ ، أ + ء

∴ (أ − ء) + أ + (أ + ء) = ٢١ ∴ ٣ أ = ٢١ ∴ أ = ٧

، ∵ أ (أ − ء) (أ + ء) = ٢٣١ ∴ أ (أ^٢ − ء^٢) = ٢٣١

وبالتعويض عن أ : ∴ ٧ (٤٩ − ء^٢) = ٢٣١ ∴ ٤٩ − ء^٢ = ٣٣

∴ ء^٢ = ١٦ ∴ ء = ± ٤

وعندما ء = ٤ ∴ الأعداد هى : ٣ ، ٧ ، ١١

وعندما ء = −٤ ∴ الأعداد هى : ١١ ، ٧ ، ٣

الأوساط الحسابية

الوسط الحسابى لعدد محدود من الأعداد يساوى مجموع تلك الأعداد مقسومًا على عددها.

فمثلًا : الوسط الحسابى للأعداد ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ هو $\frac{٥ + ٧ + ٩ + ١١}{٤}$ = ٨

* **وبالتالى :** الوسط الحسابى للعددين أ ، ب يساوى $\frac{أ + ب}{٢}$ أى نصف مجموعهما.

فمثلًا : الوسط الحسابى للعددين ٤ ، ٦ يساوى $\frac{٤ + ٦}{٢}$ = ٥

تعريف

إذا كانت أ ، ب ، حـ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن الحد الأوسط ب يساوى الوسط الحسابى للحدين الآخرين أ ، حـ

أى أن ب = $\frac{أ + حـ}{٢}$ أى ٢ ب = أ + حـ

مثال ⑭

عددان الفرق بينهما ٣ ووسطهما الحسابى ٧,٥ ، أوجد العددين.

الحل

نفرض أن العددين هما أ ، ب حيث أ > ب ∴ أ − ب = ٣ (١)

، ∵ $\frac{أ + ب}{٢}$ = ٧,٥ ∴ أ + ب = ١٥ (٢)

وبجمع (١) ، (٢) ينتج أن : ٢ أ = ١٨ ∴ أ = ٩

وبالتعويض فى (١) : ∴ ب = ٦ ∴ العددان هما ٦ ، ٩

مثال ⑮

عددان وسطهما الحسابى ١٣ ، حاصل ضربهما ١٦٨ ، أوجد العددين.

الحل

نفرض أن العددين هما س ، ص ∴ $\frac{س + ص}{٢}$ = ١٣

∴ س + ص = ٢٦ ∴ ص = ٢٦ − س (١) ، س ص = ١٦٨ (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) : ∴ س (٢٦ − س) = ١٦٨

∴ $س^٢$ − ٢٦ س + ١٦٨ = ٠ ∴ (س − ١٢) (س − ١٤) = ٠

∴ س = ١٢ أ، س = ١٤

وبالتعويض فى (١) : ∴ ص = ١٤ أ، ص = ١٢ ∴ العددان هما ١٢ ، ١٤

إدخال عدد محدود من الأوساط الحسابية بين عددين

إذا كانت أ ، ب كميتين معلومتين وأريد إدخال ن من الأوساط الحسابية : $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، ... ، $س_ن$ بينهما فإنه ينتج لدينا متتابعة حسابية حدها الأول أ وعدد حدودها ن + ٢ وحدها الأخير ب = $ح_{ن+٢}$

وتكون المتتابعة على الصورة : (أ ، $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، ... ، $س_ن$ ، ب)

مثال ⑯

أدخل أحد عشر وسطًا حسابيًا بين : ٢٥ ، −١١

الحل

بإدخال ١١ وسطًا حسابيًا بين ٢٥ ، −١١ نحصل على متتابعة حسابية مكونة من ١٣ حدًا

حيث أ = ٢٥ ، $ح_{١٣}$ = −١١

∴ −١١ = ٢٥ + ١٢ ء

∴ ١٢ ء = −٣٦ ∴ ء = −٣

∴ الأوساط هى (٢٢ ، ١٩ ، ١٦ ، ... ، −٨)

لاحظ أن :

عند إدخال ن من الأوساط الحسابية بين أ ، ب فإن أساس المتتابعة ء = $\frac{ب - أ}{ن + ١}$

أى أن : ء = $\frac{-١١ - ٢٥}{١٢}$ = −٣

ملاحظة

عند إدخال عدة أوساط حسابية بين أ ، ل تكون المتتابعة الحسابية هى :

(أ ، أ + ى ، أ + ٢ ى ، ... ، ل − ٢ ى ، ل − ى ، ل) ويكون :

الوسط الأول = ح٢ = أ + ى ، الوسط الثانى = ح٣ = أ + ٢ ى وهكذا ...

، الوسط الأخير = ل − ى ، الوسط قبل الأخير = ل − ٢ ى وهكذا ...

∴ مجموع أى وسط ونظيره من الطرف الآخر = أ + ل

أى أن : مجموع الوسطين الأول والأخير = أ + ل ومجموع الوسطين الثانى وقبل الأخير = أ + ل

مثال ١٧

إذا أدخلت عدة أوساط حسابية بين العددين ٣٥ ، ٣ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الأخيرين ١٦ : ٣ فما عدد هذه الأوساط ؟

الحل

نفرض أن المتتابعة (٣٥ ، ٣٥ + ى ، ٣٥ + ٢ ى ، ... ، ٣ − ٢ ى ، ٣ − ى ، ٣)

$\because \frac{٣٥ + ى + ٣٥ + ٢ى}{٣ - ى + ٣ - ٢ى} = \frac{١٦}{٣}$ $\therefore \frac{٧٠ + ٣ى}{٦ - ٣ى} = \frac{١٦}{٣}$

$\therefore ٢١٠ + ٩ى = ٩٦ - ٤٨ى$ $\therefore ٥٧ى = -١١٤$ $\therefore ى = -٢$

∵ ل = أ + (ن − ١) ى حيث ل الحد الأخير ، ن عدد حدود المتتابعة.

∴ ٣ = ٣٥ + (ن − ١) × −٢ ∴ ٣ = ٣٥ − ٢ ن + ٢

∴ ن = ١٧ حدًا. ∴ عدد الأوساط = ١٧ − ٢ = ١٥ وسطًا.

ملاحظتان

* إذا كان : (أ ، ب ، ح) فى تتابع حسابى فإن :

١ (أ + ك ، ب + ك ، ح + ك) فى تتابع حسابى ، (أ − ك ، ب − ك ، ح − ك) فى تتابع حسابى أيضًا.

٢ (أ ك ، ب ك ، ح ك) فى تتابع حسابى أيضًا.

* إذا كانت ($أ_١$ ، $ب_١$ ، $ح_١$ ، ...) متتابعة حسابية أساسها ($ى_١$)

وكانت ($أ_٢$ ، $ب_٢$ ، $ح_٢$ ، ...) متتابعة حسابية أساسها ($ى_٢$)

فإن : ($أ_١ + أ_٢$ ، $ب_١ + ب_٢$ ، $ح_١ + ح_٢$ ، ...) تمثل متتابعة حسابية أساسها ($ى_١ + ى_٢$)

تمارين 3

على المتتابعة الحسابية

من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

تمارين على المتتابعة الحسابية وتعيينها

(١) جميع المتتابعات الآتية يمكن أن تكون حسابية ما عدا المتتابعة ....

(أ) (٣ ، ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ...) (ب) (−١١ ، −١٥ ، −١٩ ، −٢٣ ، ...)

(جـ) ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، ...) (د) ($\frac{٢١}{٥}$ ، $\frac{١٦}{٥}$ ، $\frac{١١}{٥}$ ، $\frac{٦}{٥}$ ، ....)

(٢) جميع المتتابعات الآتية حسابية عدا ....

(أ) (٢ن − ٥) (ب) (٤٣ − ٧ن) (جـ) ($٢^{ن}$) (د) (٣ن)

(٣) المتتابعة الحسابية من بين المتتابعات الآتية هى ....

(أ) ($ح_{ن}$) = ($\frac{ن + ١}{ن}$) (ب) ($ح_{ن}$) = ($(ن + ١)^{٢}$)

(جـ) ($ح_{ن}$) = ($\frac{٣}{ن}$ (ن + ٢)) (د) ($ح_{ن}$) = ($\frac{ن^{٢} - ١}{ن^{٢} + ن + ١}$)

(٤) المتتابعة ($ح_{ن}$) تكون حسابية إذا وفقط إذا كان .... لكل ن > ١

(أ) $ح_{ن} + ح_{ن+١}$ = مقدار ثابت (ب) $\frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}}$ = مقدار ثابت

(جـ) $ح_{ن-١} + ح_{ن+١} = ٢ ح_{ن}$ (د) $ح_{ن+١} - ح_{ن} = \frac{١}{ن}$

(٥) الحد العام للمتتابعة : (أ ، أ + د ، أ + ٢ د ، ...) هو ....

(أ) د ن + (د − أ) (ب) أ + ن د (جـ) أ + (ن + ١) د (د) د ن + (أ − د)

(٦) المتتابعة الحسابية (٣ ، ٥ ، ٧ ، ...) حدها النونى يساوى ....

(أ) ٣ ن (ب) ٢ ن + ١ (جـ) ٥ ن − ٢ (د) ٢ ن

(٧) إذا كان : ٢ أ + ٢ ، ٦ أ − ٢ ، ٧ أ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن أ تساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٨) إذا كانت : (٢٩ ، س ، ... ، ٣ س ، ٩٥) متتابعة حسابية فإن : س = ...

(أ) ٣٠ (ب) ٣١ (جـ) ٣٢ (د) ٣٣

(٩) إذا كانت : ٣٦ ، أ ، ٢٤ ، ب حدودًا متتالية من متتابعة حسابية فإن : ب = ...

(أ) ١٢ (ب) ١٦ (جـ) ١٨ (د) ٢٤

(١٠) إذا كانت : (س ، ص ، ٣ س + ص ، س + ٣ ص + ٢ ، ....) متتابعة حسابية

فإن : س − ص = ...

(أ) −٦ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ٦

(١١) عدد حدود المتتابعة : (٢ ، ٨ ، ١٤ ، ... ، ٦٨) يساوى .... حدًا.

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٢ (د) ١٦

(١٢) الحد الأخير فى المتتابعة الحسابية التى حدها الأول ٣ وأساسها ٥ وعدد حدودها ٢٥ حدًا يساوى ....

(أ) ١١٣ (ب) ١١٨ (جـ) ١٢٣ (د) ١٢٨

(١٣) الحد العاشر فى المتتابعة الحسابية ($\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{١٢}$ ، $\sqrt{٢٧}$ ، ...) يساوى ....

(أ) $\sqrt{٢٤٣}$ (ب) $\sqrt{٣٠٠}$ (جـ) $\sqrt{٣٦٣}$ (د) $\sqrt{٤٣٢}$

(١٤) قيمة الحد الأوسط فى المتتابعة (٢ ، ٥ ، ٨ ، ... ، ١٢٨) هى ....

(أ) ٢٢ (ب) ٤٣ (جـ) ٦٥ (د) ٩٦

(١٥) فى المتتابعة الحسابية (١٢ ، ١٤ ، ١٦ ، ...) فإن رتبة الحد الذى قيمته ١٠٢ هو ....

(أ) $ح_{٢٦}$ (ب) $ح_{٤٨}$ (جـ) $ح_{٤٦}$ (د) $ح_{٤٥}$

(١٦) رتبة الحد الذى قيمته صفر فى المتتابعة الحسابية (٢٢ ، ٢٠ ، ١٨ ، ...) هى ....

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٤

(١٧) قيمة $ح_{١٠}$ من النهاية فى المتتابعة الحسابية (١٩ ، ١٥ ، ١١ ، ... ، −٦١) تساوى ....

(أ) −٨ (ب) −٥ (جـ) −١ (د) −٣٧

(١٨) قيمة الحد العاشر من النهاية فى المتتابعة الحسابية (١٧ ، ١٩ ، ٢١ ، ... ، ٤٧) يساوى ....

(أ) ٢٩ (ب) ٣١ (جـ) ٢٥ (د) ٢٧

(١٩) متتابعة حسابية عدد حدودها ٢٠ فإن الحد الرابع من النهاية هو الحد .... من البداية.

(أ) ١٥ (ب) ١٦ (جـ) ١٧ (د) ١٨

(٢٠) رتبة أول حد قيمته أصغر من −١٨٠ فى المتتابعة الحسابية (٦٤ ، ٦١ ، ٥٨ ، ...) هى ....

(أ) ٨١ (ب) ٨٢ (جـ) ٨٣ (د) ٨٤

(٢١) قيمة أول حد قيمته أكبر من ١٠٠٠ فى حدود المتتابعة الحسابية (٢ ، ٩ ، ١٦ ، ...) هى ....

(أ) ١٠٠٣ (ب) ١٠٠٤ (جـ) ١٠٠٥ (د) ١٠٠٦

(٢٢) رتبة أول حد موجب فى المتتابعة الحسابية (−٤٨ ، −٤٥ ، −٤٢ ، ...) هو ....

(أ) $ح_{١٦}$ (ب) $ح_{١٧}$ (جـ) $ح_{١٨}$ (د) $ح_{١٩}$

(٢٣) رتبة آخر حد سالب فى المتتابعة الحسابية (−٦٢ ، −٥٧ ، −٥٢ ، ...) هو ....

(أ) $ح_{١٢}$ (ب) $ح_{١٣}$ (جـ) $ح_{١٤}$ (د) $ح_{١١}$

(٢٤) رتبة آخر حد موجب فى المتتابعة (٢٨ ، ٢٥ ، ٢٢ ، ...) هى ....

(أ) $ح_{٩}$ (ب) $ح_{١٠}$ (جـ) $ح_{١١}$ (د) $ح_{١٢}$

(٢٥) أول حد سالب من حدود المتتابعة الحسابية (٣٤١ ، ٣٣٤ ، ٣٢٧ ، ...) يساوى ....

(أ) −٤ (ب) −٣ (جـ) −٢ (د) −١

(٢٦) إذا كان $ح_{ن}$ = (٢ ، ٥ ، ٨ ، ... ، ل) هى متتابعة حسابية وكان الحد السابع عشر من البداية هو نفسه الحد السابع عشر من النهاية فإن : ل = ...

(أ) ٩٨ (ب) ٩٦ (جـ) ١١ (د) ٩٥

(٢٧) إذا كانت ($ح_{ن}$) متتابعة حسابية فيها $ح_{٣} - ح_{٥} = ٦$ ، $ح_{٤} = ١٦$ فإن قيمة أول حد سالب فى المتتابعة تساوى ....

(أ) −٤ (ب) −٣ (جـ) −٢ (د) −١

(٢٨) رتبة أول حد قيمته تزيد عن ١٠٠ فى المتتابعة ($ح_{ن}$) = (٢ + ٥ ن) هى ....

(أ) ١٩ (ب) ٢٠ (جـ) ٢١ (د) ٢٢

(٢٩) المتتابعة الحسابية التى حدها الأول = ٤ وحدها الخامس = ٢٠ هى ....

(أ) (٤ ، ٨ ، ١٢ ، ...) (ب) (٤ ، ٦ ، ٨ ، ...)

(جـ) (٤ ، ٢٠ ، ٣٦ ، ...) (د) (٤ ، ٢٤ ، ٤٤ ، ...)

(٣٠) متتابعة حسابية حدها الأول = ٥ ، $ح_{ن+١} = ح_{ن} + ٣$ فإن حدها الخامس = ...

(أ) ١٢ (ب) ٢٠ (جـ) ١٧ (د) ١٩

(٣١) إذا كان الحد الثالث من متتابعة حسابية = ١٢ وحدها السابع = ٢٤ فإن حدها العاشر = ...

(أ) ٣٦ (ب) ٣٩ (جـ) ٣٠ (د) ٣٣

(٣٢) إذا كان $ح_{٢}$ من متتابعة حسابية هو ١٢٩ ، $ح_{٥}$ منها هو ١٤١ فإن رتبة الحد الذى قيمته ١٦١ هى ....

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (د) ١٢

(٣٣) متتابعة حسابية حدها السادس = ٣٤ ، مجموع حديها السابع والتاسع يساوى ٨٨ ، فإن رتبة أول حد قيمته أكبر من ١٠٥ فى هذه المتتابعة هى ....

(أ) ١٤ (ب) ١٦ (جـ) ١٨ (د) ٢١

٣٤ إذا كانت $(ح_ن)$ متتابعة حسابية فيها $ح_{١٣} + ح_{١٨} = ٦٨$ فإن : $ح_{١٤} + ح_{١٧} =$ ....

(أ) ٦٨ (ب) ١٣٦ (جـ) ٣٤ (د) ٢٠٤

٣٥ من المتتابعة الحسابية (٢ أ + ٥ ب ، ٣ أ + ٨ ب ، ٤ أ + ١١ ب ، ...) نجد أن $ح_{١٠} =$ ....

(أ) أ + ٩ ب (ب) ١٠ أ + ٣٠ ب (جـ) ١١ أ + ٣٢ ب (د) ١٢ أ + ٣٥ ب

٣٦ إذا كان : $(ح_ن)$ متتابعة حسابية فيها $\frac{ح_٤}{ح_٧} = \frac{٢}{٣}$ فإن : $\frac{ح_٦}{ح_٨} =$ ....

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٦}{٧}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

٣٧ فى أى متتابعة حسابية $(ح_ن)$ يكون $\frac{ح_{٤٥} + ح_{٥١}}{ح_{٤٨}} =$ ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

٣٨ متتابعة حسابية فيها $ح_ن = م$ ، $ح_م = ن$ فإن أساس المتتابعة (ء) = ... حيث $م \neq ن$

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) −١ (د) −٢

٣٩ فى متتابعة حسابية إذا كان : $ح_{١٧} = ٧٣$ ، $ح_{٧٣} = ١٧$

فإن رتبة الحد الذى قيمته صفر هى ....

(أ) ٥٦ (ب) ٨٩ (جـ) ٩٠ (د) ٩١

٤٠ إذا كان : $(ح_ن)$ متتابعة حسابية أساسها (ء) فإن : ء = ...

(أ) $ح_م - ح_ر$ (ب) $\frac{ح_م - ح_ر}{م - ر}$ (جـ) $\frac{ح_م}{ح_ر}$ (د) $ح_{م-ر}$

٤١ إذا كان : $ح_{٢ن-٢}$ من المتتابعة (١٣ ، $١٤\frac{١}{٤}$ ، $١٥\frac{١}{٢}$ ، ...) يساوى $ح_{٢ن+١}$ من المتتابعة ($١٩\frac{١}{٢}$ ، ٢٠ ، ٢٢ ، ...) فإن : ن = ...

(أ) ١٥ (ب) ١٤ (جـ) ١٣ (د) ١٢

٤٢ عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام وتقبل القسمة على ٩ هو ....

(أ) ٩٠ (ب) ٩٨ (جـ) ٩٩ (د) ١٠٠

٤٣ إذا كانت قياسات زوايا شكل خماسى تكون متتابعة حسابية أساسها °١٠

فإن قياس أكبر زاوية فى الخماسى تساوى ....

(أ) °٨٨ (ب) °١٠٨ (جـ) °١١٨ (د) °١٢٨

٤٤ إذا كان : أ ، ب ، حـ فى تتابع حسابى فإن : $\frac{(أ - حـ)^٢}{(ب^٢ - أ حـ)} =$ ....

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

٤٥ الحد المشترك العاشر بين المتتابعتين (٣ ، ٧ ، ١١ ، ...) ، (١ ، ٦ ، ١١ ، ...) يساوى ....

(أ) ١٩١ (ب) ١٩٣ (جـ) ٢١١ (د) ٢٣١

● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

(٤٦) متتابعة حسابية فيها $ح_م = ن^٢$ ، $ح_ن = م^٢$ ، حيث م ≠ ن فإن الأساس (ء) = ...

(أ) $م^٢ + ن^٢ - ٢$ (ب) م + ن (جـ) - م - ن (د) - م + ن

(٤٧) إذا كان ($ح_ن$) متتابعة حسابية فيها $م ح_م = ن ح_ن$ ، م ≠ ن فإن : $ح_{م+ن}$ = ...

(أ) صفر (ب) م + ن - ١

(جـ) ١ (د) م - ن

(٤٨) إذا كانت أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية فى تتابع حسابى فإن الأساس = ... طول وتر المثلث.

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{١}{٥}$

(٤٩) إذا كان أول حد فى متتابعة حسابية يساوى ٢ وكان ناتج قسمة الحد السابع على الحد الثالث يساوى ٢ وباقى القسمة ٨ فإن الحد الرابع عشر هو ....

(أ) ٧٦ (ب) ٦٧ (جـ) ٢٨ (د) ٥٤

تمارين على الأوساط الحسابية

(٥٠) الوسط الحسابى للعددين ٨ ، ١٢ هو ....

(أ) ٨ (ب) ١٢ (جـ) ٢٠ (د) ١٠

(٥١) إذا كان الوسط الحسابى للعددين : س ، ٢٦ هو ٢١ فإن : س = ...

(أ) ٢٦ (ب) ١٦ (جـ) ٤٢ (د) ٢١

(٥٢) إذا كان : س < ٠ ، وكان : (٧ س ، ٨ ، $س^٢ - ٢$) فى تتابع حسابى فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) -٩ (جـ) -٢ (د) -٧

(٥٣) الوسط الحسابى للعددين أ + ب ، أ - ب يساوى ....

(أ) أ (ب) ب (جـ) ٢ أ (د) ٢ ب

(٥٤) فى أى متتابعة حسابية ($ح_ن$) يكون $\frac{ح_{ن-١} + ح_{ن+١}}{ح_ن}$ = ...

(أ) $ح_{ن+٢}$ (ب) $ح_{٢ن}$ (جـ) صفر (د) ٢

(٥٥) فى أى متتابعة حسابية الوسط الخامس هو الحد ....

(أ) الخامس. (ب) الرابع. (جـ) العاشر. (د) السادس.

(٥٦) إذا كانت : (أ ، ٦ ، ب ، ...) فى تتابع حسابى ، فإن : ....

(أ) أ + ب < ٦ (ب) ٦ < أ + ب < ١٢ (جـ) أ + ب = ٦ (د) أ + ب = ١٢

(٥٧) فى أى متتابعة حسابية حدها الأول أ وأساسها ء فإن كل مما يأتى صحيح ما عدا ....

(أ) $ح_٣ + ح_٥ = ٢ ح_٤$ (ب) $ح_{١٠} + ح_{١٢} = ٢ ح_{١١}$

(جـ) $ح_٣ + ح_٧ + ح_{١٧} = ٣ ح_٩$ (د) $ح_٤ + ح_٦ = ح_{١٠}$

(٥٨) إذا كانت : أ ، ب وسطين حسابيين بين س ، ص فإن : $\frac{ص - س}{ب - أ}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

(٥٩) إذا كانت : ($أ^٢$ ، $ب^٢$ ، $حـ^٢$) فى تتابع حسابى فإن : $ب^٢$ = ...

(أ) $أ^٢ + حـ^٢$ (ب) ٢ ($أ^٢ + حـ^٢$) (جـ) $\frac{أ^٢ + حـ^٢}{٢}$ (د) $\sqrt{أ^٢ + حـ^٢}$

(٦٠) الوسط الحسابى بين العددين $(أ + ب)^٢$ ، $(أ - ب)^٢$ هو ....

(أ) ٢ أ (ب) أ + ب (جـ) $أ^٢ + ب^٢$ (د) $أ^٢ - ب^٢$

(٦١) مجموع الوسطين الحسابيين الأول والأخير بين العددين ٧ ، ٣١ يساوى ....

(أ) ١٩ (ب) ٣٨ (جـ) ٢٤ (د) ١٣

(٦٢) إذا كانت : (أ ، ب ، حـ ، ٢٠ ، ك ، هـ ، و) تكون متتابعة حسابية

فإن : أ + ب + حـ + ك + هـ + و = ...

(أ) ٦٠ (ب) ٨٠ (جـ) ١٠٠ (د) ١٢٠

(٦٣) عند إدخال ن وسطًا حسابيًا بين أ ، ب فإن أساس المتتابعة الحسابية هو ....

(أ) $\frac{أ - ب}{ن + ١}$ (ب) $\frac{أ - ب}{ن + ٢}$ (جـ) $\frac{ب - أ}{ن + ١}$ (د) $\frac{ب - أ}{ن + ٢}$

(٦٤) عند إدخال عدة أوساط حسابية بين أ ، ل يكون الوسط الأخير = ...

(حيث ى أساس المتتابعة الناتجة)

(أ) ل - ى (ب) ل (جـ) ل - ٢ ى (د) ل + ى

(٦٥) عند إدخال ١٠ أوساط حسابية بين ٥ ، ٣٨ فإن المتتابعة الناتجة هى ....

(أ) (٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ... ، ٣٨) (ب) (٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ... ، ٣٨)

(جـ) (٥ ، ٨ ، ١١ ، ... ، ٣٨) (د) (٥ ، ٩ ، ١٣ ، ... ، ٣٨)

(٦٦) إذا ادخلت ١٢ وسطًا حسابيًا بين -١٤ ، ٥١ فإن الوسط السابع = ...

(أ) ٢١ (ب) ١٦ (جـ) ٢٦ (د) ٣١

(٦٧) إذا ادخلت عدة أوساط حسابية بين -٦٥ ، -١٢٥ فكان الوسط الثانى عشر = -١١٣

فإن عدد الأوساط = ...

(أ) ١٢ (ب) ١٣ (جـ) ١٤ (د) ١٥

(٦٨) ادخلت عدة أوساط حسابية بين ٨ ، ٦٢ فكان مجموع الوسطين الثانى والسادس = ٤٠

فإن عدد الأوساط = ...

(أ) ١٥ (ب) ١٦ (جـ) ١٧ (د) ١٨

(٦٩) عددان الفرق بينهما ٥ ووسطهما الحسابى ٦,٥ فإن العددين هما ....

(أ) ٥ ، ١٠ (ب) -١ ، ٤ (جـ) ٢ ، ٧ (د) ٩ ، ٤

(٧٠) عددان يزيد أحدهما عن ضعف الآخر بمقدار ٢ وكان وسطهما الحسابى ١٤,٥

فإن العددين هما ....

(أ) ٦ ، ١٤ (ب) ١١ ، ١٨ (جـ) ٩ ، ٢٠ (د) ١٠ ، ٢٢

(٧١) عددان النسبة بينهما ٣ : ١٠ ووسطهما الحسابى ١٣ فإن العددين ....

(أ) ٣ ، ١٠ (ب) ٩ ، ١٥ (جـ) ٩ ، ٣٠ (د) ٦ ، ٢٠

(٧٢) إذا كان الوسط الحسابى بين أ ، ب هو ٨ والوسط الحسابى بين ٤ أ ، ٢ ب هو ٢٠

فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (٤ ، ١٢) (ب) (٦ ، ١٠) (جـ) (٥ ، ١١) (د) (٨ ، ٨)

(٧٣) عددان وسطهما الحسابى ٢٣ وحاصل ضربهما ٤٩٣ فإن العددان هما ....

(أ) ١٥ ، ٣١ (ب) ٢٠ ، ٢٦ (جـ) ١٦ ، ٣٠ (د) ٢٩ ، ١٧

(٧٤) إذا كان : أ ، ب وسطين حسابيين بين س ، ص فإن : $\frac{ص^2 - س^2}{ب^2 - أ^2}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٧٥) إذا كانت : $(ح_ن)$ متتابعة حسابية حيث : $ح_ن = ٣ن + ٢$

فإن الوسط الحسابى بين $ح_٥$ ، $ح_{١١}$ يساوى ....

(أ) ٨ (ب) ١٦ (جـ) ٢٢ (د) ٢٦

(٧٦) إذا كانت (١ ، س ، ص) فى تتابع حسابى وكان : $ص^2 = س$ ، س ≠ ص ≠ ١

فإن : ص = ...

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $-\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{-١}{٢}$

(٧٧) إذا كانت : (س ، ٤ س + ١ ، س + ٢ ص ، ٣ ص + ٢) فى تتابع حسابى

فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) −٧ (د) ٧

(٧٨) إذا كان (أ ، ب ، جـ ، د ، ...) متتابعة حسابية وكان : ب = ٨ فإن الوسط الحسابى للأعداد أ ، ب ، جـ يساوى ....

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٢٤

(٧٩) $(ح_ن)$ متتابعة حسابية فيها $ح_٥ = س$ فإن : $\sum_{ر=٢}^{٨} ح_ر$ = ...

(أ) س (ب) ٧ س (جـ) $\frac{س}{٧}$ (د) س + ٧

ثانيًا الأسئلة المقالية

تمارين على المتتابعة الحسابية

١ بين أى المتتابعات الآتية تكون متتابعة حسابية وأوجد الحد العام للمتتابعة الحسابية :

(١) (٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ٢١ ، ...)

(٢) (٤ ، ٧ ، ١٢ ، ١٩ ، ...)

(٣) (−١٢ ، −١٨ ، −٢٤ ، −٣٠ ، −٣٦)

(٤) ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، ...)

(٥) (س ، س + ص ، س + ٢ ص ، ...)

(٦) (٧ ، ٧ ، ٧ ، ٧ ، ٧)

٢ **بين أى المتتابعات الآتية حسابية واذكر أساسها واكتب الحدود الثلاثة الأولى من كل متتابعة حسابية :**

① $(ح_ن) = (٥ن + ٢)$ ② $(ح_ن) = \left(\frac{٤ - ٥ن}{٢}\right)$

③ $(ح_ن) = (٣ \times ٧^{ن+١})$ ④ $(ح_ن) = \left(\frac{ن^٢ - ٢٥}{ن + ٥}\right)$

٣ فى المتتابعة الحسابية (٦٣ ، ٥٩ ، ٥٥ ، ... ، −١٣٣) **أوجد :**

① قيمة الحد السابع. ② عدد حدود المتتابعة. «٣٩ ، ٥٠»

٤ أوجد رتبة وقيمة أول حد سالب فى المتتابعة الحسابية (٣٥ ، ٣١ ، ٢٧ ، ...) «١٠ ، −١»

٥ أوجد رتبة وقيمة أول حد موجب فى المتتابعة الحسابية (−٥١ ، −٤٨ ، −٤٥ ، ...) «١٩ ، ٣»

٦ أوجد رتبة وقيمة آخر حد سالب فى المتتابعة الحسابية (−٣٩ ، −٣٤ ، −٢٩ ، ...) «٨ ، −٤»

٧ أوجد عدد الحدود السالبة فى المتتابعة الحسابية (−٤٧ ، −٤٢ ، −٣٧ ، ...) «١٠»

٨ أوجد عدد الحدود الموجبة فى المتتابعة الحسابية (٧٢ ، ٦٣ ، ٥٤ ، ...) «٨»

٩ أثبت أنه لا يوجد حد قيمته ١٠٠ فى المتتابعة الحسابية (١٣ ، ١٧ ، ٢١ ، ...)

١٠ إذا كانت (لو س ، لو ص ، لو ع ، ...) متتابعة حسابية **فأثبت أن :**

$ص^٢ = س ع$ (حيث س ، ص ، ع كميات موجبة).

١١ إذا كانت المتتابعة (١٢ ، س ، ... ، ص ، −٢٤) متتابعة حسابية وكان حدها الأخير ثلاثة أمثال حدها السادس **فأوجد** قيمة كل من : س ، ص وعدد حدود هذه المتتابعة. «٨ ، −٢٠ ، ١٠»

تمارين على تعيين المتتابعة الحسابية

١٢ أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها الثامن ١١ ، وحدها العاشر هو المعكوس الجمعى لحدها السابع عشر. «(٢٥ ، ٢٣ ، ٢١ ، ...)»

١٣ متتابعة حسابية حدها الرابع = ١١، مجموع حديها الخامس والتاسع يساوى ٤٠
أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة الحد الذى قيمته ١٥٢ فى هذه المتتابعة. «(٢ ، ٥ ، ٨ ، ...) ، ٥١»

١٤ أوجد المتتابعة الحسابية التى مجموع حديها الثانى والرابع يساوى ٤ ومجموع حدودها السادس والسابع والثامن يساوى ٥٤ «(−٦ ، −٢ ، ٢ ، ...)»

١٥ $(ح_ن)$ متتابعة حسابية فيها $ح_٥ = ٢$ ، $ح_٧ = ٨$ أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة وقيمة أول حد فيها تزيد قيمته عن ١٤٣ «(−١٠ ، −٧ ، −٤ ، ...) ، $ح_{٥٣}$ ، ١٤٦»

١٦ ($ح_ن$) متتابعة حسابية فيها: $ح_١ - ح_٦ = ٢٥$ ، $ح_٧ + ح_٨ = ٩٥$ أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة وقيمة أول حد سالب فيها. «(٨٠ ، ٧٥ ، ٧٠ ، ...) ، $ح_{١٨}$ ، -٥»

---

١٧ أوجد المتتابعة الحسابية التى مجموع حديها الخامس والعاشر يساوى ٢٢ ، حدها الثامن يساوى ثلاثة أمثال حدها الرابع. «(-٢ ، ٠ ، ٢ ، ...)»

---

١٨ أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها السادس = ٢٠ ، النسبة بين حديها الرابع والعاشر كنسبة ٤ : ٧ «(١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ...)»

---

١٩ أوجد المتتابعة الحسابية التى مجموع حديها الثانى والخامس ٤ وحاصل ضرب حديها الثالث والسادس ٧ وبين أن هناك متتابعتين. «(-١ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{٧}{٥}$ ، ...) أو (-٣ ، -١ ، ١ ، ...)»

---

٢٠ ($ح_ن$) متتابعة حسابية فيها : $ح_٢ + ح_٤ = ٤٢$ ، $ح_٣ \times ح_٥ = ٣١٥$ أوجد هذه المتتابعة. «(٢٧ ، ٢٤ ، ٢١ ، ...)»

---

٢١ متتابعة حسابية تزايدية مجموع حديها الثانى والثالث يساوى ١٥ ومربع حدها الخامس يساوى ٢٢٥ أوجد المتتابعة. «(٣ ، ٦ ، ٩ ، ...)»

---

٢٢ متتابعة حسابية حدودها موجبة حاصل ضرب حديها الأول والرابع يساوى ٤٥ وحاصل ضرب الحدين الثالث والعاشر يزيد عن حاصل ضرب الحدين الرابع والسابع بمقدار ٢٤ أوجد المتتابعة. «(٣ ، ٧ ، ١١ ، ...)»

---

٢٣ متتابعة حسابية عدد حدودها ٢١ حدًا وحدها الأوسط يساوى ٣٢ ومجموع حدودها الثلاثة الأخيرة يساوى ١٧٧ أوجد المتتابعة. «(٢ ، ٥ ، ٨ ، ...)»

---

٢٤ أوجد المتتابعة الحسابية التى مجموع حديها الثانى والثالث -٧ ومجموع مربعيهما ٢٩ «(-٨ ، -٥ ، -٢ ، ...) أو (١ ، -٢ ، -٥ ، ...)»

---

٢٥ أربعة أعداد تكون متتابعة حسابية مجموعها ٣٦ ومجموع مربعاتها ٣٤٤ أوجد هذه الأعداد. «٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢»

---

٢٦ إذا كان مجموع ثلاثة أعداد تكون متتابعة حسابية هو ٣٣ وحاصل ضربها ٧٩٢ فما هى الأعداد ؟ «٤ ، ١١ ، ١٨»

---

٢٧ أوجد عدد الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١١٠ ، ٤٥٠ والتى كل منها يقبل القسمة على ١١ «٣٠»

---

٢٨ متتابعة حسابية حدها الأول = ٣ ، $ح_ن = ٣٩$ ، $ح_{٢ن} = ٧٩$ فما قيمة $ن$؟ ثم أوجد المتتابعة. «١٠ ، (٣ ، ٧ ، ١١ ، ...)»

---

٢٩ متتابعة حسابية منتهية حدها الأول ٧ وكان $ح_{١١}$ من البداية يساوى ٤٧ ، $ح_{١١}$ من النهاية يساوى ٣٩٥ أوجد ($ح_ن$) «(٧ ، ١١ ، ١٥ ، ... ، ٤٣٥)»

٣٠ متتابعة حسابية حدها الأول ٨ ، $ح_{٢ن} = ٣ ح_ن$ أوجد المتتابعة. «(٨ ، ١٦ ، ٢٤ ، ...)»

٣١ أربعة أعداد فى تتابع حسابى مجموعهم ٤٤ وإذا أضفنا ٣ إلى العدد الثانى كونت الأعداد الأول والثانى والرابع متتابعة حسابية. أوجد الأعداد الأربعة. «٢ ، ٨ ، ١٤ ، ٢٠»

٣٢ إذا كونت (س ، ص ، ع) متتابعة حسابية

فأثبت أن : (٣ س + ١ ، ٣ ص + ١ ، ٣ ع + ١) تكون متتابعة حسابية أيضًا.

تمارين على الأوساط الحسابية

٣٣ إذا كان الوسط الحسابى بين عددين هو ١١ ، الوسط الحسابى بين مربعيهما هو ١٢٥ فما هما العددان ؟ «٩ ، ١٣»

٣٤ أدخل ١٦ وسطًا حسابيًا بين ٢٧ ، –٢٤ «(٢٤ ، ٢١ ، ... ، –٢١)»

٣٥ أدخل ٨ أوساط حسابية بين لو ٢ ، لو ١٠٢٤ «(٢ لو ٢ ، ٣ لو ٢ ، ... ، ٩ لو ٢)»

٣٦ إذا أدخلت عدة أوساط حسابية بين ١ ، ١٧ وكان الوسط السابع يساوى ثلاثة أمثال الوسط الثانى. أوجد عدد هذه الأوساط. «٧»

٣٧ متتابعة حسابية حدها التاسع يساوى ٢٥ ، الوسط الحسابى بين حديها الثالث والخامس هو ١٠ أوجد هذه المتتابعة. «(١ ، ٤ ، ٧ ، ...)»

٣٨ أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها الوسط الحسابى بين حديها الثالث والسابع هو ١٩ ، حدها العاشر يزيد عن ضعف حدها الرابع بمقدار ٢ «(٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ...)»

٣٩ إذا كان مجموع الوسطين الثانى والرابع من متتابعة حسابية يساوى ١٢ ، والوسط السابع يزيد عن الوسط الثالث بمقدار ٤ فما هى المتتابعة ؟ «(٣ ، ٤ ، ٥ ، ...)»

٤٠ إذا أدخلنا عدة أوساط حسابية بين ٢ ، ٤٧ و كانت النسبة بين الوسط الثانى والوسط الأخير كنسبة ٢ : ١١ أوجد عدد الأوساط. «١٤»

٤١ إذا أدخلنا عدة أوساط حسابية بين ٢٠ ، ١٧٠ وكان مجموع الوسطين الخامس عشر والعشرين خمسة أمثال الوسط الخامس فما عدد هذه الأوساط ؟ «٢٤»

٤٢ إذا أدخلنا عدة أوساط حسابية بين ٦ ، ٣٦ وكانت نسبة مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الأخيرين كنسبة ١ : ٣ فما عدد هذه الأوساط ؟ «٩»

43 **تفكير إبداعى :** إذا كان ل ، م وسطين حسابيين بين س ، ص حيث : ل > م

فأثبت أن : ل − م = $\frac{1}{3}$ (س − ص)

44 إذا كان : أ ، ب ، حـ فى تتابع حسابى برهن أن : $\frac{1}{ب حـ}$ ، $\frac{1}{أ حـ}$ ، $\frac{1}{أ ب}$ فى تتابع حسابى أيضًا.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

1 **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(1) إذا كان الحد الأخير من متتابعة حسابية عشرة أمثال حدها الأول وحدها قبل الأخير يساوى مجموع حديها الرابع والخامس فإن : $\frac{ع_6}{ع_3}$ = ...

(أ) 3ء (ب) 2 (جـ) 2ء (د) $\frac{5}{2}$

(2) إذا كان : $ء_1$ هو أساس المتتابعة الحسابية (أ ، $س_1$ ، $س_2$ ، ... ، $س_5$ ، ب)

وكان : $ء_2$ هو أساس المتتابعة الحسابية (أ ، $ص_1$ ، $ص_2$ ، ... ، $ص_7$ ، ب)

فإن : $\frac{ء_1}{ء_2}$ = ...

(أ) $\frac{3}{2}$ (ب) $\frac{5}{7}$ (جـ) $\frac{4}{3}$ (د) $\frac{7}{5}$

(3) إذا كان : س ، ص ، ع ثلاثة حدود متتالية فى متتابعة حسابية

فإن : (س + 2 ص − ع) (2 ص + ع − س) (ع + س − ص) = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ س ص ع (ب) س ص ع (جـ) 2 س ص ع (د) 4 س ص ع

(4) إذا كان حجم متوازى المستطيلات يساوى 105 سم^3 وأبعاده الثلاثة فى تتابع حسابى ومجموع أبعاده يساوى 15 سم فإن أكبر أبعاد المتوازى يساوى .... سم.

(أ) 5 (ب) 6 (جـ) 7 (د) 8

(5) إذا كان : (أ ، ب ، حـ ، ك ، هـ) متتابعة حسابية فإن : أ − 4 ب + 6 حـ − 4 ك + هـ = ...

(أ) ب + حـ (ب) ك − ب (جـ) صفر (د) 3

(6) إذا كانت : ($\frac{1}{ب + حـ}$ ، $\frac{1}{حـ + أ}$ ، $\frac{1}{أ + ب}$) متتابعة حسابية فإن أى مما يأتى فى تتابع حسابى أيضًا ؟

(أ) $ب^2$ ، $حـ^2$ ، $أ^2$ (ب) $أ^2$ ، $ب^2$ ، $حـ^2$

(جـ) $حـ^2$ ، $أ^2$ ، $ب^2$ (د) $ب^2$ ، $أ^2$ ، $حـ^2$

(7) متتابعة حسابية حدودها أعداد صحيحة وأساسها 2 < ء < 7 إذا كان أحد حدودها يساوى 115 ، وحد آخر فيها يساوى 166 فإن أساسها = ...

(أ) 3 (ب) 4 (جـ) 5 (د) 6

(٨) إذا كان : $لو_٣ ٢$ ، $لو_٣ (٢^{س} - ٥)$ ، $لو_٣ (٢^{س} - \frac{٧}{٢})$ فى تتابع حسابى فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٩) إذا كان : $\frac{أ^{ن+٢} + ب^{ن+٢}}{أ^{ن+١} + ب^{ن+١}}$ وسطًا حسابيًا بين أ ، ب فإن : ن = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) −٢ (د) صفر

(١٠) عدد الحدود المشتركة فى المتتابعتين الحسابيتين :

(٣ ، ٧ ، ١١ ، ... ، ٤٠٧) ، (٢ ، ٩ ، ١٦ ، ... ، ٧٠٩) يساوى ....

(أ) ١٤ (ب) ٢١ (جـ) ٢٨ (د) ٣٥

---

٢ ($ح_ن$) متتابعة حسابية حيث $ح_ن \neq$ صفر **أثبت أن :**

(١) $\frac{١}{ح_١ ح_٢} + \frac{١}{ح_٢ ح_٣} + \cdots + \frac{١}{ح_{ن-١} ح_ن} = \frac{ن-١}{ح_١ ح_ن}$

(٢) $\frac{١}{\sqrt{ح_١} + \sqrt{ح_٢}} + \frac{١}{\sqrt{ح_٢} + \sqrt{ح_٣}} + \cdots + \frac{١}{\sqrt{ح_{ن-١}} + \sqrt{ح_ن}} = \frac{ن-١}{\sqrt{ح_١} + \sqrt{ح_ن}}$

تطبيقات على المتتابعة الحسابية

١ **الربط بالفيزياء :** بدأ كريم فى قيادة دراجته البخارية من أعلى نقطة فى منحدر فقطع فى الثانية الأولى ١٠٠ سم وفى كل ثانية تالية بعد ذلك كان يقطع مسافة تزيد عن المسافة السابقة لها مباشرة بمقدار ١٢٠ سم أوجد المسافة التى يقطعها فى الثانية العاشرة. «١١٨٠ سم»

---

٢ **الربط بالصحة :** يتناول مريض نوعًا من الدواء ، وقد نصحه الطبيب أن يُقلِّل عدد حبات هذا الدواء بمعدل ٣ حبات كل أسبوع عن الأسبوع الذى يسبقه مباشرة ، فإذا بدأ المريض بتناول ٢١ حبة من الدواء فى الأسبوع الأول ، بعد كم أسبوعًا سوف يتوقف المريض تمامًا عن استخدام هذا الدواء ؟

---

٣ **الربط بالهندسة :** أوجد قياس كل من زوايا المثلث الذى قياس إحدى زواياه هو الوسط الحسابى بين قياسى الزاويتين الأخريين والفرق بين قياسى الزاويتين الصغرى والكبرى يساوى ٨٠° «٢٠° ، ٦٠° ، ١٠٠°»

---

٤ **الربط بالهندسة :** أوجد النسبة بين أطوال أضلاع Δ أ ب حـ القائم الزاوية فى ب والذى فيه أ هو الوسط الحسابى بين ب ، حـ «٤ : ٥ : ٣»

الدرس **4**

المتسلسلات الحسابية

المتسلسلة الحسابية

* هى المتسلسلة الناتجة من عملية جمع حدود متتابعة حسابية.

أى أنه : لأى متتابعة حسابية (أ ، أ + ء ، أ + ٢ ء ، أ + ٣ ء ، ...)

حدها الأول = أ وأساسها = ء وحدها العام (النونى) $ح_{ن}$ = أ + (ن − ١) ء

تسمى المتسلسلة أ + (أ + ء) + (أ + ٢ ء) + (أ + ٣ ء) + ... متسلسلة حسابية ويكون مجموع ن حدًا من حدود المتتابعة الحسابية = $\sum_{ر=١}^{ن}$ (أ + (ر − ١) ء)

مثال ١

أوجد قيمة : ١ + ٥ + ٩ + ١٣ + ... + ٣٧

الحل

∵ (١ ، ٥ ، ٩ ، ١٣ ، ... ، ٣٧) هى متتابعة حسابية حدها الأول أ = ١
وأساسها ء = ٤

، ∵ الحد العام للمتتابعة $ح_{ن}$ = أ + (ن − ١) ء = ١ + (ن − ١) × ٤
= ١ + ٤ ن − ٤ = ٤ ن − ٣

نوجد عدد الحدود بوضع $ح_{ن}$ = ٣٧ ∴ ٤ ن − ٣ = ٣٧

∴ ن = ١٠ ∴ عدد حدود المتتابعة = ١٠ حدود

∴ ١ + ٥ + ٩ + ١٣ + ... + ٣٧ = $\sum_{ر=١}^{١٠}$ (٤ ر − ٣) = $\sum_{ر=١}^{١٠}$ ٤ ر − $\sum_{ر=١}^{١٠}$ ٣

= ٤ × $\frac{١٠ \times (١٠ + ١)}{٢}$ − ٣ × ١٠ = ٢٢٠ − ٣٠ = ١٩٠

مثال ٢

أوجد مجموع ١٠ حدود متتالية من المتتابعة $(ح_ن) = (٣ن + ٢)$ بدءًا من حدها الخامس.

الحل

∵ الحد النونى للمتتابعة $ح_ن = ٣ن + ٢$ مقدار جبرى من الدرجة الأولى فى ن

∴ المتتابعة حسابية وأساسها ء = ٣ ، حدها الأول $ح_١ = ٣ (١) + ٢ = ٥$

∴ مجموع ١٠ حدود بدءًا من حدها الخامس = $ح_٥ + ح_٦ + ح_٧ + ... + ح_{١٤}$

$$= \sum_{ر=٥}^{١٤} (٣ر + ٢) = \sum_{ر=١}^{١٤} (٣ر + ٢) - \sum_{ر=١}^{٤} (٣ر + ٢)$$

$$= \left(\sum_{ر=١}^{١٤} ٣ر + \sum_{ر=١}^{١٤} ٢ \right) - \left(\sum_{ر=١}^{٤} ٣ر + \sum_{ر=١}^{٤} ٢ \right)$$

$$= \left(٣ \times \frac{١٤ \times ١٥}{٢} + ٢ \times ١٤\right) - \left(٣ \times \frac{٤ \times ٥}{٢} + ٢ \times ٤\right)$$

$$= (٣١٥ + ٢٨) - (٣٠ + ٨) = ٣٠٥$$

مجموع المتتابعة الحسابية

١ مجموع المتتابعة الحسابية بمعلومية حدها الأول (أ) وحدها الأخير (ل)

مجموع متتابعة حسابية حدها الأول أ وحدها الأخير ل وعدد حدودها ن هو $حـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$

استنتاج القانون

نفرض أن المتتابعة هى : (أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، ... ، ل − ٢ء ، ل − ء ، ل)

∴ $حـ_ن = أ + (أ + ء) + (أ + ٢ء) + ... + (ل − ٢ء) + (ل − ء) + ل$ (١)

وبكتابة الطرف الأيسر فى المعادلة (١) معكوسًا

∴ $حـ_ن = ل + (ل − ء) + (ل − ٢ء) + ... + (أ + ٢ء) + (أ + ء) + أ$ (٢)

وبجمع (١) ، (٢) :

∴ $٢ حـ_ن = (أ + ل) + (أ + ل) + (أ + ل) + ... + (أ + ل) + (أ + ل) + (أ + ل) = ن (أ + ل)$

∴ $حـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$

٢ مجموع ن حدًا الأولى من متتابعة حسابية بمعلومية حدها الأول (أ) وأساسها (ء)

مجموع ن حدًا الأولى من متتابعة حسابية حدها الأول أ ، أساسها ء هو : $حـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن − ١)ء]$

استنتاج القانون

$\because$ ل = أ + (ن − ١) ء (١) ، $ح_ن = \frac{ن}{٢}$ (أ + ل) (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) :

$\therefore$ $ح_ن = \frac{ن}{٢}$ [أ + أ + (ن − ١) ء] $\therefore$ $ح_ن = \frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن − ١) ء]

ملاحظة

يمكن استنتاج القانون $ح_ن = \frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن − ١) ء] باستخدام الرمز $\sum$ كما يلى :

$\because$ الحد العام (النونى) للمتتابعة الحسابية $ح_ن$ = أ + (ن − ١) ء

$\therefore$ مجموع ن حدًا الأولى منها $ح_ن = \sum_{ر=١}^{ن}$ (أ + (ر − ١) ء) $= \sum_{ر=١}^{ن}$ (أ + ء ر − ء)

$= \sum_{ر=١}^{ن}$ ((أ − ء) + ء ر) $= \sum_{ر=١}^{ن}$ (أ − ء) + ء $\sum_{ر=١}^{ن}$ ر

= (أ − ء) ن + ء × $\frac{ن(ن + ١)}{٢}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ (أ − ء) + ء (ن + ١)]

= $\frac{ن}{٢}$ [٢ أ − ٢ ء + ء ن + ء] = $\frac{ن}{٢}$ [٢ أ + ء ن − ء]

= $\frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن − ١) ء]

مثال ٣

أوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية التى حدها الأول ٣ وحدها الأخير ٢١ وعدد حدودها ١٠

الحـــل

أ = ٣ ، ل = ٢١ ، ن = ١٠ $\because$ $ح_ن = \frac{ن}{٢}$ (أ + ل)

$\therefore$ $ح_{١٠} = \frac{١٠}{٢}$ (٣ + ٢١) = ٥ × ٢٤ = ١٢٠

مثال ٤

فى المتسلسلة الحسابية : (٢٤ + ٢١ + ١٨ + ...) أوجد مجموع ٨ حدود الأولى منها.

الحـــل

أ = ٢٤ ، ء = ٢١ − ٢٤ = −٣ ، ن = ٨

$\because$ $ح_ن = \frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن − ١) ء]

$\therefore$ $ح_٨ = \frac{٨}{٢}$ [٢ × ٢٤ + ٧ × −٣] = ٤ [٤٨ − ٢١] = ٤ × ٢٧ = ١٠٨

ملاحظـات

١ لإيجاد المجموع $ح_ن$ يلزم معرفة عدد الحدود $ن$ وإن لم تكن معلومة نوجدها من القانون ل = أ + ($ن$ − ١) ء

٢ لإيجاد المجموع ابتداءً من حد معين نوجد قيمة هذا الحد ونعوض عنه بدلاً من أ فى القانون.

٣ $ح_{١٠} - ح_{٩} = ع_{١٠}$ ، $ح_{١٣} - ح_{١٢} = ع_{١٣}$ ، ... وهكذا

أى أن : $ح_ن - ح_{ن-١} = ع_ن$ لكل $ن > ١$

٤ عدد الحدود التى تجعل المجموع أكبر ما يمكن = عدد الحدود (الموجبة أو غير سالبة).

٥ عدد الحدود التى تجعل المجموع أصغر ما يمكن = عدد الحدود (السالبة أو غير موجبة).

٦ لإيجاد عدد الحدود التى تجعل المجموع موجبًا نضع $\boxed{ح_ن > ٠}$

٧ لإيجاد عدد الحدود التى تجعل المجموع سالبًا نضع $\boxed{ح_ن < ٠}$

٨ مجموع عدد ($ن$) حدًا من متتابعة حسابية هو دالة من الدرجة الثانية فى $ن$

مثال ٥

أوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية (١٣ ، ٢٢ ، ٣١ ، ... ، ١٣٩)

الحـــل

أ = ١٣ ، ء = ٢٢ − ١٣ = ٩ ، ل = ١٣٩

نوجد عدد الحدود ∵ ل = أ + ($ن$ − ١) ء ∴ ١٣٩ = ١٣ + ($ن$ − ١) × ٩

∴ ١٢٦ = ٩ ($ن$ − ١) ∴ $ن$ − ١ = ١٤ ∴ $ن$ = ١٥

∵ $ح_ن = \frac{ن}{٢}$ (أ + ل) ∴ $ح_{١٥} = \frac{١٥}{٢}$ (١٣ + ١٣٩) = ١١٤٠

مثال ٦

أوجد مجموع الخمسة عشر حدًا الأولى من المتتابعة ($ع_ن$) = (٥ $ن$ − ٣)

الحـــل

∵ $ع_ن$ = ٥ $ن$ − ٣ مقدار من الدرجة الأولى فى $ن$ ∴ المتتابعة حسابية وأساسها = ٥

∴ أ = $ع_١$ = ٥ × ١ − ٣ = ٢ ، ء = ٥ ، $ن$ = ١٥

∵ $ح_ن = \frac{ن}{٢}$ [٢ أ + ($ن$ − ١) ء]

∴ $ح_{١٥} = \frac{١٥}{٢}$ [٢ × ٢ + ١٤ × ٥] = ٥٥٥

مثال ٧

أوجد مجموع عشرة حدود من المتتابعة الحسابية (٣ ، ٧ ، ١١ ، ...) ابتداء من الحد الثامن.

الحـــل

∵ ح$_{٨}$ = أ + ٧ء = ٣ + ٧ × ٤ = ٣١

∴ جـ$_{١٠}$ ابتداءً من ح$_{٨}$ = $\frac{١٠}{٢}$ [٢ ح$_{٨}$ + ٩ء] = ٥ [٢ × ٣١ + ٩ × ٤] = ٤٩٠

مثال ٨

كم حدًا يلزم أخذه من حدود المتتابعة الحسابية (٣٥ ، ٣٠ ، ٢٥ ، ...) ابتداءً من حدها الأول ليكون مجموعها مساويًا ١٣٥ ؟ ثم علل وجود جوابين.

الحـــل

أ = ٣٥ ، ء = −٥ ، جـ$_{ن}$ = ١٣٥

∴ ١٣٥ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ × ٣٥ + (ن − ١) × −٥]

∴ ٢٧٠ = ن [٧٥ − ٥ ن]

∴ ٥ ن^{٢} − ٧٥ ن + ٢٧٠ = ٠

∴ (ن − ٩) (ن − ٦) = ٠

∵ جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن − ١) ء]

∴ ١٣٥ = $\frac{ن}{٢}$ [٧٠ − ٥ ن + ٥]

∴ ٢٧٠ = ٧٥ ن − ٥ ن^{٢}

∴ ن^{٢} − ١٥ ن + ٥٤ = ٠

∴ ن = ٦ أ، ن = ٩

أى أن مجموع الستة حدود الأولى = مجموع التسعة حدود الأولى.

وهذا يعنى أن مجموع الحدود ابتداءً من ح$_{٧}$ إلى ح$_{٩}$ = صفر

مثال ٩

أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها ح$_{١}$ = ١٢ ، ح$_{ن}$ = ٧٨ ، جـ$_{ن}$ = ١٠٣٥ حيث ن عدد حدودها.

الحـــل

∵ ح$_{١}$ = ١٢

، ∵ ح$_{ن}$ = ٧٨

، ∵ جـ$_{ن}$ = ١٠٣٥

∴ $\frac{ن}{٢}$ [١٢ + ٧٨] = ١٠٣٥

∴ ن = ٢٣

∴ ح$_{٢٣}$ = ٧٨

∴ ١٢ + ٢٢ ء = ٧٨

∴ ء = ٣

∴ أ = ١٢

∴ ل = ٧٨

∴ $\frac{ن}{٢}$ [أ + ل] = ١٠٣٥

∴ $\frac{ن}{٢}$ × ٩٠ = ١٠٣٥

∴ عدد حدود المتتابعة = ٢٣ حدًا.

∴ أ + ٢٢ ء = ٧٨

∴ ٢٢ ء = ٦٦

∴ المتتابعة الحسابية هى : (١٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ... ، ٧٨)

مثال ١٠

أوجد أكبر مجموع للمتتابعة الحسابية (٤٥ ، ٤١ ، ٣٧ ، ...)

الحل

∵ أكبر مجموع للمتتابعة = مجموع الحدود الموجبة فقط

لذلك نوجد عدد الحدود الموجبة بوضع $ح_{ن} > ٠$

∴ $أ + (ن - ١)ء > ٠$ ∴ $٤٥ + (ن - ١) \times -٤ > ٠$ ∴ $٤٥ - ٤ن + ٤ > ٠$

∴ $٤٩ - ٤ن > ٠$ ∴ $٤ن < ٤٩$ ∴ $ن < ١٢\frac{١}{٤}$

∴ $ن = ١٢$ ∴ عدد الحدود الموجبة = ١٢ حدًا.

∴ أكبر مجموع للمتتابعة = $جـ_{١٢} = \frac{١٢}{٢}\left[٢ \times ٤٥ + ١١ \times -٤\right] = ٢٧٦$

مثال ١١

أوجد أصغر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة الحسابية (٢٥ ، ٢٢ ، ١٩ ، ...) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع سالبًا.

الحل

$أ = ٢٥$ ، $ء = -٣$

لإيجاد أصغر عدد من الحدود يلزم أخذها ليكون المجموع سالبًا نضع $جـ_{ن} < ٠$

∴ $\frac{ن}{٢}\left[٢أ + (ن - ١)ء\right] < ٠$ ∴ $٢أ + (ن - ١)ء < ٠$

∴ $٢ \times ٢٥ + (ن - ١) \times -٣ < ٠$ ∴ $٥٠ - ٣ن + ٣ < ٠$

∴ $٥٣ - ٣ن < ٠$ ∴ $٣ن > ٥٣$

∴ $ن > ١٧\frac{٢}{٣}$ ∴ $ن = ١٨$

∴ أصغر عدد من الحدود يلزم أخذها ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع سالبًا = ١٨ حدًا.

مثال ١٢

متتابعة حسابية مجموع حديها الثانى والثالث = ١٣ ، مجموع العشرين حدًا الأولى منها ٦١٠

أوجد المتتابعة واحسب عدد الحدود التى يلزم أخذها ابتداءً من حدها الأول ليكون مجموعها ١٥٥

الحل

∵ $ح_{٢} + ح_{٣} = ١٣$ ∴ $(أ + ء) + (أ + ٢ء) = ١٣$

∴ $٢أ + ٣ء = ١٣$ (١)

، ∵ $ح_{٢٠}$ = ٦١٠ ∴ $\frac{٢٠}{٢}$ [٢ أ + ١٩ ء] = ٦١٠

∴ ٢ أ + ١٩ ء = ٦١ (٢)

وبطرح (١) من (٢) : ∴ ١٦ ء = ٤٨ ∴ ء = ٣

وبالتعويض فى (١) : ∴ أ = ٢ ∴ المتتابعة هى (٢ ، ٥ ، ٨ ، ...)

∵ $ح_ن$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن − ١) ء] ∴ ١٥٥ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ × ٢ + (ن − ١) × ٣]

∴ ١٥٥ × ٢ = ن [٣ ن + ١] ∴ ٣ $ن^٢$ + ن − ٣١٠ = ٠

∴ (ن − ١٠) (٣ ن + ٣١) = ٠ ∴ ن = ١٠ أ، ن = $\frac{-٣١}{٣}$ ∉ $ص^+$ (مرفوض)

∴ عدد الحدود الذى يجعل المجموع مساويًا ١٥٥ هو ١٠ حدود.

مثال ١٣

أوجد المتتابعة الحسابية التى مجموع الحدود العشرة الأولى منها ١٢٠ ومجموع الحدود الستة التالية لها ١٦٨

الحل

∵ $ح_{١٠}$ الأولى = ١٢٠ ∴ $\frac{١٠}{٢}$ [٢ أ + ٩ ء] = ١٢٠

∴ ٢ أ + ٩ ء = ٢٤ (١)

، ∵ $ح_{١٦}$ = ١٢٠ + ١٦٨ = ٢٨٨ ∴ $\frac{١٦}{٢}$ [٢ أ + ١٥ ء] = ٢٨٨

∴ ٢ أ + ١٥ ء = ٣٦ (٢)

وبطرح (١) من (٢) : ∴ ٦ ء = ١٢ ∴ ء = ٢

وبالتعويض فى (١) : ∴ أ = ٣ ∴ المتتابعة هى (٣ ، ٥ ، ٧ ، ...)

مثال ١٤

أوجد مجموع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١٠ ، ١٠٠ والتى لا تقبل القسمة على ٧

الحل

لإيجاد مجموع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١٠ ، ١٠٠ والتى لا تقبل القسمة على ٧ نتبع الآتى :

١ نحسب مجموع جميع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١٠ ، ١٠٠

وهى (١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ... ، ٩٩) متتابعة حسابية فيها : أ = ١١ ، ء = ١ ، ل = ٩٩

∵ ل = أ + (ن − ١) ء ∴ ٩٩ = ١١ + (ن − ١) × ١

∴ ٩٩ = ن + ١٠ ∴ ن = ٨٩

∵ $ح_ن$ = $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل) ∴ $ح_{٨٩}$ = $\frac{٨٩}{٢}$ (١١ + ٩٩) = ٤٨٩٥

٢ نحسب مجموع جميع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١٠ ، ١٠٠ والتى تقبل القسمة على ٧ وهى (١٤ ، ٢١ ، ٢٨ ، ... ، ٩٨) متتابعة حسابية فيها : أ = ١٤ ، ء = ٧ ، ل = ٩٨

∵ ل = أ + (ن − ١) ء ∴ ٩٨ = ١٤ + (ن − ١) × ٧ ∴ ٩٨ = ٧ + ٧ ن

∴ ن = ١٣ ∴ حـ$_{١٣}$ = $\frac{١٣}{٢}$ (١٤ + ٩٨) = ٧٢٨

، من **١** ، **٢** :

∴ مجموع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١٠ ، ١٠٠

والتى لا تقبل القسمة على ٧ = ٤٨٩٥ − ٧٢٨ = ٤١٦٧

مثال ١٥

إذا كان مجموع ن حدًا الأولى من متتابعة حسابية يعطى بالقانون : حـ$_{ن}$ = ن(٣ ن + ٢)

فأوجد المتتابعة ثم أوجد حدها التاسع.

الحل

∵ حـ$_{ن}$ = ن(٣ ن + ٢)

، بوضع ن = ١ ∴ حـ$_{١}$ = ١ × (٣ × ١ + ٢) = ٥ ∴ ح$_{١}$ = ٥

، بوضع ن = ٢ ∴ حـ$_{٢}$ = ٢ × (٣ × ٢ + ٢) = ١٦

∴ ح$_{١}$ + ح$_{٢}$ = ١٦ ∴ ح$_{٢}$ = ١٦ − ٥ = ١١

، بوضع ن = ٣ ∴ حـ$_{٣}$ = ٣ × (٣ × ٣ + ٢) = ٣٣

∴ ح$_{١}$ + ح$_{٢}$ + ح$_{٣}$ = ٣٣ ولكن ح$_{١}$ + ح$_{٢}$ = ١٦ ∴ ح$_{٣}$ = ٣٣ − ١٦ = ١٧

∴ المتتابعة هى (٥ ، ١١ ، ١٧ ، ...) ∴ ح$_{٩}$ = أ + ٨ ء = ٥ + ٨ × ٦ = ٥٣

حل آخر :

∵ لكل ن > ١ نجد أن : ح$_{ن}$ = حـ$_{ن}$ − حـ$_{ن-١}$ = ن(٣ ن + ٢) − (ن − ١) (٣ (ن − ١) + ٢)

= ٣ ن^{٢} + ٢ ن − (ن − ١) (٣ ن − ٣ + ٢)

= ٣ ن^{٢} + ٢ ن − (ن − ١) (٣ ن − ١)

= ٣ ن^{٢} + ٢ ن − ٣ ن^{٢} + ٤ ن − ١ = ٦ ن − ١

، ∵ حـ$_{١}$ = ٥ ∴ ح$_{١}$ = ٥

∴ المتتابعة هى (ح$_{ن}$) = (٦ ن − ١) = (٥ ، ١١ ، ١٧ ، ...)

، ح$_{٩}$ = حـ$_{٩}$ − حـ$_{٨}$ = ٩ (٣ × ٩ + ٢) − ٨ (٣ × ٨ + ٢) = ٥٣

مثال ١٦

وفر رجل فى نهاية سنة ما مبلغ ٧٥٠٠ جنيه ثم أخذ يزيد ما يوفره فى كل سنة بمقدار ١٥٠٠ جنيه عن السنة السابقة لها. أوجد :

[١] مقدار ما يوفره الرجل فى السنة السابعة عشر. [٢] جملة ما يوفره الرجل فى ١٧ عامًا.

الحل

المبالغ التى يوفرها الرجل فى نهاية كل سنة تكون المتتابعة الحسابية

(٧٥٠٠ ، ٩٠٠٠ ، ١٠٥٠٠ ، ...) التى حدها الأول = ٧٥٠٠ وأساسها = ١٥٠٠

[١] ما يوفره الرجل فى السنة السابعة عشر = $ح_{١٧}$ من هذه المتتابعة = أ + ١٦ ء

= ٧٥٠٠ + ١٦ × ١٥٠٠ = ٣١٥٠٠ جنيه.

[٢] جملة ما يوفره الرجل فى ١٧ عامًا = مجموع ١٧ حدًا الأولى من هذه المتتابعة

= $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل) حيث ل = $ح_{١٧}$ = ٣١٥٠٠ جنيه

= $\frac{١٧}{٢}$ (٧٥٠٠ + ٣١٥٠٠) = $\frac{١٧}{٢}$ × ٣٩٠٠٠ = ٣٣١٥٠٠ جنيه.

مثال ١٧

فى مسابقة لإحدى شركات المياه الغازية وضعت ٢٤ زجاجة على خط مستقيم واحد والمسافة بين كل زجاجة وأخرى ٥ أمتار ووضع صندوق مجاور للزجاجة الأولى، فإذا قام متسابق بجمع هذه الزجاجات واحدة تلو الأخرى ثم وضعها فى الصندوق دون تحريكه فأوجد المسافة التى قطعها المتسابق حتى أتم جمع الزجاجات كلها.

الحل

المتسابق يضع الزجاجة الأولى فى الصندوق دون قطع أى مسافة لأنها مجاورة للصندوق ثم يمشى ٥ أمتار حتى يصل إلى الزجاجة الثانية ويعود نفس المسافة ليضعها فى الصندوق ثم يمشى عشرة أمتار حتى يصل إلى الزجاجة الثالثة ويعود نفس المسافة ليضعها فى الصندوق وهكذا...

مجموع المسافات التى يمشيها = ٢ × ٥ + ٢ × ١٠ + ٢ × ١٥ + ... إلى ٢٣ حدًا

= ٢ (٥ + ١٠ + ١٥ + ... إلى ٢٣ حدًا)

= ٢ × مجموع ٢٣ حدًا من متتابعة حسابية حدها الأول ٥ وأساسها ٥

= ٢ × $\frac{٢٣}{٢}$ [٢ × ٥ + ٢٢ × ٥] = ٢٣ (١٠ + ١١٠)

= ٢٣ × ١٢٠ = ٢٧٦٠ مترًا.

تمارين 4

على المتسلسلات الحسابية

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قيمة المتسلسلة الحسابية $\sum_{ر=١}^{٥}$ (٢ ر + ١) تساوى ....

(أ) ٢٥ (ب) ٣٠ (جـ) ٣٥ (د) ٤٠

(٢) قيمة المتسلسلة الحسابية $\sum_{ر=١}^{٢٠}$ (٣ − ٢ ر) تساوى ....

(أ) ٤٠٠ (ب) −٤٠٠ (جـ) −٣٦٠ (د) ٣٨٠

(٣) قيمة المتسلسلة : ٤ + ٩ + ١٤ + ... + (٥ ن − ١) باستخدام رمز التجميع هى ....

(أ) $\sum_{ر=٤}^{ن}$ (٥ ر − ١) (ب) $\sum_{ر=١}^{ن}$ (٥ ر + ١)

(جـ) $\sum_{ر=١}^{ن}$ (٥ ر − ١) (د) $\sum_{ر=١}^{٥ن-١}$ (٣ ر + ١)

(٤) قيمة المتسلسلة : ٧ + ١٢ + ١٧ + ٢٢ باستخدام رمز التجميع هى ....

(أ) $\sum_{ر=١}^{٤}$ (٥ ر + ٢) (ب) $\sum_{ر=١}^{٤}$ (٤ ر + ٣)

(جـ) $\sum_{ر=١}^{٤}$ (٧ ر + ١) (د) $\sum_{ر=١}^{٤}$ (٣ ر + ٤)

(٥) مجموع حدود المتتابعة الحسابية (٣ ، ٥ ، ٧ ، ... ، (٢ ن + ١)) ابتداءً من حدها الأول يساوى ....

(أ) ن(ن + ١) (ب) ن(ن + ٢)

(جـ) ن(ن + ٥) (د) ن(ن + ٢) (ن + ٣)

(٦) متتابعة حسابية مجموع حديها الأول والأخير ٤٦ ومجموع حدودها ٣٤٥ فإن عدد حدودها = ...

(أ) ٢٥ (ب) ١٥ (جـ) ٢٣ (د) ٢٢

(٧) متتابعة حسابية حدها الأول = ١٢ ، وحدها الأخير = −٢٦ ومجموع حدودها يساوى −١٤٠ ، فإن المتتابعة هى ....

(أ) (١٢ ، ٨ ، ٤ ، ... ، −٢٦) (ب) (١٢ ، ٩ ، ٦ ، ... ، −٢٦)

(جـ) (١٢ ، ٦ ، ٠ ، ... ، −٢٦) (د) (١٢ ، ١٠ ، ٨ ، ... ، −٢٦)

(٨) مجموع ن حدًا من المتسلسلة : $\sqrt{٢} + \sqrt{٨} + \sqrt{١٨} + \sqrt{٣٢} + \cdots$ يساوى ....

(أ) $\frac{ن(ن+١)}{٢}$ (ب) ٢ ن(ن + ١) (جـ) $\frac{ن(ن+١)}{\sqrt{٢}}$ (د) ١

(٩) مجموع حدود المتسلسلة الحسابية : ٨٩ + ٨٥ + ٨١ + ... + ٣٣ = ...

(أ) ٩٠٠ (ب) ٩١٠ (جـ) ٨٩٥ (د) ٩١٥

(١٠) مجموع حدود المتسلسلة الحسابية : $\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٢} + \frac{٥}{٢} + \cdots + \frac{١٣}{٢}$ = ...

(أ) ٢٣,٥ (ب) ٢٤,٥ (جـ) ٢٥ (د) ٢٢,٥

(١١) مجموع حدود المتسلسلة الحسابية : ٢ + ٥ + ٨ + ⋯ + ٦٢ = ...

(أ) ٦٦٤ (ب) ٦٧٠ (جـ) ٦٦٠ (د) ٦٧٢

(١٢) مجموع المتسلسلة : $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٦} + \cdots$ إلى ٩ حدود = ...

(أ) $\frac{-٥}{٦}$ (ب) $-\frac{١}{٢}$ (جـ) ١ (د) $\frac{-٣}{٢}$

(١٣) مجموع ٣٠ حدًا الأولى من المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن$ = ٢ ن + ٣ هو ....

(أ) ١٠٠٠ (ب) ١٠٢٤ (جـ) ١٠٢٠ (د) ١٠١٠

(١٤) مجموع أول ١٠ أعداد زوجية فى مجموعة الأعداد الطبيعية يساوى ....

(أ) ٢٠ (ب) ٤٥ (جـ) ٥٥ (د) ٩٠

(١٥) مجموع ن حدًا الأولى من متتابعة الأعداد الطبيعية الفردية هو ....

(أ) ٢ ن (ب) $ن^٢$ (جـ) $\frac{ن(ن-١)}{٢}$ (د) $\frac{ن(ن+١)}{٢}$

(١٦) مجموع الأعداد الطبيعية التى تقبل القسمة على ٣ ومحصورة بين ٣٠ ، ٥٠ يساوى ....

(أ) ٨١ (ب) ٢٤٣ (جـ) ٣٤٣ (د) ٥١٢

(١٧) مجموع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١٠٠ ، ١٧٠ والتى لا يقبل كل منها القسمة على ٣ يساوى ....

(أ) ٥١٥٠ (ب) ٧١٢٠ (جـ) ٦١٧٠ (د) ٦٢١٠

(١٨) مجموع الأعداد الطبيعية الفردية التى هى أكبر من ١٠ وأقل من ٣٠ يساوى ....

(أ) ١٠٠ (ب) ١٥٠ (جـ) ٢٠٠ (د) ٢٥٠

(١٩) مجموع الأعداد الصحيحة من ١ إلى ١٠٠ والتى تقبل القسمة على ٢ أو ٥ يساوى ....

(أ) ٣٠٠٠ (ب) ٣٠١٠ (جـ) ٣١٥٠ (د) ٣٠٥٠

(٢٠) مجموع كل الأعداد الفردية المكونة من رقمين يساوى ....

(أ) ٢٤٧٥ (ب) ٢٥٣٠ (جـ) ٤٩٠٥ (د) ٥٠٤٩

(٢١) إذا كان : س = ١ + ٣ + ٥ + ⋯ + (٢ ن − ١) لكل قيم ن $\in$ $ص^+$ فإن : س تكون ....

(أ) عدد زوجى. (ب) مكعب كامل. (جـ) عدد فردى. (د) مربع كامل.

(٢٢) مجموع ٣٠ حدًا متتالية من المتتابعة (٢ $ن$ − ١) ابتداءً من $ح_{١٠}$ هو ....

(أ) ١٣٣٥ (ب) ١٧٤٠ (جـ) ١٦٧٥ (د) ١٧٢٠

(٢٣) مجموع الثمانية حدود الأولى من المتتابعة الحسابية التى حدها الرابع ٢ وحدها السابع $\frac{١}{٤}$ هو ....

(أ) ١٣ (ب) $١٢\frac{١}{٣}$ (جـ) $١٣\frac{٢}{٣}$ (د) $١٣\frac{١}{٢}$

(٢٤) أى المتتابعات الحسابية الآتية مجموع العشرين حدًا الأولى منها ٨٢٠ ؟

(أ) (٢ ، ٦ ، ١٠ ، ...) (ب) (١ ، ٥ ، ٩ ، ...)

(جـ) (٣ ، ٧ ، ١١ ، ...) (د) (٤ ، ٨ ، ١٢ ، ...)

(٢٥) إذا كان مجموع العشرين حدًا الأولى من متتابعة حسابية يساوى ٨٦٠ ومجموع حديها الثالث والرابع يزيد عن حدها السادس بمقدار ٥ فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٤ ، ٩ ، ١٤ ، ...) (ب) (٥ ، $٩\frac{١}{٢}$ ، ١٤ ، ...)

(جـ) (٥ ، ٩ ، ١٣ ، ...) (د) (٥ ، ٨ ، ١١ ، ...)

(٢٦) متتابعة حسابية حدها الثانى = ١٣ ، ومجموع العشرة حدود الأولى منها = ٢٣٥ فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٨ ، ١٣ ، ١٨ ، ...) (ب) (٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ...)

(جـ) (١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ...) (د) (١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، ...)

(٢٧) إذا كان : ($ح_{ن}$) متتابعة حسابية فيها $ح_{ن}$ = ٨١ − ٢ $ن$ فإن : $ح_{٨٠}$ الأولى = ...

(أ) صفر (ب) ٨١ (جـ) −٨١ (د) −١٦٢

(٢٨) متتابعة حسابية حدها الأول = ٧ ومجموع ١٠ حدود الأولى منها = ٢٥٠ فإن : $ح_{٢٠}$ = ...

(أ) ٨٧ (ب) ٨٣ (جـ) ٨٦ (د) ٩١

(٢٩) متتابعة حسابية مكونة من ٢٧ حدًا وحدها الأوسط ٤١ فإن مجموع حدود هذه المتتابعة = ...

(أ) ٥٥٣,٥ (ب) ١١٠٧ (جـ) ٢٢١٤ (د) ٦٨

(٣٠) متتابعة حسابية عدد حدودها $ن$ حدًا حيث $ن$ عدد فردى والحد الأوسط منها = م فإن مجموع المتتابعة = ...

(أ) ٢ م $ن$ (ب) $\frac{١}{٢}$ م $ن$ (جـ) م $ن$ (د) م $ن^{٢}$

(٣١) مجموع الحدود الزوجية الرتبة من حدود المتتابعة الحسابية (٥ ، ٧ ، ٩ ، ... ، ٦٥) هو ....

(أ) ٥٢٠ (ب) ٥٣٠ (جـ) ٥٢٥ (د) ٥٦٠

(٣٢) مجموع النصف الأخير من حدود المتتابعة الحسابية (١٢ ، ٨ ، ٤ ، ... ، −٢٤) يساوى ....

(أ) −٨٥ (ب) −٨٠ (جـ) −٧٥ (د) −٧٠

(٣٣) مجموع الربع الأخير من حدود المتتابعة الحسابية (٧ ، ١١ ، ١٥ ، ... ، ١٦٣) يساوى ....

(أ) ١٥٠٠ (ب) ١٤٢٠ (جـ) ١٤٥٠ (د) ١٤٣٠

(٣٤) أوجد عدد الحدود التى يجب أخذها من المتتابعة الحسابية (١ ، ٣ ، ٥ ، ...) ابتداءً من حدها الأول ليكون مجموع هذه الحدود مساويًا ٤٠٠ هو .... حدًا.

(أ) ١٨ (ب) ٢١ (جـ) ٢٠ (د) ١٩

(٣٥) عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة (٢٧ ، ٢٤ ، ٢١ ، ...) ابتداءً من الحد الأول ليتلاشى المجموع هو .... حدًا.

(أ) ١٨ (ب) ١٩ (جـ) ٢٠ (د) ٢١

(٣٦) إذا كان مجموع العشرين حدًا الأولى من متتابعة حسابية يساوى ١٩٠ ، مجموع العشرة حدود التالية لها ٣٩٥ فإن : $ح_{٨}$ = ...

(أ) $-٩\frac{١}{٢}$ (ب) $-٥\frac{١}{٢}$ (جـ) $٢\frac{١}{٢}$ (د) $٤\frac{١}{٢}$

(٣٧) إذا كان ($ح_{ن}$) متتابعة حسابية عدد حدودها (ن) فيها $ح_{١}$ = ١٢ ، $ح_{ن}$ = ٧٨ ، $جـ_{ن}$ = ١٠٣٥ فإن : $ح_{٤}$ = ...

(أ) ١٥ (ب) ١٨ (جـ) ٢١ (د) ٢٤

(٣٨) فى متتابعة حسابية إذا كان : $ح_{٣}$ = ٥ ، $ح_{ن-٢}$ = ٩٥ وكان مجموع ن حدًا الأولى منها يساوى ١٠٠٠ فإن : ن = ...

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (جـ) ١٦ (د) ٢٠

(٣٩) فى المتتابعة الحسابية (١ ، ٣ ، ٥ ، ...) بأى حد تبدأ المجموع ليكون مجموع عشرة حدود متتالية يساوى ٢٠٠ ؟

(أ) $ح_{٣}$ (ب) $ح_{٦}$ (جـ) $ح_{٩}$ (د) $ح_{١١}$

(٤٠) إذا كان $جـ_{ن}$ هو مجموع ن حدًا الأولى من حدود متتابعة حسابية حدها الأول = أ ، وأساسها = ء فإن : $جـ_{ن} - ٢ جـ_{ن-١} + جـ_{ن-٢}$ = ...

(أ) ٢ ء (ب) أ (جـ) ء (د) أ + ء

(٤١) أكبر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة ($ح_{ن}$) = (٣٢ ، ٢٨ ، ٢٤ ، ...) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع موجب هو ....

(أ) ١٦ (ب) ١٧ (جـ) ١٨ (د) ٢٠

(٤٢) أكبر مجموع لحدود المتتابعة الحسابية التى فيها $ح_{٦}$ = ١٦ ، $ح_{١٨}$ = -٢٠ هو ....

(أ) ١٧٣ (ب) ١٧٦ (جـ) ١٧٩ (د) ١٨٢

(٤٣) أكبر مجموع لحدود المتتابعة الحسابية (٣٣ ، ٣١ ، ٢٩ ، ...) يساوى ....

(أ) ٢٨٠ (ب) ٢٩٨ (جـ) ٢٩٠ (د) ٢٨٩

(٤٤) أصغر مجموع للمتتابعة الحسابية (-٢٤ ، -٢٠ ، -١٦ ، ...) يساوى ....

(أ) صفر (ب) -٨٦ (جـ) -٨٤ (د) -٨٨

(٤٥) أصغر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة (٨٩ ، ٨١ ، ٧٣ ، ...) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع سالبًا هو .... حدًا.

(أ) ٢٥ (ب) ٢٤ (جـ) ٢٦ (د) ٢٣

(٤٦) أكبر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة (٢٥ ، ٢١ ، ١٧ ، ...) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع موجبًا هو .... حدًا.

(أ) ١٢ (ب) ١٤ (جـ) ١٣ (د) ١١

(٤٧) إذا كان مجموع ٤٠ وسط حسابى بين عددين يساوى ١٢٠ فإن مجموع ٥٠ وسط حسابى بين نفس العددين = ...

(أ) ١٣٠ (ب) ١٦٠

(جـ) ١٥٠ (د) لا شئ مما سبق.

(٤٨) عند إدخال ٢٨ وسطًا حسابيًا بين ٤ ، ٩١ فإن مجموع حدود المتتابعة الحسابية الناتجة = ...

(أ) ١٢٢٥ (ب) ١٣١٥ (جـ) ١٤٢٥ (د) ١٥٢٥

(٤٩) عند إدخال ١٦ وسطًا حسابيًا بين أ ، ب ، فإن مجموع حدود المتتابعة المتولدة يساوى ....

(أ) ٨ (أ + ب) (ب) ٩ (أ + ب) (جـ) ١٦ (أ + ب) (د) ١٨ (أ + ب)

(٥٠) عند إدخال «ن» وسطًا حسابيًا بين ٣ ، ٥١ فإن مجموع المتتابعة الحسابية الناتجة يساوى ....

(أ) ٢٧ (ن − ٢) (ب) ٢٧ (ن − ١) (جـ) ٢٧ (ن + ١) (د) ٢٧ (ن + ٢)

(٥١) المتتابعة الحسابية التى مجموع العشرين حدًا الأولى منها = ٨٢٠ والوسط الحسابى لحديها الرابع والسابع = ٢١ هى ....

(أ) (٢ ، ٧ ، ١٢ ، ...) (ب) (٤ ، ٨ ، ١٢ ، ...)

(جـ) (٥ ، ٧ ، ٩ ، ...) (د) (٣ ، ٧ ، ١١ ، ...)

(٥٢) فى المتتابعة الحسابية (٥ ، ٨ ، ١١ ، ...) :

أولًا : مجموع ٢٠ حدًا الأولى منها = ...

(أ) ٦٧٠ (ب) ٨٢٠ (جـ) ٥٢٥ (د) ٦٩٠

ثانيًا : مجموع ١٠ حدود من حدودها ابتداءً من الحد السابع = ...

(أ) ٣٧٥ (ب) ٣٨٥ (جـ) ٣٥٥ (د) ٣٦٥

ثالثًا : مجموع حدود المتتابعة بدءًا من $ح_{١٠}$ إلى $ح_{٢٠}$ = ...

(أ) ٥١٣ (ب) ٥١٠ (جـ) ٥١٧ (د) ٥٢٠

(٥٣) متتابعة حسابية حدها الثانى = ٢٣ ، وحدها قبل الأخير = ٩٧ ومجموع حدودها ٢٤٠٠ فإن :

أولًا : عدد حدود المتتابعة = ... حدًا.

(أ) ٣٨ (ب) ٤٠ (جـ) ٤٢ (د) ٤٣

ثانيًا : المتتابعة هى ....

(أ) (١٩ ، ٢٣ ، ٢٧ ، ... ، ٩٨) (ب) (١٨ ، ٢٣ ، ٢٨ ، ... ، ١٠٨)

(جـ) (٢١ ، ٢٣ ، ٢٥ ، ... ، ٩٩) (د) (٢٠ ، ٢٣ ، ٢٦ ، ... ، ١٠٢)

(٥٤) إذا كان مجموع ن حدًا الأولى من متتابعة حسابية يتعين بالقانون : $حـ_{ن} = ٢ ن (٧ - ن)$ فإن :

أولًا : $ح_{٧}$ = ...

(أ) −١٥ (ب) −١٢ (جـ) −١٤ (د) −١١

ثانيًا : عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة ابتداءً من الحد الأول حتى يكون المجموع مساويًا −٢٤٠ هو .... حدًا

(أ) ١٥ (ب) ١٧ (جـ) ١٤ (د) ١٢

(٥٥) متتابعة حسابية فيها $حـ_{٥} - حـ_{٤} = ٢٠$ ، $حـ_{٨} - حـ_{٧} = ٢٩$ فإن : $ح_{١٥}$ = ...

(أ) ٤٩ (ب) ٩٨ (جـ) ١٥٥ (د) ١٥٨

(٥٦) متتابعة حسابية حدها الأول = ٣ ، وحدها الأخير = ٣٩ ومجموع حدودها = ٢١٠

فإن عدد حدودها = ...

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٥

(٥٧) متتابعة حسابية مجموع الخمسة حدود الأولى منها = ١٠ ، ومجموع العشرة حدود الأولى منها = ٥

فإن مجموع الخمسة عشرة حدًا الأولى = ...

(أ) ١٥ (ب) −١٥ (جـ) ٥٠ (د) −٥٠

(٥٨) متتابعة حسابية فيها $ح_{١} = ١٠$ ، $ح_{م} = س$ ، $ح_{س} = م$ وكان : $حـ_{ن}$ = صفر

فإن : ن = ...

(أ) س + م (ب) س − م (جـ) ٢٠ (د) ٢١

(٥٩) إذا كان مجموع ن حدًا الأولى من متتابعة هو $\frac{ن}{ن + ١}$ فإن : $\frac{١}{ح_{٨}}$ = ...

(أ) ٦٤ (ب) ٨٠ (جـ) ٧٥ (د) ٧٢

(٦٠) إذا كان : $\frac{٣ + ٥ + ٧ + \dots \text{ إلى ن حدًا}}{٥ + ٨ + ١١ + \dots \text{ إلى ١٠ حدود}} = ٧$ فإن : ن = ...

(أ) ٣٥ (ب) ٣٦ (جـ) ٣٧ (د) ٤٠

(٦١) $\frac{٢ + ٦ + ١٠ + \dots \text{ إلى ٧٥ حدًا من متتابعة حسابية}}{٣ + ٩ + ١٥ + \dots + ٢٩٧ \text{ متسلسلة حسابية}}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

(٦٢) $\frac{١ + ٣ + ٥ + \dots \text{ إلى ن حدًا من متتابعة حسابية}}{٢ + ٤ + ٦ + \dots + \text{ إلى ن حدًا من متتابعة حسابية}}$ = ...

(أ) $\frac{٢ن}{ن + ١}$ (ب) $\frac{ن + ١}{٢}$ (جـ) $\frac{ن}{ن + ١}$ (د) $\frac{ن + ١}{ن + ٢}$

(٦٣) متتابعة حسابية فيها $ح_{٤} = ٢٤$ ، النسبة بين مجموع الخمسة حدود الأولى منها إلى مجموع الخمسة حدود التالية لها كنسبة ١ : ٢ ، فإن هذه المتتابعة هى ....

(أ) (١٨ ، ٢٠ ، ٢٢ ، ...) (ب) (١٥ ، ١٨ ، ٢١ ، ...)

(جـ) (١٢ ، ١٦ ، ٢٠ ، ...) (د) (٩ ، ١٤ ، ١٩ ، ...)

٦٤ ما عدد الدقات التى تدقها ساعة الحائط فى اليوم إذا علم أنها تدق مرة واحدة عند الساعة الواحدة ثم مرتين عند الساعة الثانية وهكذا ؟

(أ) ١٥٦ (ب) ١٣٢ (جـ) ١٢٠ (د) ٧٨

٦٥ إذا كان $\text{حـ}_{\text{ن}}$ هو مجموع ن حدًا الأولى من متتابعة حسابية وكان : $\text{حـ}_{١} = ٦$ ، $\text{حـ}_{٧} = ١٠٥$

فإن : $\dfrac{\text{حـ}_{\text{ن}}}{\text{حـ}_{\text{ن}-٢}} =$ .... لكل $\text{ن} > ٣$

(أ) $\dfrac{\text{ن}}{\text{ن}-٣}$ (ب) $\dfrac{\text{ن}+٣}{\text{ن}}$ (جـ) $\dfrac{\text{ن}+٣}{\text{ن}-٣}$ (د) $\dfrac{\text{ن}}{\text{ن}+٣}$

٦٦ إذا كان : $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} ١ + \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} ٢ + \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} ٣ + \cdots + \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} ٢٠ = ١٠٥٠$ فإن : ن = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

٦٧ إذا كانت : (٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ...) متتابعة حسابية حيث $\text{حـ}_{\text{م}}$ مجموع أول م حدًا من الحدود الفردية الرتبة ، $\text{حـ}_{\text{ن}}$ مجموع أول ن حدًا من الحدود الزوجية الرتبة فإن : $\dfrac{\text{حـ}_{\text{م}}}{\text{حـ}_{\text{ن}}} =$ ....

(أ) $\dfrac{\text{م}^٢-١}{\text{ن}^٢}$ (ب) $\dfrac{\text{م}^٢-\text{م}}{\text{ن}^٢}$ (جـ) $\dfrac{\text{م}(\text{م}+١)}{\text{ن}^٢-١}$ (د) $\dfrac{\text{م}^٢-\text{م}}{\text{ن}^٢+\text{ن}}$

٦٨ عدد حدود متتابعة حسابية (٢ ن + ١) فإن النسبة بين مجموع الحدود الفردية الرتبة إلى مجموع الحدود الزوجية الرتبة هى ....

(أ) $\dfrac{\text{ن}}{\text{ن}+١}$ (ب) $\dfrac{\text{ن}+١}{\text{ن}}$ (جـ) $\dfrac{\text{ن}^٢}{\text{ن}+١}$ (د) $\dfrac{\text{ن}+١}{٢\text{ن}}$

٦٩ فى متتابعة حسابية مكونة من ٩٩ حد ، مجموع الحدود الفردية الرتبة يساوى ٢٥٥٠ ، وعلى ذلك يكون مجموع جميع حدودها يساوى ....

(أ) ٥٠٤٩ (ب) ٥٠٥٠ (جـ) ٥١٠٠ (د) ٥٤٠٩

٧٠ متتابعة حسابية مكونة من ٥١ حدًا ، مجموع الحدود الفردية الرتبة : مجموع حدود المتتابعة = ...

(أ) ٥٠ : ٥١ (ب) ٢٥ : ٢٦ (جـ) ٢٥ : ٥١ (د) ٢٦ : ٥١

٧١ إذا أخطأ طالب فى حساب أساس متتابعة حسابية (معلوم حدها الأول) فكان −٢ بدلًا من ٢ فوجد أن مجموع الخمسة حدود الأولى من المتتابعة −٥ فإن المجموع الصحيح للخمسة حدود الأولى = ...

(أ) ٢٥ (ب) −٢٥ (جـ) −٣٥ (د) ٣٥

٧٢ إذا كان : $\text{حـ} = \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (٢\text{ر}+١)$ ، $\text{م} = \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (٣\text{ر})$ حيث $\text{ن} > ١$ فإن : ....

(أ) $\text{حـ} > \text{م}$ (ب) $\text{حـ} < \text{م}$

(جـ) $\text{حـ} = \text{م}$ (د) لا يمكن المقارنة بينهما.

٧٣ فى أحد المسارح تم تنظيم المقاعد بحيث يحتوى الصف الأخير على ٤٥ مقعد ثم ينقص كل صف تالى بمقدار ٢ مقعد عن الصف السابق ، فإذا كان عدد مقاعد المسرح ٥٢٠ مقعد فإن عدد الصفوف = ...

(أ) ٢٠ (ب) ٢٦ (جـ) ٢٠ أ ٢٦ (د) ٢٣

(٧٤) طريق مستقيم طوله ١١٠ كم. بدأت سيارتان الحركة معًا من نهايتيه فى اتجاهين متضادين فإذا قطعت إحداها فى الساعة الأولى ٨ كم ثم قطعت فى كل ساعة تالية مسافة تقل $\frac{1}{2}$ كم عن الساعة السابقة لها وقطعت السيارة الأخرى خلال الساعة الأولى ٤ كم ثم قطعت فى كل ساعة تالية مسافة تزيد ١ كم عن الساعة السابقة لها ، فإن الزمن اللازم لتتقابل السيارتان هو .... ساعة.

(أ) ٥ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ١٢

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ (١) مجموع حدود المتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ... ، ٨٠) «١١٠٧»

(٢) مجموع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ٣ ، ١٠٠٠ وكل منها يقبل القسمة على ٧ «٧١٠٧١»

(٣) مجموع الحدود الفردية الرتبة من حدود المتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ... ، ١١٠) «١٠٦٤»

(٤) مجموع النصف الأخير من حدود المتتابعة الحسابية (٨ ، ١١ ، ١٤ ، ... ، ٧١) «٦١٦»

(٥) مجموع الثلث الأخير من حدود المتتابعة الحسابية (٢٥ ، ٢١ ، ١٧ ، ... ، −١٢٧) «−١٣٣٩»

---

٢ كم حدًا يلزم أخذه من المتتابعة الحسابية (٤٠ ، ٣٦ ، ٣٢ ، ...) ابتداءً من حدها الأول ليكون مجموعها ٢٠٨ ؟
فسر معنى الجوابين. «٨ أ ١٣»

---

٣ فى المتتابعة الحسابية (−١١٥ ، −١٠٩ ، −١٠٣ ، ...) أوجد :

(١) رتبة أول حد موجب.

(٢) أقل عدد من حدودها ابتداءً من الحد الأول يعطى مجموعًا موجبًا. «٢١ ، ٤٠»

---

٤ أوجد رتبة أول حد سالب من حدود المتتابعة (١٥٢ − ٩ ن) ،
ثم أوجد أكبر مجموع يمكن الحصول عليه من حدود هذه المتتابعة. «١٧ ، ١٢٠٨»

---

٥ أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها :

(١) $ح_1 = ٢٣$ ، $ح_ن = ٨٦$ ، $حـ_ن = ٥٤٥$ «(٢٣ ، ٣٠ ، ٣٧ ، ... ، ٨٦)»

(٢) $ح_1 = ١٧$ ، $ح_ن = -٩٥$ ، $حـ_ن = -٥٨٥$ «(١٧ ، ٩ ، ١ ، ... ، −٩٥)»

---

٦ أدخل ١٧ وسطًا حسابيًا بين ٤٢ ، −١٢ ثم أوجد رتبة أول حد سالب ومجموع حدود المتتابعة. «١٦ ، ٢٨٥»

---

٧ أوجد المتتابعة الحسابية التى مجموع حديها الثالث والخامس ٢٢ وينقص حدها الرابع عن حدها السابع بمقدار ٩ ثم أوجد مجموع ٢٥ حدًا الأولى منها. «(٢ ، ٥ ، ٨ ، ...) ، ٩٥٠»

---

٨ متتابعة حسابية مجموع حديها الأول والأخير ٢٦ ، ومجموع حدودها ٤٦٨ ،
أوجد عدد حدودها وإذا كان حدها العاشر يساوى ٤٧ فأوجد المتتابعة. «٣٦ ، (٨٣ ، ٧٩ ، ٧٥ ، ...)»

٩ متتابعة حسابية فيها $ح_١ + ح_٢ = ٢٢٢$ ومجموع العشرة حدود الأولى منها ١٠٣٠
أوجد المتتابعة ثم أوجد أقل عدد من الحدود يلزم أخذه ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع سالبًا.
«(١١٢ ، ١١٠ ، ١٠٨ ، ...) ، ١١٤»

١٠ متتابعة حسابية حدها الأول ٢٩ وحدها الثانى يساوى خمسة أمثال حدها السابع
أوجد المتتابعة ثم أوجد عدد الحدود التى يجب أخذها بدءًا من حدها الأول
حتى يكون المجموع أكبر ما يمكن.
«(٢٩ ، ٢٥ ، ٢١ ، ...) ، ٨»

١١ متتابعة حسابية حدها العشرون يساوى ٤١ ، ويزيد مجموع حديها الثالث والسادس عن حدها التاسع بمقدار الوحدة. أوجد المتتابعة وعدد الحدود اللازم أخذها منها ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع ٤٤٠
«(٣ ، ٥ ، ٧ ، ...) ، ٢٠»

١٢ متتابعة حسابية حدها الأول يزيد عن ضعف حدها الخامس بمقدار ٢ والوسط الحسابى لحديها الثالث والسادس يساوى ١٦ ، فما هى المتتابعة ؟ وكم حدًا يلزم أخذها ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع مساويًا الصفر ؟
«(٣٠ ، ٢٦ ، ٢٢ ، ...) ، ١٦»

١٣ متتابعة حسابية حدودها موجبة ، مجموع الثلاثة حدود الأولى منها يساوى ٣٠ ، وحاصل ضرب حديها الثالث والرابع يساوى ٣٠٠ ، أوجد هذه المتتابعة ، ثم أوجد مجموع الخمسة عشر حدًا الأولى منها.
«(٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ...) ، ٦٠٠»

١٤ إذا كان مجموع الأحد عشر حدًا الأولى من متتابعة حسابية ٣٠٨ وحاصل ضرب حديها الثانى والسادس ٢٢٤ أوجد المتتابعة.
«(٣ ، ٨ ، ١٣ ، ...)»

١٥ مجموع الحدين الثالث والخامس من متتابعة حسابية تزايدية يساوى ٢٤ ومربع حدها السادس يساوى ٣٢٤ أوجد المتتابعة ، ثم أوجد مجموع العشرين حدًا الأولى منها.
«(٣ ، ٦ ، ٩ ، ...) ، ٦٣٠»

١٦ متتابعة حسابية فيها $ح_{٢٦} = ٠$ ، إذا كان مجموع $ن$ حدًا الأولى منها = ضعف مجموع الخمسة حدود الأولى منها ، أوجد قيمة $ن$
«١١ أ ، ٦٠»

١٧ إذا أدخل $ن$ وسطًا حسابيًا بين ١ ، ٣١ وكانت نسبة الوسط السابع إلى الوسط الأخير كنسبة $\frac{١٥}{٢٩}$
فما عدد الأوساط ؟ وما مجموع المتتابعة ؟
«١٤ ، ٢٥٦»

١٨ متتابعة حسابية مجموع السبعة حدود الأولى منها = ٢٤٥ ومجموع السبعة حدود التالية لها = ٩٨
أوجد المتتابعة.
«(٤٤ ، ٤١ ، ٣٨ ، ...)»

١٩ متتابعة حسابية أساسها ٢ ومجموع $ن$ من حدودها الأولى ٣٢٠ ، مجموع ٢$ن$ من حدودها الأولى ١١٥٢ أوجد المتتابعة وأوجد عدد الحدود اللازم أخذها ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع ٧٢٥
«(٥ ، ٧ ، ٩ ، ...) ، ٢٥»

٢٠ كم حدًا يلزم أخذه ابتداءً من الحد الأول للمتتابعة $(ح_ن) = (٤ن + ٢)$ حتى يكون مجموع الثلث الأخير منها مساويًا أربعة أمثال مجموع الثلث الأول ؟
«١٨»

21 متتابعة حسابية مكونة من ٣٣ حدًا ، مجموع الأحد عشر حدًا الأولى منها يساوى ٢٦٤ ومجموع الأحد عشر حدًا الأخيرة منها يساوى ٣٣٠ ، أوجد مجموع حدود المتتابعة ثم أوجد مجموع الخمسة حدود الوسطى منها. «٨٩١ ، ١٣٥»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا أُدخلت $ن$ من الأوساط الحسابية بين عددين $أ$ ، $ب$ فإن مجموع هذه الأوساط يساوى ....

(أ) $\frac{أ+ب}{٢}$ (ب) $ن\left(\frac{أ+ب}{٢}\right)$ (جـ) $ن(أ-ب)$ (د) $\frac{ن}{٢}(ب-أ)$

(٢) إذا كانت $(ح_ن)$ متتابعة حسابية فيها : $ح_١ + ح_٥ + ح_{١٠} + ح_{١٦} = ٦٤$

فإن مجموع ١٥ حدًا الأولى = ...

(أ) ١٢٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ٢٤٠ (د) ٣٦٠

(٣) إذا كان : $جـ_ن = جـ_م$ فى متتابعة حسابية حيث $ن \neq م$ فإن : $جـ_{ن+م} =$ ....

(أ) $م + ن$ (ب) $-(م+ن)$ (جـ) صفر (د) $م^٢ + ن^٢$

(٤) إذا كانت قياسات الزوايا الداخلة للمضلع فى تتابع حسابى وكان قياس أصغر زاوية فيه = ١٢٠° وكان أساس المتتابعة = ٥° فإن عدد أضلاع المضلع = ...

(أ) ٣ أ، ٩ (ب) ٤ أ، ١٦ (جـ) ٣ أ، ٤ (د) ٩ أ، ١٦

(٥) متتابعة حسابية فيها $\frac{جـ_م}{جـ_ن} = \frac{م^٢}{ن^٢}$ حيث $م \neq ن$ فإن : $\frac{ح_م}{ح_ن} =$ ....

(أ) $\frac{م-١}{ن-١}$ (ب) $\frac{ن-١}{م-١}$ (جـ) $\frac{٢م-١}{٢ن-١}$ (د) $\frac{٢ن-١}{٢م-١}$

(٦) إذا كانت $(ح_ن)$ متتابعة حسابية فإن المقدار :

$(ح_١^٢ - ح_٢^٢ + ح_٣^٢ - ح_٤^٢ + ح_٥^٢ - ح_٦^٢ + \cdots + ح_{٢ن-١}^٢ - ح_{٢ن}^٢)$ يساوى ....

(أ) $-ن جـ_{٢ن}$ (ب) $-ء جـ_{٢ن}$ (جـ) $جـ_{٢ن} - جـ_ن$ (د) $جـ_{٢ن}^٢ - جـ_ن^٢$

(٧) إذا كان $جـ_ن$ مجموع $ن$ حدًا الأولى من متتابعة حسابية وكان : $جـ_{٢ن} = ٣ جـ_ن$

فإن : $جـ_{٣ن} : جـ_ن =$ ....

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٠

(٨) $ح_{٩٩}$ من حدود المتسلسلة ٢ + ٧ + ١٤ + ٢٣ + ٣٤ + ... هو ....

(أ) ٩٩٩٩ (ب) ٩٩٩٨

(جـ) ١٠٠٠٠ (د) لا شيء مما سبق.

⑨ إذا كانت (لو س ، لو س ص ، لو س ص^2 ، ...) متتابعة حسابية وكان س = ١٦٠ ، ص = $\frac{1}{2}$

فإن : ح$_9$ = ...

(أ) ٩ (ب) ٩ لو ٢٥ (جـ) ٢٥ لو ١٠ (د) ١٨ لو ١٦

⑩ إذا كانت ح$_1$ = ٥ فى المتتابعة (ح$_ن$) حيث ح$_ن$ − ح$_{ن-1}$ = ٢ ن + ٣ لكل ن ≥ ٢ ،

فإن : ح$_{50}$ = ...

(أ) ٢٧٠٠ (ب) ٢٧٠٢ (جـ) ٢٧٠٤ (د) ٢٧٠٦

تطبيقات عملية على المتتابعة الحسابية

١ مسرح به ٢٥ صفًا من الكراسى ، يحتوى الصف الأول على ٢٠ كرسيًا ، ويحتوى الصف الثانى على ٢٢ كرسيًا ويحتوى الصف الثالث على ٢٤ كرسيًا وهكذا ، أوجد عدد الكراسى فى جميع صفوف المسرح.

«١١٠٠ كرسى»

---

٢ **ادخار :** يدخر زياد من عمله اليومى ١٥ جنيهًا ، فإذا كان يدخر فى كل يوم مبلغًا يزيد بمقدار جنيهين عن اليوم السابق له مباشرة. فأوجد مجموع ما يدخره خلال ١٥ يومًا.

«٤٣٥ جنيهًا»

---

٣ **الربط بترشيد المياه :** تندفع المياه بمعدل ٢٥ لترًا فى الدقيقة الأولى من صنبور للمياه ، ثم تزداد بعد ذلك بمعدل لترين فى كل دقيقة تالية لها. بعد كم دقيقة يكون مجموع ما يصب من الماء ٨٨٠ لترًا ؟ «٤٤ دقيقة»

---

٤ **الربط بالتجارة :** اقترض رجل مبلغًا من المال ، واتفق على أن يقوم بسداده على ١٠ أقساط ، يبدأ القسط الأول بمبلغ ٥٠٠ جنيه ، وكل قسط تالٍ يزيد عن القسط السابق له مباشرة بـ ٢٠٠ جنيه ، فما قيمة القرض ؟

«١٤٠٠٠ جنيه»

---

٥ شخص مدين بمبلغ ٤٨٠٠٠ جنيه قرر أن يسدد دينه على عشرين قسطًا سنويًا تكون متتابعة حسابية وبعد أن دفع ٥ أقساط توفى وعليه $\frac{4}{5}$ الدين فكم كان مقدار القسط الأول ؟

«١٧٩٢ جنيهًا»

---

٦ فى إحدى المسابقات المدرسية وضعت ٢١ ثمرة على خط مستقيم واحد والمسافة بين كل ثمرة وأخرى متران ووضع صندوق مجاور للثمرة الأولى فإذا قام متسابق بجمع هذه الثمار واحدة تلو الأخرى ثم وضعها فى الصندوق دون تحريك الصندوق فأوجد المسافة التى قطعها المتسابق حتى أتم جمع الثمار كلها. «٨٤٠ مترًا»

---

٧ يودع رجل مبلغًا ثابتًا فى بداية كل شهر فى بنك يعطى فائدة بسيطة قدرها ١٠٪ فى السنة وفى نهاية العام حسب له البنك الفوائد فكانت ١١٧ جنيهًا فكم المبلغ الذى كان يودعه الرجل شهريًا ؟

«١٨٠ جنيهًا»

---

٨ اشترى رجل شقة تمليك بمبلغ ١٦٤٠٠٠ جنيه ودفع من ثمنها فورًا ٦٨٠٠٠ جنيه واتفق مع البائع على أن يدفع له باقى الثمن على أقساط شهرية تكون متتابعة حسابية حدها النونى يساوى ٤٠٠ ن + ٦٠٠ أوجد عدد الأقساط.

«٢٠»

الدرس 5

المتتابعة الهندسية

تعريف

تسمى المتتابعة $(ح_{ن})$ حيث $ح_{ن} \neq ٠$ متتابعة هندسية إذا كان : $\frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}}$ = (مقدارًا ثابتًا) لكل $ن \in ص^{+}$

وهذا المقدار الثابت يسمى أساس المتتابعة الهندسية ويرمز له بالرمز ر

أى أن : ر (أساس المتتابعة الهندسية) = $\frac{\text{أى حد فيها}}{\text{الحد السابق له مباشرة}}$

مثال ١

بين أى المتتابعات الآتية تكون متتابعة هندسية وأوجد أساسها :

$\boxed{١}$ $(ح_{ن}) = (٢ \times ٥^{ن-١})$ $\boxed{٢}$ $(ح_{ن}) = (٣ ن^{٣})$ $\boxed{٣}$ $(ح_{ن}) = (\text{لو } ٣ + ن \text{ لو } ٢)$

الحل

$\boxed{١}$ $\because ح_{ن} = ٢ \times ٥^{ن-١}$ ، $ح_{ن+١} = ٢ \times ٥^{(ن+١)-١} = ٢ \times ٥^{ن}$

$\therefore \frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}} = \frac{٢ \times ٥^{ن}}{٢ \times ٥^{ن-١}} = ٥$ = مقدار ثابت.

$\therefore (ح_{ن}) = (٢ \times ٥^{ن-١})$ متتابعة هندسية أساسها ر = ٥

$\boxed{٢}$ $\because ح_{ن} = ٣ ن^{٣}$ ، $ح_{ن+١} = ٣ (ن+١)^{٣}$

$\therefore \frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}} = \frac{٣ (ن+١)^{٣}}{٣ ن^{٣}} = \left(\frac{ن+١}{ن}\right)^{٣} \neq$ مقدار ثابت.

$\therefore (ح_{ن}) = (٣ ن^{٣})$ ليست متتابعة هندسية.

٣ ∵ $ح_ن$ = لو ٣ + ن لو ٢ = لو ٣ + لو $٢^ن$ = لو (٣×٢^ن)

∴ $ح_{ن+١}$ = لو $(٣ \times ٢^{ن+١})$ ∴ $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{لو\ (٣ \times ٢^{ن+١})}{لو\ (٣ \times ٢^ن)}$ ≠ مقدار ثابت.

∴ $(ح_ن)$ = (لو ٣ + ن لو ٢) ليست متتابعة هندسية.

مثال ٢

أثبت أن المتتابعة : $(ح_ن) = \left(\frac{١}{٨} \times ٢^ن\right)$ متتابعة هندسية ثم أوجد الستة حدود الأولى منها.

الحـل

∵ $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{\frac{١}{٨} \times ٢^{ن+١}}{\frac{١}{٨} \times ٢^ن} = ٢^{ن+١-ن} = ٢$ = مقدار ثابت.

∴ المتتابعة $(ح_ن) = \left(\frac{١}{٨} \times ٢^ن\right)$ متتابعة هندسية وأساسها ر = ٢

، ∵ $ح_١ = \frac{١}{٨} \times ٢ = \frac{١}{٤}$ ، $ح_٢ = \frac{١}{٨} \times ٢^٢ = \frac{١}{٢}$

، $ح_٣ = \frac{١}{٨} \times ٢^٣ = ١$ ، $ح_٤ = \frac{١}{٨} \times ٢^٤ = ٢$

، $ح_٥ = \frac{١}{٨} \times ٢^٥ = ٤$ ، $ح_٦ = \frac{١}{٨} \times ٢^٦ = ٨$

لاحظ أنه :

يمكن إيجاد كل حد من حدود المتتابعة بدءًا من حدها الثانى بضرب أساس المتتابعة ر فى الحد السابق له مباشرة ففى المثال السابق : $ح_١ = \frac{١}{٤}$ ، ر = ٢

∴ $ح_٢ = \frac{١}{٤} \times ٢ = \frac{١}{٢}$ ، $ح_٣ = \frac{١}{٢} \times ٢ = ١$ ، $ح_٤ = ١ \times ٢ = ٢$ وهكذا...

ملاحظات

المتتابعة الهندسية التى حدها الأول = أ وأساسها = ر حيث ر ≠ ٠ تكون :

١ تزايدية إذا كان : ر > ١ ، أ > ٠ أو ٠ < ر < ١ ، أ < ٠

فمثلًا : • إذا كان : أ = ٣ ، ر = ٢

فإن المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ...) تزايدية.

• إذا كان : أ = −٦ ، ر = $\frac{١}{٣}$

فإن المتتابعة الهندسية (−٦ ، −٢ ، $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{-٢}{٩}$ ، ...) تزايدية.

٢ تناقصية إذا كان : $٠ < ر < ١$ ، $أ > ٠$ أو $ر > ١$ ، $أ < ٠$

فمثلًا : • إذا كان : $أ = ٢$ ، $ر = \frac{١}{٢}$

فإن المتتابعة الهندسية $(٢ ، ١ ، \frac{١}{٢} ، \frac{١}{٤} ، ...)$ تناقصية.

• إذا كان : $أ = -٢$ ، $ر = ٣$

فإن المتتابعة الهندسية $(-٢ ، -٦ ، -١٨ ، -٥٤ ، ...)$ تناقصية.

٣ متناوبة الإشارة (تذبذبية) إذا كان : $ر < ٠$

فمثلًا : إذا كان : $أ = ٣$ ، $ر = -٢$

فإن المتتابعة الهندسية $(٣ ، -٦ ، ١٢ ، -٢٤ ، ...)$ متناوبة الإشارة.

٤ ثابتة إذا كان : $ر = ١$

فمثلًا : إذا كان : $أ = ٥$ ، $ر = ١$ فإن المتتابعة $(٥ ، ٥ ، ٥ ، ٥ ، ...)$ ثابتة.

الحد العام (النونى) للمتتابعة الهندسية

إذا كانت $(ح_ن)$ متتابعة هندسية حدها الأول $= أ$ ، أساسها $= ر$

فإن حدها العام يكون على الصورة $\boxed{ح_ن = أ ر^{ن-١}}$ حيث $ن$ رتبة الحد.

الصورة العامة للمتتابعة الهندسية

بوضع $ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ...$ فى القانون السابق نحصل على الصورة العامة للمتتابعة الهندسية

وهى : $\boxed{(أ ، أ ر ، أ ر^٢ ، أ ر^٣ ، ...)}$

حيث نلاحظ أن : $ح_١ = أ$ ، $ح_٢ = أ ر$ ، $ح_٣ = أ ر^٢$ ، ...

أى أن : أس ر فى أى حد من حدود المتتابعة الهندسية يقل بمقدار الواحد الصحيح عن رتبة هذا الحد (أى ترتيبه)

ملاحظة

إذا كانت المتتابعة الهندسية منتهية وعدد حدودها $= ن$

فإنه يرمز لحدها الأخير بالرمز ل حيث $\boxed{ل = أ ر^{ن-١}}$ حيث $ن$ عدد الحدود

وتكون الصورة العامة للمتتابعة الهندسية فى هذه الحالة على الصورة :

$(أ ، أ ر ، أ ر^٢ ، ... ، أ ر^{ن-١})$ أ، $(أ ، أ ر ، أ ر^٢ ، ... ، \frac{ل}{ر^٢} ، \frac{ل}{ر} ، ل)$

مثال ٣

أوجد $ح_٦$ ، $ح_{١٠}$ من المتتابعة الهندسية (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ...)

الحل

$أ = ٦$ ، $ر = \frac{١٢}{٦} = ٢$ $\therefore ح_٦ = أ ر^٥ = ٦ \times ٢^٥ = ١٩٢$ ، $ح_{١٠} = أ ر^٩ = ٦ \times ٢^٩ = ٣٠٧٢$

مثال ٤

إذا كان $\frac{١}{٢٤٣}$ هو أحد حدود المتتابعة الهندسية (٢٧ ، ٩ ، ٣ ، ...) فما رتبة هذا الحد ؟

الحل

$أ = ٢٧$ ، $ر = \frac{٩}{٢٧} = \frac{١}{٣}$

$\because ح_ن = أ ر^{ن-١}$ $\therefore \frac{١}{٢٤٣} = ٢٧ \left(\frac{١}{٣}\right)^{ن-١}$ $\therefore \frac{١}{٢٧} \times \frac{١}{٢٤٣} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{ن-١}$

$\therefore \frac{١}{٣^٣} \times \frac{١}{٣^٥} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{ن-١}$ $\therefore \left(\frac{١}{٣}\right)^٨ = \left(\frac{١}{٣}\right)^{ن-١}$ $\therefore ن - ١ = ٨$

$\therefore ن = ٩$ $\therefore$ الحد الذى قيمته $\frac{١}{٢٤٣}$ هو $ح_٩$

تعيين المتتابعة الهندسية

تتعين المتتابعة الهندسية متى علم حدها الأول (أ) وأساسها (ر)

مثال ٥

متتابعة هندسية حدها الثالث يساوى ١٢ وحدها الثامن يساوى ٣٨٤ أوجد المتتابعة.

الحل

$\because ح_٣ = ١٢$ $\therefore أ ر^٢ = ١٢$ (١)

، $\because ح_٨ = ٣٨٤$ $\therefore أ ر^٧ = ٣٨٤$ (٢)

وبقسمة (٢) على (١) : $\therefore \frac{أ ر^٧}{أ ر^٢} = \frac{٣٨٤}{١٢}$

$\therefore ر^٥ = ٣٢$ $\therefore ر^٥ = ٢^٥$

$\therefore ر = ٢$ ، وبالتعويض فى (١) : $\therefore أ = ٣$ $\therefore$ المتتابعة هى (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...)

لاحظ أن :

إذا كان : $ح_س$ ، $ح_ص$ حدين فى متتابعة هندسية

فإن : $ر^{س-ص} = \frac{ح_س}{ح_ص}$

تذكر أن :

١ فرق بين مربعين : $١ - ر^٢ = (١ - ر)(١ + ر)$

٢ فرق بين مكعبين : $١ - ر^٣ = (١ - ر)(١ + ر + ر^٢)$

٣ مجموع المكعبين : $١ + ر^٣ = (١ + ر)(١ - ر + ر^٢)$

٤ $١ + ر^٢ + ر^٤ = (١ - ر + ر^٢)(١ + ر + ر^٢)$

مثال ٦

متتابعة هندسية مجموع حديها الأول والثانى ٧٢ ومجموع حديها الثالث والرابع ٨ ، أوجد المتتابعة.

الحل

$\because$ $ح_١ + ح_٢ = ٧٢$ $\therefore$ $أ + أ ر = ٧٢$ $\therefore$ $أ (١ + ر) = ٧٢$ (١)

، $ح_٣ + ح_٤ = ٨$ $\therefore$ $أ ر^٢ + أ ر^٣ = ٨$ $\therefore$ $أ ر^٢ (١ + ر) = ٨$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) : $\therefore$ $\frac{أ ر^٢ (١ + ر)}{أ (١ + ر)} = \frac{٨}{٧٢}$ $\therefore$ $ر^٢ = \frac{١}{٩}$ $\therefore$ $ر = \pm \frac{١}{٣}$

بالتعويض فى (١) عن $ر = \frac{١}{٣}$: $\therefore$ $أ \left(١ + \frac{١}{٣}\right) = ٧٢$ $\therefore$ $أ = ٥٤$

وبالتعويض فى (١) عن $ر = -\frac{١}{٣}$: $\therefore$ $أ \left(١ - \frac{١}{٣}\right) = ٧٢$ $\therefore$ $أ = ١٠٨$

$\therefore$ المتتابعة هى (٥٤ ، ١٨ ، ٦ ، ...) أ، (١٠٨ ، −٣٦ ، ١٢ ، ...)

مثال ٧

متتابعة هندسية حدودها موجبة ، حدها الخامس يزيد عن حدها الرابع بمقدار ٢٧ ، حدها الرابع يزيد عن حدها الثانى بمقدار ٣٠ ، أوجد هذه المتتابعة.

الحل

$\because$ $ح_٥ - ح_٤ = ٢٧$ $\therefore$ $أ ر^٤ - أ ر^٣ = ٢٧$ $\therefore$ $أ ر^٣ (ر - ١) = ٢٧$ (١)

، $ح_٤ - ح_٢ = ٣٠$ $\therefore$ $أ ر^٣ - أ ر = ٣٠$ $\therefore$ $أ ر (ر^٢ - ١) = ٣٠$

$\therefore$ $أ ر (ر - ١) (ر + ١) = ٣٠$ (٢)

وبقسمة (١) على (٢) : $\therefore$ $\frac{أ ر^٣ (ر - ١)}{أ ر (ر - ١) (ر + ١)} = \frac{٢٧}{٣٠}$ $\therefore$ $\frac{ر^٢}{(ر + ١)} = \frac{٩}{١٠}$

$\therefore$ $١٠ ر^٢ = ٩ ر + ٩$ $\therefore$ $١٠ ر^٢ - ٩ ر - ٩ = ٠$

$\therefore$ $(٢ ر - ٣) (٥ ر + ٣) = ٠$ $\therefore$ $ر = \frac{٣}{٢}$ أ، $ر = \frac{-٣}{٥}$ (مرفوض)

وبالتعويض فى (١) عن $ر = \frac{٣}{٢}$: $\therefore$ $أ \times \frac{٢٧}{٨} \left(\frac{٣}{٢} - ١\right) = ٢٧$

$\therefore$ $أ = ١٦$ $\therefore$ المتتابعة هى : (١٦ ، ٢٤ ، ٣٦ ، ...)

مثال ٨

متتابعة هندسية مجموع حدها الخامس وضعف حدها السادس يساوى عشرة أمثال حدها الرابع ، حدها الثالث = ٤٠ ، أوجد المتتابعة.

الحل

$\because$ $ح_٥ + ٢ ح_٦ = ١٠ ح_٤$ $\therefore$ $أ ر^٤ + ٢ أ ر^٥ = ١٠ أ ر^٣$ وبقسمة الطرفين على $أ ر^٣$

$\therefore$ $ر + ٢ ر^٢ = ١٠$ $\therefore$ $٢ ر^٢ + ر - ١٠ = ٠$ $\therefore$ $(٢ ر + ٥) (ر - ٢) = ٠$

$\therefore$ $ر = -\frac{٥}{٢}$ أ، $ر = ٢$ ، $\because$ $ح_٣ = ٤٠$ $\therefore$ $أ ر^٢ = ٤٠$

وبالتعويض عن ر $= \frac{-٥}{٢}$: ∴ أ $\times \frac{٢٥}{٤} = ٤٠$ ∴ أ $= \frac{٣٢}{٥}$

∴ المتتابعة هى $\left(\frac{٣٢}{٥}\right.$ ، −١٦ ، ٤٠ ، ...)

، وبالتعويض عن ر = ٢ : ∴ أ × ٤ = ٤٠ ∴ أ = ١٠

∴ المتتابعة هى (١٠ ، ٢٠ ، ٤٠ ، ...)

مثال ٩

موظف راتبه الشهرى ١٢٠٠ جنيه ويحصل على علاوة سنوية ثابتة بنسبة ٦ ٪ زيادة عن راتب السنة السابقة مباشرة فكم يكون راتبه بالجنيه بعد مرور ٦ سنوات ؟

الحـــل

بعد مرور ١ سنة يكون المرتب = ١٢٠٠ + ١٢٠٠ × ٦ ٪ = ١٢٠٠ (١ + ٠,٠٦) = ١٢٠٠ × (١,٠٦)

بعد مرور ٢ سنة يكون المرتب = ١٢٠٠ × (١,٠٦) + ١٢٠٠ × (١,٠٦) × ٦ ٪ = ١٢٠٠ (١,٠٦) [١ + ٦ ٪]

$= ١٢٠٠ (١,٠٦)^{٢}$

∴ المرتبات بعد الزيادة تكون متتابعة هندسية هى

$(١٢٠٠ \times (١,٠٦) ، ١٢٠٠ \times (١,٠٦)^{٢} ، ...)$

أى أ = ١٢٠٠ × ١,٠٦

، ر = ١ + ٦٪ = ١ + ٠,٠٦ = ١,٠٦

∴ المرتب بعد مرور ٦ سنوات

$= ح_{٦}$ (من المتتابعة السابقة) $=$ أ $ر^{٥}$

$= ١٢٠٠ \times (١,٠٦) \times (١,٠٦)^{٥}$

$= ١٢٠٠ \times (١,٠٦)^{٦} \simeq ١٧٠٢$ جنيه

ملاحظتان

١ المتتابعة الهندسية فى الحل الأول هى متتابعة المرتبات بعد الزيادة فيكون المرتب بعد مرور $ن$ سنة هو $ح_{ن} =$ أ $ر^{ن-١}$ حيث أ هو المرتب بعد أول زيادة.

٢ المتتابعة الهندسية فى الحل الثانى هى متتابعة تشمل المرتب الأصلى والمرتبات بعد الزيادة فيكون المرتب بعد مرور $ن$ سنة هو $ح_{ن+١} =$ أ $ر^{ن}$ حيث أ هو المرتب قبل أى زيادة.

حل آخر : المرتب الأصلى والمرتبات بعد الزيادة تكون متتابعة هندسية

هى $(١٢٠٠ ، ١٢٠٠ \times ١,٠٦ ، ١٢٠٠ \times (١,٠٦)^{٢} ، ...)$

أى أ = ١٢٠٠ ، ر = ١,٠٦

ويكون المرتب بعد مرور ٦ سنوات $= ح_{٧}$ (من المتتابعة السابقة) $=$ أ $ر^{٦} = ١٢٠٠ \times (١,٠٦)^{٦} \simeq ١٧٠٢$ جنيه.

الأوساط الهندسية

تعريف

إذا كانت : أ ، ب ، حـ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية فإن ب هى الوسط الهندسى بين أ ، حـ

ويكون : $\frac{ب}{أ} = \frac{حـ}{ب}$ ومنها $ب^{٢} = أ حـ$ $\therefore ب = \pm \sqrt{أ حـ}$

أى أن الوسط الهندسى لكميتين لهما نفس الإشارة (موجبتين معًا أو سالبتين معًا) هو الجذر التربيعى لحاصل ضربهما.

فمثلًا :

- الوسط الهندسى للكميتين ٢ ، ٣٢ $= \pm \sqrt{٢ \times ٣٢} = \pm \sqrt{٦٤} = \pm ٨$
- الوسط الهندسى للكميتين $أ^{٣} ب$ ، $أ ب^{٣}$ $= \pm \sqrt{أ^{٣} ب \times أ ب^{٣}} = \pm \sqrt{أ^{٤} ب^{٤}} = \pm أ^{٢} ب^{٢}$
- لا يوجد وسط هندسى للعددين −٤ ، ٩ لأنهما مختلفان فى الإشارة.

ملاحظة (الوسط الهندسى لعدة كميات)

يعرف الوسط الهندسى لعدة كميات موجبة عددها (ن) بأنه الجذر النونى الموجب لحاصل ضرب هذه الكميات جميعًا.

فمثلًا : الوسط الهندسى للكميات الموجبة أ ، ب ، حـ $= \sqrt[٣]{أ ب حـ}$

والوسط الهندسى للأعداد الستة ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٩ ، ٣٦ ، ٣ $= \sqrt[٦]{٢ \times ٤ \times ٦ \times ٩ \times ٣٦ \times ٣} = \sqrt[٦]{٤٦٦٥٦} = ٦$

مثال ١٠

عددان موجبان وسطهما الحسابى = ٥٠ ، وسطهما الهندسى = ٤٠ ، أوجد العددين.

الحل

نفرض أن العددين هما : س ، ص

$\because$ الوسط الحسابى = ٥٠ $\therefore \frac{س + ص}{٢} = ٥٠$

$\therefore س + ص = ١٠٠$ $\therefore ص = ١٠٠ - س$ (١)

، $\because$ الوسط الهندسى = ٤٠ $\therefore \sqrt{س ص} = ٤٠$

$\therefore س ص = ١٦٠٠$ (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) :

$\therefore س (١٠٠ - س) = ١٦٠٠$ $\therefore س^{٢} - ١٠٠ س + ١٦٠٠ = ٠$

$\therefore (س - ٢٠) (س - ٨٠) = ٠$ $\therefore س = ٢٠$ أ، س = ٨٠

ص = ٨٠ أ، ص = ٢٠ $\therefore$ العددان هما : ٢٠ ، ٨٠

مثال ١١

إذا علم أن : أ − ٢ ، أ − ١ ، ٣ أ − ٥ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية فما قيمة أ ؟

الحل

∵ أ − ٢ ، أ − ١ ، ٣ أ − ٥ حدود متتالية فى متتابعة هندسية.

∴ أ − ١ وسط هندسى بين أ − ٢ ، ٣ أ − ٥ ∴ $(أ - ١)^{٢} = (أ - ٢)(٣ أ - ٥)$

∴ $أ^{٢} - ٢ أ + ١ = ٣ أ^{٢} - ١١ أ + ١٠$ ∴ $٢ أ^{٢} - ٩ أ + ٩ = ٠$

∴ $(٢ أ - ٣)(أ - ٣) = ٠$ ∴ أ = ٣ أ، $أ = \frac{٣}{٢}$

العلاقة بين الوسط الحسابى والوسط الهندسى لعددين

الوسط الحسابى لعددين حقيقيين موجبين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسى.

الإثبات : نفرض أن العددين هما أ ، ب وأن ع وسطهما الحسابى ، هـ وسطهما الهندسى الموجب

∴ $ع = \frac{أ + ب}{٢}$ ، $هـ = \sqrt{أ ب}$

∴ $ع - هـ = \frac{أ + ب}{٢} - \sqrt{أ ب} = \frac{أ + ب - ٢\sqrt{أ ب}}{٢} = \frac{أ - ٢\sqrt{أ ب} + ب}{٢} = \frac{(\sqrt{أ} - \sqrt{ب})^{٢}}{٢} > ٠$ (موجب)

∴ ع > هـ وحيث إن الوسط الهندسى الموجب أكبر من الوسط الهندسى السالب.

∴ الوسط الحسابى لعددين حقيقيين موجبين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسى. (وهو المطلوب)

ملاحظة

بفرض أ ، ب ، حـ ثلاثة أعداد حقيقية موجبة :

١ إذا كانت أ ، ب ، حـ ثلاثة حدود متتالية فى متتابعة حسابية فإن الوسط الحسابى بين أ ، حـ هو ب ، والوسط الهندسى بين أ ، حـ هو $\sqrt{أ حـ}$ وحسب النظرية السابقة يكون $ب > \sqrt{أ حـ}$

٢ إذا كانت أ ، ب ، حـ ثلاثة حدود متتالية فى متتابعة هندسية فإن الوسط الحسابى بين أ ، حـ هو $\frac{أ + حـ}{٢}$ ، والوسط الهندسى بين أ ، حـ هو ب وحسب النظرية السابقة يكون $\frac{أ + حـ}{٢} > ب$

٣ لأى عددين حقيقيين موجبين متساويين يكون الوسط الحسابى للعددين مساويًا لوسطهما الهندسى الموجب.

أى أنه : إذا كان : أ = ب فإن : $\frac{أ + ب}{٢} = \sqrt{أ ب}$

مثال ١٢

إذا كانت أ ، ب ، حـ ، ء أربع كميات موجبة متتالية من متتابعة هندسية فأثبت أن :

١ أ + ء > ب + حـ ٢ أ ب + أ ء + ء حـ > ٣ ب حـ

الحل

ب وسط هندسى بين أ ، حـ والوسط الحسابى بين أ ، حـ هو $\frac{أ + حـ}{٢}$

∴ $\frac{أ + حـ}{٢}$ > ب ∴ أ + حـ > ٢ ب (١)

، حـ وسط هندسى بين ب ، ء والوسط الحسابى بين ب ، ء هو $\frac{ب + ء}{٢}$

∴ $\frac{ب + ء}{٢}$ > حـ ∴ ب + ء > ٢ حـ (٢)

وبجمع (١) ، (٢) ∴ أ + حـ + ب + ء > ٢ ب + ٢ حـ ∴ أ + ء > ب + حـ (المطلوب أولًا)

وبضرب (١) فى (٢) ∴ (أ + حـ) (ب + ء) > ٢ ب × ٢ حـ

∴ أ ب + أ ء + حـ ب + حـ ء > ٤ ب حـ

∴ أ ب + أ ء + ء حـ > ٣ ب حـ (المطلوب ثانيًا)

إدخال عدد محدود من الأوساط الهندسية بين كميتين معلومتين

إذا كانت أ ، ب كميتين معلومتين وأدخلنا بينهما ن وسطًا هندسيًا فإننا نحصل على متتابعة هندسية حدها الأول أ وعدد حدودها ن + ٢ وحدها الأخير ب

مثال ١٣

أدخل ٣ أوساط هندسية بين ٢ ، ٣٢

الحل

∵ عدد الأوساط = ٣ ∴ عدد حدود المتتابعة = ٣ + ٢ = ٥ حدود

∴ أ = ٢ ، $ح_٥$ = ٣٢ ∵ $ح_٥$ = أ $ر^٤$ ∴ ٣٢ = ٢ $ر^٤$

∴ $ر^٤$ = ١٦ ∴ ر = ± ٢

- عندما ر = ٢ ∴ الأوساط هى : ٤ ، ٨ ، ١٦
- عندما ر = −٢ ∴ الأوساط هى : −٤ ، ٨ ، −١٦

لاحظ أن :

عند إدخال ن وسط هندسى بين العددين أ ، ب

فإن : $ر^{ن+١} = \frac{ب}{أ}$

مثال ١٤

إذا أدخلت أربعة أوساط هندسية بين عددين وكان مجموع الوسطين الأول والرابع يساوى ٩٠ ومجموع الوسطين الثانى والثالث يساوى ٦٠ فما هما العددان ؟

الحل

∵ عدد الأوساط = ٤
∴ عدد حدود المتتابعة = ٤ + ٢ = ٦ حدود.

وبفرض أن العدد الأول = أ
∴ الوسطين الأول والرابع هما $ح_٢$ ، $ح_٥$

∴ $ح_٢ + ح_٥ = ٩٠$
∴ $أ ر + أ ر^٤ = ٩٠$

∴ $أ ر (١ + ر^٣) = ٩٠$ (١)

، ∵ الوسطين الثانى والثالث هما $ح_٣$ ، $ح_٤$
∴ $أ ر^٢ + أ ر^٣ = ٦٠$

∴ $أ ر^٢ (١ + ر) = ٦٠$ (٢)

بقسمة (١) على (٢) : ∴ $\frac{(١ + ر)(١ - ر + ر^٢)}{ر (١ + ر)} = \frac{٣}{٢}$
∴ $٢ ر^٢ - ٢ ر + ٢ = ٣ ر$

∴ $٢ ر^٢ - ٥ ر + ٢ = ٠$
∴ $(ر - ٢)(٢ ر - ١) = ٠$

∴ $ر = ٢$ أو $ر = \frac{١}{٢}$

- وبالتعويض فى (٢) عن ر = ٢ : ∴ أ = ٥ والعددان هما أ ، $أ ر^٥$ أى ٥ ، ١٦٠
- وبالتعويض فى (٢) عن $ر = \frac{١}{٢}$: ∴ $\frac{٣}{٨}$ أ = ٦٠ ∴ أ = ١٦٠ والعددان هما أ ، $أ ر^٥$ أى ١٦٠ ، ٥

مثال ١٥

ثلاثة أعداد فى تتابع حسابى مجموعها ١٥ وإذا طرح من أولها واحد ومن ثانيها واحد وأضيف لثالثها واحد كونت ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية ، أوجد الأعداد الثلاثة.

الحل

نفرض أن الأعداد الثلاثة هى أ − ى ، أ ، أ + ى

، ∵ مجموعها = ١٥
∴ (أ − ى) + أ + (أ + ى) = ١٥

∴ ٣ أ = ١٥
∴ أ = ٥

∴ الأعداد الثلاثة هى : (٥ − ى) ، ٥ ، (٥ + ى) (١)

∴ الأعداد ٥ − ى − ١ ، ٥ − ١ ، ٥ + ى + ١ فى تتابع هندسى

أى ٤ − ى ، ٤ ، ٦ + ى فى تتابع هندسى
∴ ٤ وسط هندسى بين ٤ − ى ، ٦ + ى

∴ $(٤)^٢ = (٤ - ى)(٦ + ى)$
∴ $١٦ = ٢٤ - ٢ ى - ى^٢$

∴ $ى^٢ + ٢ ى - ٨ = ٠$
∴ $(ى + ٤)(ى - ٢) = ٠$
∴ ى = ٢ أو ى = −٤

- وبالتعويض فى (١) عن ى = ٢
∴ الأعداد الثلاثة هى : ٣ ، ٥ ، ٧

- وبالتعويض فى (١) عن ى = −٤
∴ الأعداد الثلاثة هى : ٩ ، ٥ ، ١

مثال (١٦)

ثلاثة أعداد فى تتابع هندسى مجموعها ٢١ وإذا أضيف لثانيها $١\frac{١}{٢}$ كانت النواتج فى تتابع حسابى.

أوجد الأعداد الثلاثة الأصلية.

الحــل

نفرض أن الأعداد الثلاثة هى : أ ، أ ر ، أ ر^{٢}

∵ مجموعها = ٢١ ∴ أ + أ ر + أ ر^{٢} = ٢١ ∴ أ (١ + ر + ر^{٢}) = ٢١ (١)

، أ ، أ ر + $\frac{٣}{٢}$ ، أ ر^{٢} فى تتابع حسابى.

∴ أ ر + $\frac{٣}{٢}$ وسط حسابى بين أ ، أ ر^{٢} ∴ (أ ر + $\frac{٣}{٢}$) × ٢ = أ + أ ر^{٢}

∴ ٢ أ ر + ٣ = أ + أ ر^{٢} ∴ أ ر^{٢} − ٢ أ ر + أ = ٣

∴ أ (ر^{٢} − ٢ ر + ١) = ٣ (٢)

بقسمة (١) على (٢) ∴ $\frac{١ + ر + ر^{٢}}{ر^{٢} - ٢ ر + ١} = ٧$ ∴ ٧ ر^{٢} − ١٤ ر + ٧ = ١ + ر + ر^{٢}

∴ ٦ ر^{٢} − ١٥ ر + ٦ = ٠ ∴ ٢ ر^{٢} − ٥ ر + ٢ = ٠

∴ (ر − ٢) (٢ ر − ١) = ٠ ∴ ر = ٢ أ، $\frac{١}{٢}$

- بالتعويض فى (١) عن ر = ٢ ∴ ٧ أ = ٢١ أى أ = ٣

وتكون الأعداد هى : ٣ ، ٦ ، ١٢

- وبالتعويض فى (١) عن ر = $\frac{١}{٢}$ ∴ $\frac{٧}{٤}$ أ = ٢١ أى أ = ١٢

وتكون الأعداد هى : ١٢ ، ٦ ، ٣

ملاحظتان

* إذا كان : (أ ، ب ، جـ ، ...) متتابعة هندسية أساسها (ر) ، (س ، ص ، ع ، ...) متتابعة هندسية أساسها (م) فإن :

١ (أ س ، ب ص ، جـ ع ، ...) تكون متتابعة هندسية أساسها (ر م)

٢ (أ ك ، ب ك ، جـ ك ، ...) تكون متتابعة هندسية أساسها (ر) حيث ك ≠ ٠

٣ ($\frac{أ}{ك}$ ، $\frac{ب}{ك}$ ، $\frac{جـ}{ك}$ ، ...) تكون متتابعة هندسية أساسها (ر) حيث ك ≠ ٠

٤ (أ^{ك} ، ب^{ك} ، جـ^{ك} ، ...) تكون متتابعة هندسية أساسها (ر^{ك})

* إذا كان : (ح$_{١}$ ، ح$_{٢}$ ، ح$_{٣}$ ، ... ، ح$_{ن-١}$ ، ح$_{ن}$) متتابعة هندسية

فإن : ح$_{١}$ ح$_{ن}$ = ح$_{٢}$ ح$_{ن-١}$ = ح$_{٣}$ ح$_{ن-٢}$ = ... وهكذا ...

تمارين 5
على المتتابعة الهندسية

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

تمارين على تعريف المتتابعة الهندسية وحدها العام وتعيين المتتابعة الهندسية

(١) الحد الخامس من المتتابعة $(ح_{ن})$ حيث $ح_{ن} = ٢ \times (٣)^{ن - ١}$ يساوى ....

(أ) ٨١ (ب) ١٦٢ (جـ) ٣٢٤ (د) ٢٤٣

(٢) الحد الرابع فى المتتابعة الهندسية $(\sqrt[٤]{٣}$ ، $\sqrt[٨]{٣}$ ، ١ ، ...) هو ....

(أ) $\sqrt[١٦]{٣}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt[٤]{٣}}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt[٨]{٣}}$ (د) $\sqrt[٣٢]{٣}$

(٣) فى المتتابعة الهندسية $(ح_{ن})$ = (–٢٥٦٠ ، ١٢٨٠ ، ... ، –١٠) فإن الحد الرابع من النهاية = ...

(أ) ٤٠ (ب) –٤٠ (جـ) ٨٠ (د) –٨٠

(٤) أى مما يأتى يكون متتابعة هندسية ؟

(أ) (٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ...) (ب) (٣ ، ٣٣ ، ٣ ، ٣٣ ، ...)

(جـ) (٥ ، –٥ ، ٥ ، –٥ ، ...) (د) (١ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ...)

(٥) جميع المتتابعات الآتية هندسية ما عدا المتتابعة ....

(أ) (٣ ، –٦ ، ١٢ ، –٢٤ ، ...) (ب) (لو$أ$ ، لو$أ^{٢}$ ، لو$أ^{٣}$ ، لو$أ^{٤}$ ، ...)

(جـ) $(\frac{٣}{٢}$ ، ١ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٤}{٩})$ (د) $(\frac{٣ب}{٢أ}$ ، ٣ ، $\frac{٦أ}{ب}$ ، $\frac{١٢أ^{٢}}{ب^{٢}})$

(٦) المتتابعة الهندسية من بين المتتابعات الآتية هى ....

(أ) $(ح_{ن}) = (٤ن^{٢})$ لكل $ن \geq ١$

(ب) $(ح_{ن})$ = حيث $ح_{ن} = \frac{١}{٤} ح_{ن-١}$ لكل $ن \geq ٢$ ، $ح_{١} = ١$

(جـ) $(ح_{ن}) = (٢^{ن} - ١)$ لكل $ن \geq ١$

(د) $(ح_{ن}) = ($لو $(٣ \times ٢^{ن}))$ لكل $ن \geq ١$

(٧) متتابعة هندسية أساسها = $\frac{١}{٢}$ وحدها الثالث ٢٤ فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٤٨ ، ٢٤ ، ١٢ ، ...) (ب) (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ...)

(جـ) (٩٦ ، ٤٨ ، ٢٤ ، ...) (د) $(\frac{٨}{٣}$ ، ٨ ، ٢٤ ، ...)

(٨) متتابعة هندسية حدها الأول ٢ وحدها السادس ٦٤ فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٢ ، ٨ ، ٣٢ ، ...) (ب) (٢ ، ٤ ، ٨ ، ...)

(جـ) (٢ ، −٤ ، ٨ ، ...) (د) (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...)

(٩) المتتابعة $\left(\frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{٢}{\sqrt{٣}} ، \sqrt{٣} ، ....\right)$ تكون ....

(أ) هندسية وأساسها = ٢ (ب) هندسية وأساسها = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

(جـ) حسابية وأساسها = ١ (د) حسابية وأساسها = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

(١٠) المتتابعة $\left(١٥ ، ٥ ، \frac{٥}{٣} ، ...\right)$ هى متتابعة ....

(أ) حسابية وأساسها −٥ (ب) هندسية وأساسها ٣

(جـ) حسابية وأساسها ٥ (د) هندسية وأساسها $٣^{-١}$

(١١) المتتابعة $\left(\frac{١}{٢٤٣} ، -\frac{١}{٨١} ، \frac{١}{٢٧} ، -\frac{١}{٩} ، \frac{١}{٣}\right)$ هى متتابعة ....

(١) منتهية. (٢) تزايدية. (٣) تذبذبية. (٤) هندسية وأساسها −٣

(أ) (١) فقط. (ب) (١) ، (٢) فقط.

(جـ) (٣) ، (٤) فقط. (د) (١) ، (٣) ، (٤) فقط.

(١٢) الحد النونى للمتتابعة الهندسية (٣ ، −٦ ، ١٢ ، ...) هو ....

(أ) $٣(-٢)^{ن-١}$ (ب) $٣(-٢)^{ن}$ (جـ) $(-٦)^{ن-١}$ (د) $(-٦)^{ن}$

(١٣) الحد النونى للمتتابعة الهندسية $\left(\frac{-١}{٢} ، \frac{١}{٤} ، \frac{-١}{٨} ، ...\right)$ يساوى ....

(أ) $\left(\frac{-١}{٢}\right)^{ن-١}$ (ب) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{ن-١}$ (جـ) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{ن}$ (د) $\left(-\frac{١}{٢}\right)^{ن}$

(١٤) الحد النونى فى المتتابعة الهندسية $(س^{٣} ، س ، س^{-١} ، ...)$ هو ....

(أ) $س^{٥-٢ن}$ (ب) $س^{٥+ن}$ (جـ) $س^{ن-٥}$ (د) $س^{ن-١}$

(١٥) إذا كانت (−١ ، −٥ ، −٢٥ ، −١٢٥ ، ...) متتابعة هندسية فإن .... لكل $ن > ١$

(أ) $ح_{ن} = \frac{١}{٥} ح_{ن-١}$ (ب) $ح_{ن} = -٥ ح_{ن-١}$

(جـ) $ح_{ن} = ١٠ ح_{ن-١}$ (د) $ح_{ن} = ٥ ح_{ن-١}$

(١٦) الحد التالى فى المتتابعة الهندسية $\left(٨ ، ٦ ، \frac{٩}{٢} ، \frac{٢٧}{٨} ، ...\right)$ هو ....

(أ) $\frac{١١}{٨}$ (ب) $\frac{٢٧}{١٦}$ (جـ) $\frac{٩}{٤}$ (د) $\frac{٨١}{٣٢}$

(١٧) إذا كانت : $س > ٠$ فإن أساس المتتابعة الهندسية (٤ ، س − ٣ ، ٢س + ٦ ، ...)
هو ....

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٢٤

(١٨) إذا كان : (أ ، ب ، جـ ، ...) متتابعة هندسية أساسها (ر) فإن : $\left(\frac{1}{أ^2} ، \frac{1}{ب^2} ، \frac{1}{جـ^2} ، ...\right)$

تمثل متتابعة هندسية أساسها = ...

(أ) ر (ب) $\frac{1}{ر}$ (جـ) $ر^2$ (د) $\frac{1}{ر^2}$

(١٩) إذا كان : أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ فى تتابع هندسى فإن : $\frac{هـ}{جـ}$ = ...

(أ) $\frac{ء}{جـ}$ (ب) $\frac{ب}{أ}$ (جـ) $\frac{جـ}{ب}$ (د) $\frac{ء}{ب}$

(٢٠) المتتابعة الهندسية التى حدها الأول = أ وأساسها = ر تكون تزايدية إذا كان : ....

(أ) أ > ٠ ، −١ < ر < ٠ (ب) أ > ٠ ، ٠ < ر < ١

(جـ) أ < ٠ ، −١ < ر < ٠ (د) أ < ٠ ، ٠ < ر < ١

(٢١) المتتابعة الهندسية التى حدها الأول = أ وأساسها = ر تكون تناقصية إذا كان ....

(أ) أ > ٠ ، −١ < ر < ٠ (ب) أ > ٠ ، ٠ < ر < ١

(جـ) أ < ٠ ، −١ < ر < ٠ (د) أ < ٠ ، ٠ < ر < ١

(٢٢) المتتابعة الهندسية التى حدها الأول = أ وأساسها = ر تكون غير متناوبة الإشارة إذا كان ....

(أ) أ > ٠ ، ر < −١ (ب) أ > ٠ ، −١ < ر < ٠

(جـ) أ > ٠ ، ٠ < ر < ١ (د) أ < ٠ ، −١ < ر < ٠

(٢٣) المتتابعة الهندسية (−٢ ، ٢ ، −٢ ، ٢ ، ...) حدها العام $ح_ن$ = ...

(أ) ٢ × $(-1)^{ن}$ (ب) $(2)^{ن}$ (جـ) ٢ × $(-1)^{ن+1}$ (د) $(-2)^{ن}$

(٢٤) إذا كان : أ ، ب ، جـ فى تتابع هندسى وأساس المتتابعة = ر فإن جميع العبارات الآتية صحيحة

ما عدا ....

(أ) ر = $\frac{ب}{أ}$ (ب) ر = $\frac{جـ}{ب}$ (جـ) ر = $\frac{ب^2}{أ جـ}$ (د) ر = $\frac{ب + جـ}{أ + ب}$

(٢٥) إذا كان : أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية موجبة فى تتابع هندسى فإن : (لو أ ، لو ب ، لو جـ)

تكون ....

(أ) متتابعة هندسية أساسها $\frac{ب}{أ}$ (ب) متتابعة هندسية أساسها لو $\frac{ب}{أ}$

(جـ) متتابعة حسابية أساسها (ب − أ) (د) متتابعة حسابية أساسها لو $\frac{ب}{أ}$

(٢٦) رتبة الحد الذى قيمته $\frac{1}{243}$ من المتتابعة الهندسية (٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ...) تساوى ....

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ٩ (د) ١٠

(٢٧) رتبة أول حد أصغر من الواحد الصحيح فى المتتابعة الهندسية (١٠٢٤ ، ٥١٢ ، ٢٥٦ ، ...)

هى ....

(أ) ٧ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٤

(٢٨) إذا كان الحد الثالث فى متتابعة هندسية = ٤ فإن حاصل ضرب أول ٥ حدود هو ....

(أ) $٤^{٢}$ (ب) $٤^{٣}$ (جـ) $٤^{٥}$ (د) $٤^{٦}$

(٢٩) حاصل ضرب الحد رقم $ن$ من البداية فى الحد رقم $ن$ من النهاية من متتابعة هندسية يساوى ....

(أ) الحد الأخير. (ب) الحد الأول.

(جـ) حاصل ضرب الحد الأول والأخير. (د) لا شىء مما سبق.

(٣٠) إذا كان الحد الثالث من متتابعة هندسية يساوى مربع حدها الأول وحدها الثانى = ٨

فإن حدها السادس = ...

(أ) ١٢٠ (ب) ١٢٤ (جـ) ١٢٨ (د) ١٣٢

(٣١) عدد حدود المتتابعة الهندسية $\left(٢٤٣ ، ٨١ ، ٢٧ ، ... ، \frac{١}{٩}\right)$ يساوى ....

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ٩

(٣٢) رتبة الحد الذى قيمته = ١٠٢٤ فى المتتابعة الهندسية $\left(\frac{١}{٨} ، \frac{١}{٤} ، \frac{١}{٢} ، ١ ، ...\right)$ هى ....

(أ) ١٦ (ب) ١٤ (جـ) ١٢ (د) ١١

(٣٣) فى المتتابعة الهندسية (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ...) تكون رتبة أول حد تزيد قيمته عن ٢٠٠ هو ....

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ٩

(٣٤) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة ، $ح_{٥} - ح_{٤} = ٣٦$ ، $ح_{٤} - ح_{٢} = ٤٠$

فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ...) (ب) $\left(\frac{٦٤}{٣} ، ٣٢ ، ٤٨ ، ...\right)$

(جـ) (٣٢ ، ٤٨ ، ٧٢ ، ...) (د) (٢٤ ، ٣٦ ، ٥٤ ، ...)

(٣٥) متتابعة هندسية حدودها موجبة ، $ح_{٣} + ح_{٤} = ٦ ح_{٢}$ ، $ح_{٧} = ٣٢٠$

فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٢ ، ١٠ ، ٢٠ ، ...) (ب) (٢٤ ، ١٦ ، ٨ ، ...)

(جـ) (٣ ، ١٥ ، ٧٥ ، ...) (د) (٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، ...)

(٣٦) متتابعة هندسية مجموع الحدود الثلاثة الأولى فيها ٢٦ ومجموع الحدود الثلاثة التالية لها ٧٠٢

فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...) (ب) $\left(\frac{٢٦}{٧} ، \frac{٥٢}{٧} ، \frac{١٠٤}{٧} ، ...\right)$

(جـ) (٢ ، –٨ ، ٣٢ ، ...) (د) (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...)

(٣٧) متتابعة هندسية حدها الثالث يزيد عن الحد الثانى بمقدار ٣ ومجموع مربعى الحدين الثانى والثالث ٤٥

والحد الأول موجب فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...) (ب) $\left(\frac{٢}{٣} ، ٢ ، ٦ ، ...\right)$

(جـ) $\left(\frac{٣}{٢} ، ٣ ، ٦ ، ...\right)$ (د) (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...)

(٣٨) متتابعة هندسية عدد حدودها $ن$ وحدها الأول = $أ$ وحدها الأخير = ل

فإن حاصل ضرب حدودها = ...

(أ) $(أ \times ل)^{ن}$ (ب) $(أ \times ل)^{٢ن}$ (جـ) $\left(\frac{ل}{أ}\right)^{\frac{ن}{٢}}$ (د) $(أ \times ل)^{\frac{ن}{٢}}$

(٣٩) متتابعة هندسية فيها $ح_م \times ح_ن = ح_ط \times ح_و$ فإن : $\frac{م + ن}{ط + و}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) −١ (د) −٢

(٤٠) إذا كانت ($أ$ ، $ب$ ، $حـ$) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة

فإن المنحنى : ص = $أ$ س^٢ + $ب$ س + $حـ$

(أ) يمس محور السينات. (ب) يقطع محور السينات فى نقطتين مختلفتين.

(جـ) يقع بأكمله فوق محور السينات. (د) يقع بأكمله تحت محور السينات.

تمارين على الأوساط الهندسية

(٤١) إذا كانت : $أ$ ، $ب$ ، $حـ$ فى تتابع هندسى ، فإن..............

(أ) $ب حـ = أ^٢$ (ب) $أ ب = حـ^٢$ (جـ) $ب^٢ = أ حـ$ (د) $أ ب حـ = ١$

(٤٢) الوسط الهندسى للعددين ٤ ، ١٦ هو ....

(أ) ١٠ (ب) ٦٤ (جـ) ٨ (د) ± ٨

(٤٣) إذا كان : ٣ ، س ، ٩ فى تتابع هندسى فإن : س = ...

(أ) ± ٦ (ب) $٣\sqrt{٣}$ (جـ) $\pm ٣\sqrt{٣}$ (د) $-\sqrt{٣}$

(٤٤) إذا كان الوسط الهندسى للعددين ٩ ، ص هو ١٥ فإن : ص = ...

(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) ٢٥ (د) ٩

(٤٥) الوسط الحسابى لعددين حقيقيين موجبين مختلفين .... وسطهما الهندسى.

(أ) = (ب) > (جـ) < (د) ≥

(٤٦) إذا كانت : $(ح_ن)$ متتابعة هندسية حيث $ح_ن = ٧ \times (٣)^{ن-١}$ فإن الوسط الهندسى بين $ح_٣$ ، $ح_٧$ هو ....

(أ) ± ٥٧٠ (ب) ± ٥٦٧ (جـ) ± ٥٤٠ (د) ± ٥٦٠

(٤٧) إذا كانت (١ ، م ، ٤ م − ٤) متتابعة هندسية فإن : م = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ٤ (د) −٤

(٤٨) أى مما يأتى وسط هندسى للكميتين : $أ^٤$ ، $ب^{١٦}$ ؟

(أ) $أ^٤ ب^{١٦}$ (ب) $أ^٢ ب^٨$ (جـ) $أ^٢ ب^٤$ (د) $أ ب^٤$

(٤٩) الوسط الهندسى للأعداد : ٢ ، ٥ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢٥ يساوى ....

(أ) $٥\sqrt{١٠}$ (ب) ٣٠ (جـ) ٨ (د) ١٠

(٥٠) إذا كانت (س ، ص ، ع) ثلاثة أعداد حقيقية موجبة مختلفة فى تتابع هندسى فإن : ....

(أ) ٢ ص < س + ع (ب) $\text{ص}^{2} > \text{س ع}$

(جـ) ص = س ع (د) $\sqrt{\text{ص}} = \text{س ع}$

(٥١) فى أى متتابعة هندسية يكون $\text{ح}_{1} \times \text{ح}_{7} = $ ....

(أ) $(\text{ح}_{1})^{2}$ (ب) $(\text{ح}_{4})^{2}$ (جـ) $(\text{ح}_{7})^{2}$ (د) $(\text{ح}_{8})^{2}$

(٥٢) إذا كان $(\text{ح}_{\text{ن}})$ متتابعة هندسية حدها الأول = أ وأساسها = أ فإن حدها الخامس هو ....

(أ) أ^{3} (ب) أ^{4} (جـ) أ^{5} (د) أ^{6}

(٥٣) إذا كان الحد الثالث فى متتابعة هندسية حدودها موجبة يساوى المعكوس الضربى للحد الأول فإن الحد الثانى = ...

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٢

(٥٤) إذا كان الوسط الحسابى بين أ ، ب يساوى ٩ ، والوسط الحسابى بين $\frac{1}{\text{أ}}$ ، $\frac{1}{\text{ب}}$ يساوى $\frac{1}{4}$ فإن الوسط الهندسى الموجب بين أ ، ب يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ٦,٥

(٥٥) إذا كانت : س − ١ ، س + ٢ ، ٣ س فى تتابع هندسى فإن : س = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ أ، −٤ (ب) $-\frac{1}{2}$ أ، ٤ (جـ) $\frac{1}{2}$ أ، ٤ (د) $-\frac{1}{2}$ أ، −٤

(٥٦) إذا كانت (٥٤ ، س ، ص ، ٢) متتابعة هندسية فإن : $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = $ ....

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) ٣ (جـ) ٩ (د) ٢٧

(٥٧) إذا كانت (أ ، ب ، حـ) فى تتابع حسابى وأيضًا هندسى فإن ....

(أ) أ = ب ≠ حـ (ب) أ ≠ ب = حـ (جـ) أ ≠ ب ≠ حـ (د) أ = ب = حـ

(٥٨) إذا كان $\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}} ، \frac{\text{ب}}{\text{حـ}} ، \frac{\text{حـ}}{\text{ء}}\right)$ ثلاث حدود متتالية فى متتابعة هندسية فإن : $\frac{\text{أ}}{\text{ء}} = $ ....

(أ) $\frac{\text{ب}}{\text{حـ}}$ (ب) $\frac{\text{ب}^{2}}{\text{حـ}^{2}}$ (جـ) $\frac{\text{ب}^{3}}{\text{حـ}^{3}}$ (د) $\frac{\text{ب}^{4}}{\text{حـ}^{4}}$

(٥٩) إذا كانت $\left(7 ، \text{ك}_{1} ، \text{ك}_{2} ، \text{ك}_{3} ، \text{ك}_{4} ، \frac{7}{32}\right)$ متتابعة هندسية فإن : $\text{ك}_{2} = $ ....

(أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) $\frac{7}{4}$ (د) $\frac{7}{2}$

(٦٠) إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين موجبين وأدخلت ٣ أوساط هندسية موجبة بين أ ، ب لتكون متتابعة هندسية أساسها (ر_{1}) وأدخلت ٧ أوساط هندسية موجبة بين أ ، ب لتكون متتابعة هندسية أخرى أساسها (ر_{2}) فإن : ....

(أ) $\text{ر}_{1} = \frac{7}{3}\,\text{ر}_{2}$ (ب) $(\text{ر}_{1})^{7} = (\text{ر}_{2})^{3}$

(جـ) $\text{ر}_{1} = \sqrt{\text{ر}_{2}}$ (د) $\text{ر}_{1} = (\text{ر}_{2})^{2}$

(٦١) إذا كانت (أ ، ب ، حـ ، ...) متتابعة هندسية تزايدية وكانت (٣ أ ، ٢ ب ، حـ ، ...) متتابعة حسابية فإن أساس المتتابعة الهندسية = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٦٢) عددان موجبان أ ، ب فإذا كان أول ثلاثة حدود فى المتتابعة (٤ ، أ ، ب ، ١٢) تكون فى تتابع هندسى وآخر ثلاثة حدود فى تتابع حسابى فإن : ب − أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) $٢\frac{١}{٢}$ (د) ٣

(٦٣) إذا كانت : $ح_٣$ ، $ح_٨$ ، $ح_{١٨}$ من متتابعة حسابية غير ثابتة تكون متتابعة هندسية ، فإن أساس المتتابعة الهندسية = ...

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) $\frac{٢}{٣}$

(٦٤) إذا كانت أ ، ب ، حـ ثلاثة أعداد حقيقية مختلفة فى تتابع حسابى ومجموعهم = ٣٠ ، أ ، حـ ، ب فى تتابع هندسى ، فإن أكبر هذه الأعداد يساوى ....

(أ) ٦٠ (ب) ٤٠ (جـ) ١٠ (د) −٢٠

(٦٥) إذا كانت (أ ، ب ، حـ ، ...) متتابعة هندسية وكانت : (أ ، أ + ب ، أ + حـ ، ...) متتابعة حسابية فإن : أ : ب : حـ = ...

(أ) ١ : ٣ : ٩ (ب) ١ : ٢ : ٤ (جـ) ١ : ٢ : ٣ (د) ١ : ٤ : ١٦

(٦٦) ثلاث أعداد أ ، ب ، حـ أى منها لايساوى الصفر فى تتابع حسابى وإذا أضيف ١ إلى العدد أ أو ٢ إلى العدد حـ فإنها تصبح فى تتابع هندسى فإن : ب = ...

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (جـ) ١٤ (د) ١٦

(٦٧) إذا كان : أ ، ب ، حـ فى تتابع حسابى فإن : $١٠^{أس + ١٠}$ ، $١٠^{بس + ١٠}$ ، $١٠^{حس + ١٠}$ حيث س ≠ ٠ فى ....

(أ) تتابع حسابى. (ب) تتابع هندسى فقط عندما س > ٠

(جـ) تتابع هندسى فقط عندما س < ٠ (د) تتابع هندسى لكل قيم س

(٦٨) الحد الرابع من المتتابعة الهندسية (س ، ٢س + ٢ ، ٣س + ٣ ، ...) هو ....

(أ) ٢٧ (ب) $\frac{٢٧}{٢}$ (جـ) −٢٧ (د) $\frac{-٢٧}{٢}$

(٦٩) إذا كان الحد الرابع والحد السابع والحد العاشر من متتابعة هندسية هما س ، ص ، ع على الترتيب فإن : ....

(أ) $س^٢ = ص^٢ + ع^٢$ (ب) $ص^٢ = س ع$

(جـ) $س^٢ = ص ع$ (د) س ص ع + س ص − ١ = ٠

(٧٠) إذا كان أ ، ب وسطين حسابيين بين س ، ص وكان ل ، م وسطين هندسيين بين س ، ص فإن : $\frac{أ + ب}{ل م}$ = ...

(أ) $\frac{س + ص}{٢ س ص}$ (ب) $\frac{٢ س ص}{س + ص}$ (جـ) $\frac{س + ص}{س ص}$ (د) $\frac{س ص}{س + ص}$

(٧١) إذا أدخلت عدة أوساط هندسية بين ٢ ، ١٤٥٨ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الأخيرين هى ١ : ٢٧ ، فإن عدد تلك الأوساط = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٨

(٧٢) عددان وسطهما الحسابى (م) ووسطهما الهندسى (ن) فإن مجموع مربعيهما = ...

(أ) ٤ م^{٢} – ٢ ن^{٢} (ب) م^{٢} + ن^{٢} (جـ) ٢ م^{٢} – ن^{٢} (د) ٤ م^{٢}

ثانيًا الأسئلة المقالية

تمارين على تعريف المتتابعة الهندسية وحدها العام وتعيين المتتابعة الهندسية

١ بين أى المتتابعات الآتية هندسية واذكر أساسها واكتب الحدود الثلاثة الأولى من كل متتابعة هندسية :

(١) (ح$_{ن}$) = (٥ × ٢^{ن}) (٢) (ح$_{ن}$) = (٤ ن^{٢})

(٣) (ح$_{ن}$) حيث ح$_{١}$ = ١٢ ، ح$_{ن}$ = $\frac{١}{٤}$ × ح$_{ن-١}$ ، ن > ١

---

٢ أثبت أن المتتابعة (ح$_{ن}$) حيث ح$_{ن}$ = ٢ × ٣$^{ن-٥}$ متتابعة هندسية وأوجد حدها السابع. «١٨»

---

٣ بيِّن أن المتتابعة (ح$_{ن}$) حيث ح$_{ن}$ = $\frac{٣}{٨}$ (٢)^{ن} هى متتابعة هندسية ثم أوجد حدها الثامن ، رتبة الحد الذى قيمته ٧٦٨ «٩٦ ، ١١»

---

٤ أوجد الحدود الأربعة التالية فى كل من المتتابعتين الهندسيتين الآتيتين :

(١) (٨ ، ٤ ، ٢ ، ...) (٢) ($\frac{١}{٢٧}$ ، $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، ...)

---

٥ فى كل مما يأتى أوجد :

(١) متتابعة هندسية مجموع الحدين الأول والثانى منها ٣ ومجموع الحدين الأول والرابع ٦٣
«($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{٢٥}{٢}$ ، ...) أ، (–١ ، ٤ ، –١٦ ، ...)»

(٢) متتابعة هندسية حدها الثانى = ٨ ومجموع حديها الأول والثالث يساوى ٢٠
«(١٦ ، ٨ ، ٤ ، ...) أ، (٤ ، ٨ ، ١٦ ، ...)»

(٣) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة ، وحدها الأول يساوى أربعة أمثال حدها الثالث ، ومجموع حديها الثانى والخامس = ٣٦
«(٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ...)»

(٤) متتابعة هندسية حدها الثالث يساوى المعكوس الضربى لحدها الأول وحدها الخامس يساوى $\frac{١}{١٢٥}$ أثبت أن هناك حلين. ثم أوجد المتتابعتين.
«(٥ ، ١ ، $\frac{١}{٥}$ ، ...) أ، (٥ ، –١ ، $\frac{١}{٥}$ ، ...)»

(٥) متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها : ح$_{١}$ + ح$_{٣}$ = ٢٠ ، ح$_{٣}$ + ح$_{٥}$ = ٥ ح$_{٢}^{٢}$
«(٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...)»

(٦) متتابعة هندسية تزايدية فيها الحد الثالث يزيد عن مجموع الحدين الأولين بمقدار ١٠ والحد الثانى ينقص عن مجموع الحدين الأول والثالث بمقدار ١٤
«(٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...)»

(٧) متتابعة هندسية ثلاثة أمثال مجموع حديها الأول والثالث يساوى مجموع حديها الثانى والرابع ، وحدها الخامس يزيد عن ضعف مجموع حدودها الأربعة الأولى بمقدار ٢
«(٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...)»

(٨) متتابعة هندسية حدودها موجبة ومجموع الحدود الخمسة الأولى منها يساوى ٢٤٢ وحدها الرابع يساوى حدها الثالث مضافًا إليه ستة أمثال حدها الثانى.
«(٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...)»

⑨ متتابعة هندسية فيها : $ح_{٢} + ح_{٤} = ٥$ ، $ح_{١}^{٢} + ح_{٢}^{٢} = ٨٠$
«(٨ ، ٤ ، ٢ ، ...) أو (-٨ ، ٤ ، -٢ ، ...)»

⑩ متتابعة هندسية مجموع حديها الثاني والثالث يساوى ١٢ ، حاصل ضرب حديها الأول والرابع يساوى ٢٧
«(١ ، ٣ ، ٩ ، ...) أو (٢٧ ، ٩ ، ٣ ، ...)»

---

٦ ثلاثة أعداد من متتابعة هندسية مجموعها ٢١ وحاصل ضربها ٦٤ فما هى الأعداد الثلاثة ؟ «١ ، ٤ ، ١٦»

---

٧ مجموع ثلاثة أعداد متتالية موجبة من متتابعة هندسية يساوى ١٤ وحاصل ضرب مربعات هذه الأعداد يساوى ٤٠٩٦ فما هى تلك الأعداد ؟
«٨ ، ٤ ، ٢»

---

٨ ثلاثة أعداد موجبة تكون متتابعة هندسية مجموعها ٢٨ ومجموع مقلوباتها $\frac{٧}{١٦}$
أوجد هذه الأعداد.
«١٦ ، ٨ ، ٤»

---

٩ مجموع الثلاثة حدود الأولى من متتابعة هندسية تساوى ٧ ومجموع مربعاتها تساوى ٢١
أوجد هذه الأعداد.
«٤ ، ٢ ، ١»

---

١٠ متتابعة هندسية أساسها : ٥ ، $ح_{ن+٢} = ١٢٥$ ، $ح_{٢ن-٦} = ٢٥$ أوجد المتتابعة.
«($٥^{-٥}$ ، $٥^{-٤}$ ، $٥^{-٣}$ ، ...)»

---

١١ متتابعة هندسية فيها : $ح_{ن} = ١$ ، $ح_{ن+١} = \frac{١}{٢}$ ، $ح_{٢ن-١} = \frac{١}{٣٢}$ فأوجد قيمة $ن$
ثم أوجد المتتابعة.
«٦ ، (٣٢ ، ١٦ ، ٨ ، ...)»

تمارين على الأوساط الهندسية

١٢ عددان موجبان الفرق بينهما ٦٠ ، وسطهما الهندسى ١٦ فما العددان ؟ «٦٤ ، ٤»

---

١٣ أوجد العددين اللذين وسطهما الحسابى ٥ ووسطهما الهندسى ٣ «٩ ، ١»

---

١٤ أوجد عددين موجبين وسطهما الهندسى الموجب يزيد عن أحدهما بمقدار ٢ ويقل عن الآخر بمقدار ٣
«٤ ، ٩»

---

١٥ الوسط الحسابى لعددين يساوى $\frac{٥}{٣}$ وسطهما الهندسى وأصغر العددين يساوى ٩
أوجد العدد الآخر.
«٨١»

---

١٦ عددان وسطهما الهندسى يزيد ٦ عن أصغر العددين ووسطهما الحسابى ينقص ٩ عن أكبر العددين
أوجد العددين.
«٦ ، ٢٤»

---

١٧ أدخل ستة أوساط هندسية بين $\frac{١}{٤}$ ، ٣٢

---

١٨ أوجد الأوساط الهندسية فى المتتابعة : (٤ ، ... ، ... ، ... ، ... ، ... ، ٢٩١٦)

---

١٩ إذا كان الوسط الهندسى بين : $س + ٢$ ، $ص - ٦$ هو ٥ والوسط الحسابى بين $س$ ، $ص$ هو ٧
فأوجد قيمة كل من : $س$ ، $ص$
«٣ ، ١١»

٢٠ إذا كانت : $\frac{1}{2}$ أ ، ب ، حـ كميات موجبة فى تتابع هندسى **فأثبت أن :** ٤ ب < أ + ٢ حـ

٢١ إذا كانت : س ، ص ، ع ، ل كميات موجبة فى تتابع هندسى. **فأثبت أن :** س + ل > ص + ع

٢٢ أدخلت عدة أوساط هندسية موجبة بين العددين ٢ ، ٤٨٦ فإذا كان مجموع الوسطين الأخيرين يساوى تسعة أمثال مجموع الوسطين الأولين فأوجد عدد هذه الأوساط. «٤»

٢٣ إذا أدخلنا عدة أوساط هندسية بين ٣ ، ٣٨٤ كان حاصل ضرب الوسطين الثانى والأخير يساوى ٢٣٠٤ أوجد عدد الأوساط. «٦»

٢٤ إذا كان : (١ ، س ، ص) فى تتابع حسابى ، (١ ، ص ، س) فى تتابع هندسى
فاحسب قيمة كل من : س ، ص حيث : س ≠ ص ≠ ١ «$\frac{1}{4}$ ، $-\frac{1}{2}$»

٢٥ إذا كانت : ٤ ، ب ، حـ فى تتابع حسابى ، وكانت ٢ ، ب + ٣ ، ٥ حـ فى تتابع هندسى
فأوجد قيمة كل من : ب ، حـ «٧ ، ١٠»

٢٦ ثلاثة أعداد فى تتابع حسابى مجموعها ١٥ وإذا طرح من أولها واحد ومن ثانيها واحد وأضيف لثالثها واحد كونت ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية أوجد الأعداد الثلاثة. «٩ ، ٥ ، ١ أ، ٣ ، ٥ ، ٧»

٢٧ مجموع ثلاثة أعداد فى تتابع هندسى يساوى ٧٠ وإذا ضرب الأول فى ٤ والثانى فى ٥ والثالث فى ٤ كونت النواتج حدود متتابعة حسابية فما هى الأعداد الثلاثة ؟ «٤٠ ، ٢٠ ، ١٠»

٢٨ ثلاثة أعداد موجبة فى تتابع هندسى حاصل ضربهم = ٨ وإذا طرح ١ من العدد الأكبر أصبحت فى تتابع حسابى. أوجد الأعداد. «١ ، ٢ ، ٤»

٢٩ إذا كانت : أ ، ٢ ب ، ٣ حـ ، ٤ ء كميات موجبة فى تتابع هندسى.
فأثبت أن : (أ + ٣ حـ) (ب + ٢ ء) > ١٢ ب حـ

٣٠ إذا كانت : (أ ب ، ب حـ ، حـ ء ، ء هـ) كميات موجبة فى تتابع حسابى. **فأثبت أن :** $حـ^2$ > أ هـ

٣١ إذا كانت : (لو أ ، لو ب ، لو حـ) فى تتابع حسابى. **فأثبت أن :** أ ، ب ، حـ فى تتابع هندسى.

٣٢ إذا كانت : أ ، ٣ ب ، ٢ حـ ، ٦ ء أعدادًا حقيقية موجبة مختلفة تكون متتابعة حسابية.
أثبت أن : (١) ب حـ > أ ء (٢) ٩ $ب^2$ + ٤ $حـ^2$ > ٢ أ حـ + ١٨ ب ء

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت (ح ن) ، (حَ ن) متتابعتين هندسيتين فأى مما يأتى يمثل متتابعة هندسية ؟

(أ) ($ح_ن^ك$) (ب) (ك حَ ن) (جـ) (ح ن حَ ن) (د) كل ما سبق.

② إذا كانت : (أ ، ب ، ج) متتابعة حسابية أساسها (م) فإن : $(٣^{\text{أ}} ، ٣^{\text{ب}} ، ٣^{\text{ج}})$ تكون ....

(أ) متتابعة حسابية أساسها = ٣ (ب) متتابعة هندسية أساسها = ٣

(جـ) متتابعة حسابية أساسها = $٣^{\text{م}}$ (د) متتابعة هندسية أساسها = $٣^{\text{م}}$

③ إذا كان : (أ ، ب ، ج) فى تتابع حسابى وكان (س ، ص ، ع) فى تتابع هندسى

فإن : $\text{س}^{\text{ب}-\text{ج}} \,.\, \text{ص}^{\text{ج}-\text{أ}} \,.\, \text{ع}^{\text{أ}-\text{ب}}$ = ...

(أ) س ص ع (ب) ١ (جـ) س + ص + ع (د) أ + ب + ج

④ إذا كان الوسط الحسابى والوسط الهندسى لجذرى معادلة تربيعية هما ٨ ، ٥ على الترتيب

فإن المعادلة هى ....

(أ) $\text{س}^{٢}$ − ١٦ س − ٢٥ = ٠ (ب) $\text{س}^{٢}$ − ٨ س + ٥ = ٠

(جـ) $\text{س}^{٢}$ − ١٦ س + ٢٥ = ٠ (د) $\text{س}^{٢}$ + ١٦ س − ٢٥ = ٠

⑤ إذا كانت ارتفاعات مثلث أ ب ج المرسومة من رؤوسه أ ، ب ، ج على الترتيب فى تتابع حسابى

فإن ....

(أ) أَ ، بَ ، جَ فى تتابع حسابى. (ب) أَ ، بَ ، جَ فى تتابع هندسى.

(جـ) أَبَ ، أَجَ ، بَجَ فى تتابع حسابى. (د) أَبَ ، بَجَ ، جَأَ فى تتابع هندسى.

⑥ إذا كانت : (أ ، ب ، ج ، ....) م.هـ وكان : $\text{أ}^{\text{س}} = \text{ب}^{\text{ص}} = \text{ج}^{\text{ع}}$ فإن : ....

(أ) $\frac{١}{\text{س}} + \frac{١}{\text{ع}} = \frac{٢}{\text{ص}}$ (ب) $\frac{١}{\text{س}} + \frac{١}{\text{ص}} = \frac{٢}{\text{ع}}$

(جـ) $\frac{١}{\text{ص}} + \frac{١}{\text{ع}} = \frac{٢}{\text{س}}$ (د) $\frac{\text{س}}{\text{ع}} + ١ = \frac{٢}{\text{ص}}$

تطبيقات على المتتابعة الهندسية

١ سيارة ثمنها ١٥٠ ألف جنيه فإذا كان ثمن السيارة يتناقص سنويًا بنسبة ١٠٪
فكم يكون ثمن السيارة بعد ٤ سنوات ؟ «٩٨٤١٥ جنيه»

---

٢ موظف راتبه الشهرى ١٢٠٠ جنيه ويحصل على علاوة سنوية ثابتة بنسبة ١٠٪ زيادة عن راتبه فى السنة السابقة مباشرة. فكم يكون راتبه بالجنيه بعد مرور ٤ سنوات ؟ «١٧٥٦,٩٢ جنيه»

---

٣ يصب الماء فى خزان بمعدل ضعف اليوم السابق له مباشرة ، فإذا صب فى اليوم الأول ١٢ لترًا فبعد كم يومًا يصب فيه ١٥٣٦ لترًا ؟ «٨ أيام»

---

٤ إذا كان عدد الطلاب المقبولين بالمرحلة الثانوية فى إحدى الإدارات التعليمية يزداد بمعدل ٤٪ سنويًا ، وكان عدد الطلاب حاليا ٢٤٠٠ طالب. فكم من المتوقع أن يكون عددهم بعد ٦ سنوات ؟ «٣٠٣٧ طالبًا»

---

٥ تسقط كرة من المطاط من ارتفاع ٢٤٠ مترًا فوق سطح الأرض ، فإذا كانت الكرة ترتد إلى ارتفاع قدره $\frac{٣}{٤}$ ارتفاعها السابق مباشرة ، فكم يكون ارتفاعها بعد الاصطدام السابع ؟ «٣٢ مترًا»

الدرس 6

المتسلسلات الهندسية

المتسلسلة الهندسية

هى مجموع حدود المتتابعة الهندسية.

أى أنه : إذا كانت $(\text{أ} ، \text{أ}\,\text{ر} ، \text{أ}\,\text{ر}^{٢} ، \cdots ، \text{أ}\,\text{ر}^{\text{ن}-١})$ متتابعة هندسية

فإن : $\boxed{\text{أ} + \text{أ}\,\text{ر} + \text{أ}\,\text{ر}^{٢} + \cdots + \text{أ}\,\text{ر}^{\text{ن}-١} = \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{أ}\,\text{ر}^{\text{ر}-١}}$ (حيث ن عدد حدود المتتابعة)

يسمى متسلسلة هندسية.

فمثلًا المتسلسلة : $٣ + ٦ + ١٢ + ٢٤ + ٤٨ + ٩٦ = \sum_{\text{ر}=١}^{٦} ٣\,(٢)^{\text{ر}-١}$ هى مجموع حدود المتتابعة الهندسية

$(٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨ ، ٩٦)$ التى حدها الأول $\text{أ} = ٣$ ، وأساسها $\text{ر} = ٢$

وحدها العام : $\text{ح}_{\text{ن}} = \text{أ}\,\text{ر}^{\text{ن}-١} = ٣\,(٢)^{\text{ن}-١}$ وعدد حدودها = ٦ حدود.

مجموع ن حدًا الأولى من متسلسلة هندسية $(\text{حـ}_{\text{ن}})$

١ إيجاد مجموع ن حدًا من متسلسلة هندسية بمعلومية حدها الأول (أ) وأساسها (ر) :

لأى متسلسلة هندسية حدها الأول = أ ، وأساسها = ر يكون : $\text{حـ}_{\text{ن}} = \text{أ} + \text{أ}\,\text{ر} + \text{أ}\,\text{ر}^{٢} + \cdots + \text{أ}\,\text{ر}^{\text{ن}-١}$ (١)

وبضرب الطرفين فى ر : $\therefore \text{ر}\,\text{حـ}_{\text{ن}} = \text{أ}\,\text{ر} + \text{أ}\,\text{ر}^{٢} + \text{أ}\,\text{ر}^{٣} + \cdots + \text{أ}\,\text{ر}^{\text{ن}}$ (٢)

وبطرح (٢) من (١) : $\therefore \text{حـ}_{\text{ن}} - \text{ر}\,\text{حـ}_{\text{ن}} = \text{أ} - \text{أ}\,\text{ر}^{\text{ن}}$ $\therefore \text{حـ}_{\text{ن}}\,(١ - \text{ر}) = \text{أ}\,(١ - \text{ر}^{\text{ن}})$

$$\therefore \boxed{\text{حـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ}\,(١ - \text{ر}^{\text{ن}})}{١ - \text{ر}} ، \text{ر} \neq ١}$$

ملاحظات

١ يمكن كتابة قانون المجموع على الصورة $\text{حـ}_{\text{ن}} = \dfrac{\text{أ}(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر} - ١}$ ، $\text{ر} \neq ١$

٢ إذا كانت : $\text{ر} = ١$ فإن : $\text{حـ}_{\text{ن}} = \text{أ} + \text{أ} + \text{أ} + \text{أ} + \cdots + \text{أ}$ (ن حدًا) $= \text{ن}\,\text{أ}$

أى أن : $\text{حـ}_{\text{ن}} = \sum\limits_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{أ} = \text{ن}\,\text{أ}$

٣ $\text{حـ}_{\text{ن}} = \sum\limits_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{أ}\,\text{ر}^{\text{ر}-١} = \dfrac{\text{أ}(١ - \text{ر}^{\text{ن}})}{١ - \text{ر}}$ حيث $\text{ر} \neq ١$

مثال ١

أوجد مجموع الحدود الستة الأولى من المتتابعة الهندسية : (٤ ، ١٢ ، ٣٦ ، ...)

الحل

$\text{أ} = ٤$ ، $\text{ر} = \dfrac{١٢}{٤} = ٣$ ، $\text{ن} = ٦$

$\because \text{حـ}_{\text{ن}} = \dfrac{\text{أ}(١ - \text{ر}^{\text{ن}})}{١ - \text{ر}}$ $\therefore \text{حـ}_{٦} = \dfrac{٤(١ - ٣^{٦})}{١ - ٣} = ١٤٥٦$

٢ إيجاد مجموع ن حدًا من متسلسلة هندسية بمعلومية حدها الأول (أ) وحدها الأخير (ل) :

$\because \text{حـ}_{\text{ن}} = \dfrac{\text{أ}(١ - \text{ر}^{\text{ن}})}{١ - \text{ر}} = \dfrac{\text{أ} - \text{أ}\,\text{ر}^{\text{ن}}}{١ - \text{ر}}$ (١) ، $\because \text{ل} = \text{أ}\,\text{ر}^{\text{ن}-١}$

$\therefore \text{ل}\,\text{ر} = \text{أ}\,\text{ر}^{\text{ن}}$ وبالتعويض فى (١) : $\therefore \boxed{\text{حـ}_{\text{ن}} = \dfrac{\text{أ} - \text{ل}\,\text{ر}}{١ - \text{ر}} \text{ ، } \text{ر} \neq ١}$

ويمكن استخدام القانون على الصورة : $\boxed{\text{حـ}_{\text{ن}} = \dfrac{\text{ل}\,\text{ر} - \text{أ}}{\text{ر} - ١} \text{ ، } \text{ر} \neq ١}$

مثال ٢

أوجد قيمة : $٢ + ٦ + ١٨ + \cdots + ٤٨٦$

الحل

$\text{أ} = ٢$ ، $\text{ر} = \dfrac{٦}{٢} = ٣$ ، $\text{ل} = ٤٨٦$

$\because \text{حـ}_{\text{ن}} = \dfrac{\text{أ} - \text{ل}\,\text{ر}}{١ - \text{ر}}$ $\therefore \text{حـ}_{\text{ن}} = \dfrac{٢ - ٤٨٦ \times ٣}{١ - ٣} = ٧٢٨$

$\therefore ٢ + ٦ + ١٨ + \cdots + ٤٨٦ = ٧٢٨$

استخدام رمز التجميع $\sum$

مثال ٣

أوجد : [١] $\sum_{ر=٤}^{١٠} ٥\,(٢)^{ر-١}$ [٢] $\sum_{ر=١}^{٥} ١٢٥\,(٥)^{١-ر}$

الحل

[١] $\sum_{ر=٤}^{١٠} ٥\,(٢)^{ر-١} = ح_٤ + ح_٥ + ح_٦ + \cdots + ح_{١٠}$ من متتابعة هندسية حدها الأول أ = ٥

وأساسها ر = ٢ بدءًا من $ح_٤$ إلى $ح_{١٠}$

، ∵ $ح_٤ = أ\,ر^٣ = ٥ \times ٢^٣ = ٤٠$ ، $ح_{١٠} = أ\,ر^٩ = ٥ \times ٢^٩ = ٢٥٦٠$

، ∵ $جـ_ن = \frac{أ - ل\,ر}{١ - ر}$ وبوضع أ = ٤٠ ، ل = ٢٥٦٠ ، ر = ٢

∴ $جـ_ن = \frac{٤٠ - ٢٥٦٠ \times ٢}{١ - ٢} = ٥٠٨٠$ ∴ $\sum_{ر=٤}^{١٠} ٥\,(٢)^{ر-١} = ٥٠٨٠$

* لاحظ أنه : فى المثال السابق يمكن إيجاد عدد الحدود المطلوب جمعها :

$ن = ١٠ - ٤ + ١ = ٧$ حدود.

واستخدام القانون : $جـ_ن = \frac{أ\,(١ - ر^ن)}{١ - ر}$ فيكون $جـ_٧ = \frac{٤٠\,(١ - ٢^٧)}{١ - ٢} = ٥٠٨٠$

[٢] ∵ $\sum_{ر=١}^{٥} ١٢٥\,(٥)^{١-ر} = \sum_{ر=١}^{٥} ١٢٥\left(\frac{١}{٥}\right)^{ر-١}$ وهى مجموع حدود متتابعة هندسية

حدها الأول أ = ١٢٥ وأساسها ر = $\frac{١}{٥}$ بدءًا من $ح_١$ إلى $ح_٥$

∴ $\sum_{ر=١}^{٥} ١٢٥\,(٥)^{١-ر} = \frac{١٢٥\left(١ - \left(\frac{١}{٥}\right)^٥\right)}{١ - \frac{١}{٥}} = \frac{٧٨١}{٥}$

مثال ٤

أثبت أن المتتابعة $(ح_ن) = \left(٢\,(-٣)^{ن-١}\right)$ متتابعة هندسية وأوجد مجموع الحدود الثمانية الأولى منها.

الحل

∵ $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٢\,(-٣)^ن}{٢\,(-٣)^{ن-١}} = -٣$ = مقدار ثابت هو أساس المتتابعة.

∴ المتتابعة هندسية أساسها (ر) = −٣

بوضع ن = ١   ∴ $ح_١ = ٢$

، ∵ $جـ_ن = \frac{أ\,(١ - ر^ن)}{١ - ر}$ ∴ $جـ_٨ = \frac{٢\left[١ - (-٣)^٨\right]}{١ + ٣} = -٣٢٨٠$

مثال ٥

كم حدًا يلزم أخذه من المتتابعة الهندسية (١,٠ ، −٤,٠ ، ١,٦ ، ...) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع −٩,٨١ ؟

الحل

$أ = ٠,١$ ، $ر = \frac{-٠,٤}{٠,١} = -٤$

، ∵ $ح_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$

∴ $-٨١,٩ = \frac{٠,١[١ - (-٤)^ن]}{١ + ٤}$

∴ $-٨١,٩ = \frac{١ - (-٤)^ن}{١٠ \times ٥}$

∴ $-٨١,٩ \times ٥٠ = ١ - (-٤)^ن$

∴ $(-٤)^ن = ٤٠٩٦ = (-٤)^٦$

∴ $ن = ٦$

∴ عدد الحدود اللازم أخذها = ٦ حدود.

مثال ٦

أوجد أقل عدد من حدود المتتابعة الهندسية (٧ ، ١٤ ، ٢٨ ، ...) يؤخذ ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع أكبر من ٧٠٠٠

الحل

$أ = ٧$ ، $ر = \frac{١٤}{٧} = ٢$

، ∵ $ح_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$

∴ $ح_ن = \frac{٧(١ - ٢^ن)}{١ - ٢}$

∴ $ح_ن = ٧(٢^ن - ١)$

ويكون $ح_ن > ٧٠٠٠$ إذا كان $٧(٢^ن - ١) > ٧٠٠٠$

∴ $٢^ن - ١ > ١٠٠٠$

∴ $٢^ن > ١٠٠١$

وبأخذ لوغاريتم الطرفين : ∴ ن لو ٢ > لو ١٠٠١

∴ $ن > \frac{\text{لو } ١٠٠١}{\text{لو } ٢}$ وباستخدام الآلة الحاسبة $ن > ٩,٩٦٧٢٢٦٢٥٩$

∴ ن = ١٠ أ، ١١ أ، ١٢ أ، ...

∴ أقل عدد من الحدود يمكن أخذه هو ١٠ حدود.

مثال ٧

إذا كان مجموع الخمسة حدود الأولى من متتابعة هندسية يساوى ٣١ ومجموع الخمسة حدود التالية يساوى ٩٩٢ فأوجد المتتابعة وأوجد حاصل ضرب حدودها العشرة الأولى.

الحل

∵ $ح_٥ = ٣١$

∴ $٣١ = \frac{أ(١ - ر^٥)}{١ - ر}$ (١)

، ∵ $ح_{١٠}$ الأولى = ٣١ + ٩٩٢ = ١٠٢٣

∴ $١٠٢٣ = \frac{أ(١ - ر^{١٠})}{١ - ر}$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) : ∴ $\frac{١٠٢٣}{٣١} = \frac{١ - ر^{١٠}}{١ - ر^٥}$

∴ $\frac{١٠٢٣}{٣١} = \frac{(١ - ر^٥)(١ + ر^٥)}{١ - ر^٥}$

$\therefore$ ١ + ر^{٥} = ٣٣ $\qquad$ $\therefore$ ر^{٥} = ٣٢ = ٢^{٥} $\qquad$ $\therefore$ ر = ٢

وبالتعويض فى (١) :

$\therefore$ ٣١ = $\frac{\text{أ}\,(١ - ٣٢)}{١ - ٢}$

$\therefore$ ٣١ = ٣١ أ

$\therefore$ أ = ١

$\therefore$ المتتابعة هى (١ ، ٢ ، ٤ ، ...)

، حاصل ضرب الحدود العشرة الأولى = أ × أ ر × أ ر^{٢} × ... × أ ر^{٩}

= (أ × أ × أ × ... إلى ١٠ عوامل) × (ر × ر^{٢} × ر^{٣} × ... × ر^{٩})

= أ^{١٠} ر$^{١ + ٢ + ٣ + ... + ٩}$ = أ^{١٠} ر$^{\frac{٩}{٢}(١ + ٩)}$ = أ^{١٠} ر^{٤٥}

، $\because$ أ = ١ ، ر = ٢ $\qquad$ $\therefore$ حاصل ضرب الحدود العشرة الأولى = (١)^{١٠} × (٢)^{٤٥} = ٢^{٤٥}

لاحظ أن :

إذا كان : حـ$_{١}$ = مجموع ن حدًا الأولى من حدود متتابعة هندسية

، حـ$_{٢}$ = مجموع ن حدًا التالية لها

فإن : ر^{ن} = $\frac{\text{حـ}_{٢}}{\text{حـ}_{١}}$

حل آخر :

$\because$ حـ$_{٥}$ الأولى = ٣١ $\qquad$ $\therefore$ أ + أ ر + أ ر^{٢} + أ ر^{٣} + أ ر^{٤} = ٣١

$\therefore$ أ (١ + ر + ر^{٢} + ر^{٣} + ر^{٤}) = ٣١ $\qquad$ (١)

$\because$ حـ$_{٥}$ التالية = ٩٩٢ $\qquad$ $\therefore$ أ ر^{٥} + أ ر^{٦} + أ ر^{٧} + أ ر^{٨} + أ ر^{٩} = ٩٩٢

$\therefore$ أ ر^{٥} (١ + ر + ر^{٢} + ر^{٣} + ر^{٤}) = ٩٩٢ $\qquad$ (٢)

وبقسمة (٢) على (١) : $\therefore$ ر^{٥} = ٣٢ = ٢^{٥} $\qquad$ $\therefore$ ر = ٢

وبالتعويض فى (١) : $\therefore$ أ (١ + ٢ + ٤ + ٨ + ١٦) = ٣١

$\therefore$ ٣١ أ = ٣١ $\qquad$ $\therefore$ أ = ١

$\therefore$ المتتابعة هى (١ ، ٢ ، ٤ ، ...) ثم يكمل الحل.

ملاحظة

إذا كان : حـ$_{ن}$ هو مجموع حدود المتتابعة بدءًا من ح$_{١}$ إلى ح$_{ن}$

فإن : $\boxed{\text{ح}_{ن} = \text{حـ}_{ن} - \text{حـ}_{ن-١}}$ لكل ن > ١

فمثلًا : ح$_{٢}$ = حـ$_{٢}$ − حـ$_{١}$ ، ح$_{٣}$ = حـ$_{٣}$ − حـ$_{٢}$ وهكذا.

مثال ٨

إذا كان مجموع ن حدًا الأولى من متتابعة هندسية يعطى بالقانون $ح_{ن}$ = ٢٥٦ − $٢^{٨-ن}$

فأوجد المتتابعة وأوجد كذلك حدها السابع.

الحل

$ح_{ن}$ = ٢٥٦ − $٢^{٨-ن}$

* بوضع ن = ١ ∴ $ح_{١}$ = ٢٥٦ − $٢^{٧}$ = ٢٥٦ − ١٢٨ = ١٢٨ ∴ $ع_{١}$ = ١٢٨

* بوضع ن = ٢ ∴ $ح_{٢}$ = ٢٥٦ − $٢^{٦}$ = ٢٥٦ − ٦٤ = ١٩٢

∴ $ع_{١}$ + $ع_{٢}$ = ١٩٢ ∴ $ع_{٢}$ = ١٩٢ − ١٢٨ = ٦٤

* بوضع ن = ٣ ∴ $ح_{٣}$ = ٢٥٦ − $٢^{٥}$ = ٢٥٦ − ٣٢ = ٢٢٤

∴ $ع_{١}$ + $ع_{٢}$ + $ع_{٣}$ = ٢٢٤ ∴ $ع_{٣}$ = ٢٢٤ − ١٩٢ = ٣٢

∴ المتتابعة هى (١٢٨ ، ٦٤ ، ٣٢ ، ...)

، ∵ $ع_{٧}$ = $ح_{٧}$ − $ح_{٦}$ ∴ $ع_{٧}$ = [٢٥٦ − $٢^{١}$] − [٢٥٦ − $٢^{٢}$] = ٢٥٤ − ٢٥٢ = ٢

مثال ٩

صهريج مياه سعته ٦٣٠٥ لترًا كان فارغًا ثم مُلئ بالماء بواسطة صنبور يصب فى الساعة الأولى ١٢٨ لترًا ، ويصب فى كل ساعة تالية مرة ونصف مرة قدر ما صبه فى الساعة السابقة.

بعد كم ساعة يمتلئ الصهريج ؟

الحل

مقدار ما صبه فى الساعة الأولى = ١٢٨ ∴ ما يصب فى الساعة الثانية = ١٢٨ $\left(\frac{٣}{٢}\right)$

، ما يصب فى الساعة الثالثة = ١٢٨ $\left(\frac{٣}{٢}\right)$ × $\frac{٣}{٢}$ = ١٢٨ $\left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢}$ وهكذا ...

∴ ما يصب فى الصهريج فى الساعات المتتالية يكون متتابعة هندسية هى :

(١٢٨ ، ١٢٨ $\left(\frac{٣}{٢}\right)$ ، ١٢٨ $\left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢}$ ، ...)

وعندما يمتلئ الصهريج يكون مجموع ن حدًا من هذه المتتابعة = سعة الصهريج أى ٦٣٠٥

، ∵ $ح_{ن} = \frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$ ∴ $٦٣٠٥ = \frac{١٢٨\left[١ - \left(\frac{٣}{٢}\right)^{ن}\right]}{١ - \frac{٣}{٢}}$

∴ ٦٣٠٥ = ١٢٨ × ٢ $\left[\left(\frac{٣}{٢}\right)^{ن} - ١\right]$ ∴ $\frac{٦٣٠٥}{١٢٨ × ٢} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^{ن} - ١$

∴ $\left(\frac{٣}{٢}\right)^{ن} = \frac{٦٣٠٥}{١٢٨ × ٢} + ١$ ∴ $\left(\frac{٣}{٢}\right)^{ن} = \frac{٦٥٦١}{٢٥٦} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٨}$

∴ ن = ٨ ∴ الصهريج يمتلئ بعد ٨ ساعات.

المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

تعريف

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية هى التى لها عدد لا نهائى من الحدود.

- وإذا كان مجموعها يقترب من عدد حقيقى (أى يساوى تقريبًا عددًا حقيقيًا) فإنها تكون متقاربة (تقاربية)
- وإذا كان ليس لها مجموع فإنها تكون غير متقاربة (تباعدية)

أى أن : المتسلسلة الهندسية : $أ + أ ر + أ ر^{٢} + \cdots + أ ر^{ن-١} + \cdots = \sum_{ن=١}^{\infty} أ ر^{ن-١}$ متسلسلة غير منتهية.

وتكون : (١) متقاربة (يمكن إيجاد مجموعها) إذا كان :

$|ر| < ١$ **أى أن :** $-١ < ر < ١$

(٢) غير متقاربة (لا يمكن إيجاد مجموعها) إذا كان :

$|ر| > ١$ **أى أن :** $ر > ١$ أ، $ر < -١$

مجموع المتتابعة الهندسية غير المنتهية

∵ مجموع المتتابعة الهندسية يعطى بالقانون : $ح_{ن} = \frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$

وعندما $ن \longrightarrow \infty$ ، $|ر| < ١$ فإن : $ر^{ن} \longrightarrow$ صفر

حينئذ يصبح مجموع عدد لا نهائى من حدود المتتابعة الهندسية : $\boxed{ح_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}}$

مثال ١٠

بين أى من المتسلسلات الهندسية الآتية يمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها وأوجد هذا المجموع إن أمكن :

(١) $٨١ - ٢٧ + ٩ - ٣ + \cdots$

(٢) $-١ - ٢ - ٤ - ٨ - \cdots$

(٣) $\sum_{ن=١}^{\infty} (٢ \times ٣^{١-ن})$

الحل

(١) ∵ $ر = \frac{-٢٧}{٨١} = \frac{-١}{٣}$ ∴ $|ر| = \left|\frac{-١}{٣}\right| = \frac{١}{٣} < ١$

∴ المتسلسلة تقاربية ويمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها.

، ∵ $أ = ٨١$ ∴ $ح_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٨١}{١ - \left(-\frac{١}{٣}\right)} = ٦٠ \frac{٣}{٤}$

(٢) ∵ $ر = \frac{-٢}{-١} = ٢$ ∴ $|ر| = |٢| = ٢ > ١$

∴ المتسلسلة غير تقاربية ولا يمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها.

٣ ∵ $\sum_{ن=١}^{\infty}$ (٢ × ٣$^{١-ن}$) = $\sum_{ن=١}^{\infty}$ (٢ × $(\frac{١}{٣})^{ن-١}$) ∴ أ = ٢ ، ر = $\frac{١}{٣}$

، ∵ |ر| = $|\frac{١}{٣}|$ = $\frac{١}{٣}$ < ١

∴ المتسلسلة تقاربية ويمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها. ∴ $ح_{\infty}$ = $\frac{أ}{١ - ر}$ = $\frac{٢}{١ - \frac{١}{٣}}$ = ٣

مثال ١١

مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية يساوى ٤ وحدها الثانى −٣ أوجد المتتابعة.

الحل

∵ $ح_{\infty}$ = ٤ ∴ $\frac{أ}{١ - ر}$ = ٤ (١)

∵ $ح_{٢}$ = −٣ ∴ أ ر = −٣ (٢)

وبقسمة (٢) على (١) : ∴ أ ر × $\frac{١ - ر}{أ}$ = $\frac{-٣}{٤}$ ∴ ر (١ − ر) = $\frac{-٣}{٤}$

∴ ٤ ر^{٢} − ٤ ر − ٣ = ٠ ∴ (٢ ر − ٣) (٢ ر + ١) = ٠

∴ ر = $\frac{٣}{٢}$ (مرفوض) أ، ر = −$\frac{١}{٢}$ وبالتعويض فى (٢) :

∴ أ = ٦ ∴ المتتابعة هى (٦ ، −٣ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ...)

مثال ١٢

متتابعة هندسية مجموع حدودها إلى ∞ يساوى ٣ ، مجموع مكعبات حدودها إلى ∞ يساوى ٨١ فما هى المتتابعة ؟

الحل

نفرض أن المتتابعة هى : (أ ، أ ر ، أ ر^{٢} ، ...)

، ∵ $ح_{\infty}$ = ٣ ∴ $\frac{أ}{١ - ر}$ = ٣ (١)

، ∵ (أ^{٣} + أ^{٣} ر^{٣} + أ^{٣} ر^{٦} + ...) = ٨١

وهذه متتابعة هندسية غير منتهية حدها الأول = أ^{٣} ، أساسها = ر^{٣} ∴ $\frac{أ^{٣}}{١ - ر^{٣}}$ = ٨١ (٢)

وبتكعيب (١) والقسمة على (٢) : ∴ $\frac{أ^{٣}}{(١ - ر)^{٣}}$ × $\frac{١ - ر^{٣}}{أ^{٣}}$ = $\frac{٢٧}{٨١}$

∴ $\frac{(١ - ر)(١ + ر + ر^{٢})}{(١ - ر)^{٣}}$ = $\frac{١}{٣}$ ∴ $\frac{١ + ر + ر^{٢}}{١ - ٢ ر + ر^{٢}}$ = $\frac{١}{٣}$

∴ ٣ + ٣ ر + ٣ ر^{٢} = ١ − ٢ ر + ر^{٢} ∴ ٢ ر^{٢} + ٥ ر + ٢ = ٠

∴ (ر + ٢) (٢ ر + ١) = ٠

∴ ر = −٢ (مرفوض) أ، ر = −$\frac{١}{٢}$ وبالتعويض فى (١) : ∴ $\frac{أ}{١ + \frac{١}{٢}}$ = ٣

∴ أ = ٣ × $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{٩}{٢}$ ∴ المتتابعة هى : ($\frac{٩}{٢}$ ، −$\frac{٩}{٤}$ ، $\frac{٩}{٨}$ ، ...)

مثال ١٣

متتابعة هندسية أى حد من حدودها يساوى ضعف مجموع الحدود التالية له إلى ∞ من الحدود أوجد أساسها، وإذا كان حدها الثالث = ٩ فأوجد المتتابعة.

الحل

نفرض أن المتتابعة هى (أ ، أ ر ، أ $ر^٢$ ، ...)

، ∵ أى حد من حدودها = ضعف مجموع الحدود التالية له إلى ∞

∴ أ = ٢ (أ ر + أ $ر^٢$ + أ $ر^٣$ + ...) ∴ أ = ٢ × $\frac{أ ر}{١ - ر}$

[لاحظ أن المتتابعة (أ ر ، أ $ر^٢$ ، أ $ر^٣$ ، ...) متتابعة هندسية حدها الأول أ ر وأساسها ر]

∴ أ (١ − ر) = ٢ أ ر وبالقسمة على أ ∴ ١ − ر = ٢ ر

∴ ٣ ر = ١ ∴ ر = $\frac{١}{٣}$

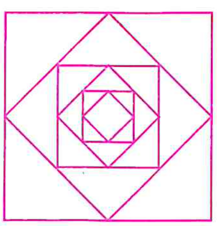
، ∵ $ح_٣$ = ٩ ∴ أ $ر^٢$ = ٩

∴ أ $(\frac{١}{٣})^٢$ = ٩ ∴ أ = ٨١

∴ المتتابعة هى : (٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ...)

مثال ١٤

الشكل المقابل يبين ستة مربعات فى متتابعة لا نهائية فيها كل مربع أصغر مكون من توصيل منتصفات أضلاع المربع الأكبر منه مباشرة فإذا كانت مساحة المربع الأكبر ١٦ وحدة مربعة. أوجد مجموع مساحات هذه المربعات إلى ∞



الحل

∵ مساحة المربع الناتج من توصيل منتصفات أضلاع مربع تساوى $\frac{١}{٢}$ مساحة المربع الأكبر

∴ مجموع مساحات المربعات إلى ∞ يكون متسلسلة هندسية لا نهائية حدها الأول ١٦ وأساسها $\frac{١}{٢}$

∴ $ح_∞$ = $\frac{١٦}{١ - \frac{١}{٢}}$ = ٣٢ وحدة مربعة.

تحويل الكسر العشرى الدائرى إلى كسر اعتيادى

لتحويل الكسر الاعتيادى $\frac{١}{٣}$ إلى كسر عشرى فإننا نجرى عملية القسمة كما هو متبع حيث نلاحظ أن عملية القسمة لا تنتهى وإن الرقم ٣ فى خارج القسمة يظل متكررًا. أى أن

$\frac{١}{٣}$ = ٠,٣٣٣ ..... ونختصر هذا الناتج بأن نكتب $\frac{١}{٣}$ = $٠,\overline{٣}$ وذلك بوضع خط فوق العدد ٣ الذى يتكرر وتقرأ ٠,٣ دائر.

وبالمثل $\frac{٥}{٩}$ = ٠,٥٥٥٥ .... = $٠,\overline{٥}$ ، $\frac{١}{٦}$ = ٠,١٦٦٦٦ ... = $٠,١\overline{٦}$

، $\frac{٥}{٣٣}$ = ٠,١٥١٥١٥ .... = $٠,\overline{١٥}$ ، $\frac{١٤}{١١١}$ = ٠,١٢٦١٢٦١٢٦ ... = $٠,\overline{١٢٦}$

ونلاحظ أن وضع الخط فوق رقم أو رقمين أو ثلاث ... معناه استمرار تكرار هذا الرقم أو الرقمين أو الثلاثة أرقام ... بنفس الترتيب.

وإذا كان العكس هو المطلوب أى تحويل الكسر العشرى الدائر إلى كسر اعتيادى فإننا نضع الكسر العشرى الدائر على صورة مجموع حدود متتابعة هندسية غير منتهية كما يتضح من المثال الآتى :

مثال ١٥

ضع كلاً من الكسور العشرية الدائرية الآتية على صورة كسر اعتيادى :

١ $٠,\overline{٧}$ ٢ $٠,\overline{٢٤}$ ٣ $٣,٤\overline{١٢}$

الحل

١ ∵ $٠,\overline{٧}$ = ٠,٧٧٧٧...

∴ $٠,\overline{٧}$ = ٠,٧ + ٠,٠٧ + ٠,٠٠٧ + ... "متسلسلة هندسية حدها الأول ٠,٧ وأساسها ر = ٠,١"

∴ $٠,\overline{٧} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٠,٧}{١ - ٠,١} = \frac{٠,٧}{٠,٩} = \frac{٧}{٩}$

٢ ∵ $٠,\overline{٢٤}$ = ٠,٢٤٢٤٢٤...

∴ $٠,\overline{٢٤}$ = ٠,٢٤ + ٠,٠٠٢٤ + ٠,٠٠٠٠٢٤ + ...

$= \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٠,٢٤}{١ - ٠,٠١} = \frac{٠,٢٤}{٠,٩٩} = \frac{٨}{٣٣}$

٣ ∵ $٣,٤\overline{١٢}$ = ٣,٤١٢١٢١٢....

∴ $٣,٤\overline{١٢}$ = ٣,٤ + ٠,٠١٢ + ٠,٠٠٠١٢ + ٠,٠٠٠٠٠١٢ + ...

= ٣,٤ + (٠,٠١٢ + ٠,٠٠٠١٢ + ٠,٠٠٠٠٠١٢ + ...)

$= ٣,٤ + \frac{أ}{١ - ر} = ٣,٤ + \frac{٠,٠١٢}{١ - ٠,٠١} = ٣,٤ + \frac{٠,٠١٢}{٠,٩٩} = \frac{٥٦٣}{١٦٥}$

تمارين 6 على المتسلسلات الهندسية

من أسئلة الكتاب المدرسى · فهم · تطبيق · مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

تمارين على المتسلسلة الهندسية ومجموع ن حدًا الأولى من متسلسلة هندسية

(١) مجموع المتتابعة الهندسية التى فيها أ = $\frac{١}{٢}$ ، ر = −٢ ، ن = ١٠ يساوى ....

(أ) −١٧٠,٥ (ب) ١٥٨ (جـ) ١٦٤ (د) −١٦٤

(٢) المتتابعة الهندسية التى حدها الأول أ = ٢ ، وأساسها ر = ١

يكون مجموع ١٠ حدود الأولى منها = ...

(أ) ٢٠ (ب) ٢ (جـ) ١٠ (د) ١٠٢٤

(٣) مجموع المتتابعة الهندسية التى فيها أ = ٩ ، ر = ٣ ، ل = ٦٥٦١ هو ....

(أ) ٢٩٥٢٤ (ب) ٩٨٣٧ (جـ) ٢٩٥٤ (د) ٨٩٣٧

(٤) مجموع ٨ حدود الأولى من المتسلسلة الهندسية : $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{٢}$ + ١ + ٢ + ...

(أ) ٦٣ $\frac{٣}{٤}$ (ب) ٣٢ (جـ) ٣١ $\frac{٣}{٤}$ (د) ٦٤

(٥) مجموع المتتابعة الهندسية (١ ، −$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، ... إلى ٩ حدود) يساوى ....

(أ) $\frac{١٧١}{٢٥٦}$ (ب) $\frac{-٨٥}{١٢٨}$ (جـ) $\frac{-٨٥}{٢٥٦}$ (د) $\frac{١٧٨}{٢٥٦}$

(٦) ٣ + ٦ + ١٢ + ... + ١٩٢ = ...

(أ) ١٩٢ (ب) ٣٨١ (جـ) ١٨٩ (د) ٧٦٥

(٧) مجموع المتتابعة الهندسية (٣ ، −٦ ، ١٢ ، ... ، ٧٦٨) يساوى ....

(أ) −٩٨ (ب) −٣١٤ (جـ) ٤٩٨ (د) ٥١٣

(٨) مجموع الثمانية حدود الأولى من المتتابعة الهندسية ($ح_ن$) حيث $ح_ن$ = ٢ $(٣)^{ن+١}$

يساوى ....

(أ) ٥٦٠١٤ (ب) ٥٨٠٩٤ (جـ) ٥٩٠٤٠ (د) ٤٩٥٠

(٩) مجموع ٥ حدود من المتتابعة الهندسية (١ ، ٣ ، ٩ ، ...) ابتداءً من حدها الثالث يساوى ....

(أ) ١٠٨٩ (ب) ٢٠١٣ (جـ) ٩٩٨ (د) ١٠٥٤

(١٠) فى المتسلسلة الهندسية التى حدها الأول أ = ٢ ، أساسها ر = $\frac{١}{٢}$ يكون $\sum_{ن=١}^{٦}$ أ $ر^{ن-١}$ = ...

(أ) $٣\frac{١٥}{١٦}$ (ب) $\frac{١}{١٦}$ (جـ) $٣\frac{٧}{٨}$ (د) $\frac{١}{٣٢}$

(١١) $\sum_{ن=٣}^{٧}$ (٢ × $٣^{ن-١}$) = ...

(أ) ٢٤٢ (ب) ١٤٥٨ (جـ) ٧٣٨ (د) ٢١٧٨

(١٢) متتابعة هندسية مجموع ن حدًا الأولى منها يعطى بالعلاقة : $ح_ن$ = $٣^{ن+١}$ − ٣

فإن الحد الثالث منها يساوى ....

(أ) ١٨ (ب) ٢٣ (جـ) ٥٤ (د) ٧٧

(١٣) عدد الحدود الذى يلزم أخذها من المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...) ابتداءً من حدها الأول ليكون مجموع هذه الحدود = ٣٨١ هو .... حدًا.

(أ) ٨ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ٧

(١٤) عدد الحدود التى يجب أخذها من المتتابعة الهندسية (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...) ابتداءً من حدها الثانى ليكون مجموع هذه الحدود مساويًا ٦٥٥٨ هو .... حدًا.

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٠

(١٥) المتتابعة الهندسية التى حدها الأول = ٢٤٣ ، حدها الأخير = ١ ، مجموع حدودها ٣٦٤ هى ....

(أ) (٢٤٣ ، ٢٧ ، ٣ ، ...) (ب) (٧٢٩ ، ٢٤٣ ، .... ، ١)

(جـ) (٢٤٣ ، ٨١ ، ... ، ١) (د) (٢٤٣ ، ١٢١,٥ ، ٦٠,٧٥ ، ... ، ١)

(١٦) المتتابعة الهندسية التى مجموعها ١٠٩٣ ، وحدها الأخير ٧٢٩ وأساسها ٣ هى ....

(أ) (١ ، ٣ ، ٩ ، ... ، ٧٢٩) (ب) (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ... ، ٧٢٩)

(جـ) (٣ ، ٩ ، ٢٧ ، ... ، ٧٢٩) (د) (−٣ ، ٩ ، −٢٧ ، ... ، ٧٢٩)

(١٧) أقل عدد من حدود المتتابعة الهندسية (٥ ، ١٥ ، ٤٥ ، ...) يلزم أخذه ابتداءً من حدها الأول ليكون المجموع أكبر من ٦٤٠٠ هو .... حدًا.

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

(١٨) متتابعة هندسية مجموع الخمسة حدود الأولى منها = ٧,٧٥ ومجموع الخمسة حدود التالية لها = ٢٤٨ فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٤ ، ٢ ، ١ ، ...) (ب) ($\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ١ ، ...)

(جـ) (٢ ، ٤ ، ٨ ، ...) (جـ) ($\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ...)

(١٩) متتابعة هندسية مجموع حديها الرابع والسادس = ١٢٠ ومجموع حديها الخامس والسابع = ٢٤٠ فإن مجموع ١٠ حدود الأولى منها = ...

(أ) ٧٢٠ (ب) ١٠٢٣ (جـ) ٣٠٦٩ (د) ٦١٣٨

(٢٠) متتابعة هندسية حدودها موجبة ، مجموع الأثنى عشر حدًا الأولى منها يساوى ٢٧٣ مرة قدر مجموع الأربعة حدود الأولى منها فإن أساس المتتابعة = ...

(أ) ± ٤ (ب) ± ٢ (جـ) ١٧ (د) ٢

(٢١) متتابعة هندسية عدد حدودها (٢ ن) وأساسها (ر) فإن النسبة بين مجموع حدودها الفردية الرتبة إلى مجموع حدودها الزوجية الرتبة تساوى ....

(أ) $\frac{١}{ر}$ (ب) $\frac{١}{ر^{٢}}$ (جـ) $ر^{٢}$ (د) $\frac{ن}{ر}$

(٢٢) متتابعة هندسية عدد حدودها (٢ ن) وكان مجموع كل حدود المتتابعة يساوى خمسة أمثال مجموع الحدود الفردية الرتبة فإن أساس المتتابعة = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

تمارين على المتسلسلات الهندسية غير المنتهية - مجموع المتتابعة الهندسية غير المنتهية

(٢٣) يمكن إيجاد مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية إذا وفقط إذا كان ....

(أ) ر < ١ (ب) ر > ١ (جـ) | ر | < ١ (د) | ر | > ١

(٢٤) مجموع حدود المتتابعة الهندسية : (٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ...) يساوى ....

(أ) $\frac{٢٤٣}{٤}$ (ب) ١١٧ (جـ) ١١٨ (د) $\frac{٢٤٣}{٢}$

(٢٥) مجموع المتتابعة الهندسية (٢٥ ، −٥ ، ١ ، ...) إلى ∞ يساوى ....

(أ) ٢٢ (ب) ٢١ (جـ) $٢٠\frac{٥}{٦}$ (د) $٢١\frac{٣}{٤}$

(٢٦) مجموع المتتابعة الهندسية (٣ ، $\sqrt{٣}$ ، ١ ، ...) إلى ∞ يساوى ....

(أ) $\frac{٥ + ٢\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{٩ + ٣\sqrt{٣}}{٢}$ (جـ) $\frac{٨ + ٤\sqrt{٣}}{٣}$ (د) $٣ + \sqrt{٣}$

(٢٧) مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية ($٣^{-١}$ ، $(-٣)^{-٣}$ ، $٣^{-٥}$ ، ...) يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) ٠,٣٣٣٣ (د) ٠,٣

(٢٨) مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية $(ح_{ن}) = (٣^{٣ - ن})$ يساوى ....

(أ) ١٣ (ب) $١٣\frac{١}{٢}$ (جـ) $١٣\frac{١}{٣}$ (د) $١٢\frac{١}{٢}$

(٢٩) $\sum_{ر=١}^{\infty} ٤ \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر - ١}$ = ...

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) $٤\frac{١}{٢}$ (د) ٢

(٣٠) $\sum\limits_{ن=١}^{\infty} ٢٤ \left(\frac{-١}{٥}\right)^{ن-١}$ = ...

(أ) ٥٠ (ب) ٤٠ (ج) ٢٠ (د) ١٠

(٣١) $\sum\limits_{ر=١}^{\infty} ٢٧ \left(٣\right)^{١-ر}$ = ...

(أ) ٤٠ (ب) $\frac{٨١}{٥}$ (ج) ٣٩ (د) $\frac{٨١}{٢}$

(٣٢) المتسلسلة الهندسية : ٤٨ + ٢٤ + ١٢ + ... باستخدام رمز التجميع تساوى ....

(أ) $\sum\limits_{ر=١}^{\infty} ٤٨ \times ٢^{ر-١}$ (ب) $\sum\limits_{ر=١}^{\infty} ٢٤^{ر-١}$

(ج) $\sum\limits_{ر=١}^{\infty} ٤٨ \times ٢^{١-ر}$ (د) $\sum\limits_{ر=١}^{\infty} ٢٤ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر-١}$

(٣٣) $٠,٢\overline{٤}$ = ...

(أ) $\frac{٦}{٢٥}$ (ب) $\frac{٢}{١١}$ (ج) $\frac{١١}{٤٥}$ (د) $\frac{٨}{٣٣}$

(٣٤) $٠,\overline{٥٧}$ = ...

(أ) $\frac{٥٧}{١٠٠}$ (ب) $\frac{٢٥}{٣٣}$ (ج) $\frac{٢٣}{٤٠}$ (د) $\frac{١٩}{٣٣}$

(٣٥) $٠,\overline{٤٣٢}$ = ...

(أ) $\frac{٢١٤}{٤٩٥}$ (ب) $\frac{٣٨٩}{٩٠٠}$ (ج) $\frac{٤٣}{٩٩}$ (د) $\frac{١٦}{٣٧}$

(٣٦) إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية أساسها $\frac{١}{٣}$ هو $١٣\frac{١}{٢}$

فإن حدها الأول يساوى ....

(أ) ٦ (ب) ٨ (ج) ٩ (د) ١٢

(٣٧) إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية التى حدها الأول ١٢ هو ٩٦

فإن أساسها يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) $\frac{٧}{٨}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٣٨) مجموع عدد لا نهائى من حدود المتتابعة الهندسية $(ح_{ن})$ التى حدها الأول

$ح_{١} = ١$ ، $ح_{ن} = ٢\, ح_{ن+١}$ يساوى ....

(أ) ∞ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٣٩) مجموع مربعات حدود متتابعة هندسية غير منتهية حدها الأول = ١ وأساسها

يساوى ص هو ....

(أ) $\frac{١}{١ - ص}$ (ب) $\frac{١}{١ - ص^{٢}}$ (ج) $\frac{١}{ص^{٢}}$ (د) $\frac{١}{ص}$

(٤٠) مجموع المتسلسلة $\left(١ + \frac{١}{س} + \frac{١}{س^{٢}} + \cdots\right)$ يساوى .... (حيث $|س| > ١$)

(أ) $\frac{١}{١ - س}$ (ب) $\frac{س}{١ - س}$ (ج) $\frac{س}{س - ١}$ (د) $\frac{س}{س^{٢} - ١}$

(٤١) متتابعة هندسية حدها الأول يساوى مجموع الحدود التالية إلى ما لا نهاية فإن أساس هذه المتتابعة يساوى ....

(أ) ٠,٥ (ب) ٠,٣٣٣ (جـ) ٠,٢٥ (د) ٠,٦٦٦

(٤٢) إذا كان الحد الأول من متتابعة هندسية لا نهائية يساوى ضعف مجموع الحدود التالية له فإن أساس المتتابعة = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{-١}{٣}$

(٤٣) إذا كانت : (٩٦ ، س ، ص ، ع ، ٦ ، ...) هى متتابعة هندسية حدودها موجبة فإن مجموع عدد غير منته من حدودها = ...

(أ) ١٨٠ (ب) ١٩٢ (جـ) ٣٨٤ (د) ٧٦٨

(٤٤) متتابعة هندسية فيها $ح_٢$ = ٢٤٠ ، $ح_٥$ = ٣٠ فإن مجموع عدد غير منته من حدودها = ...

(أ) ١٩٢٠ (ب) ٩٦٠ (جـ) ٤٨٠ (د) ٣٦٠

(٤٥) مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية = ٥٤ وحدها الأول = ١٨ فإن المتتابعة هى ....

(أ) (١٨ ، ٦ ، ٢ ، ...) (ب) (١٨ ، ٩ ، $\frac{٩}{٢}$ ، ...)

(جـ) (١٨ ، ١٣,٥ ، $\frac{٨١}{٨}$ ، ...) (د) (١٨ ، ١٢ ، ٨ ، ...)

(٤٦) متتابعة هندسية غير منتهية ، حدودها موجبة ، يزيد حدها الأول عن حدها الثانى بمقدار ٣٠ ، ومجموع عدد غير منته من حدودها يساوى $\frac{١٣٥}{٢}$ فإن هذه المتتابعة هى ....

(أ) (٤٥ ، ١٥ ، ٥ ، ...) (ب) (٦٠ ، ٣٠ ، ١٥ ، ...)

(جـ) (٩٠ ، ٦٠ ، ٢٠ ، ...) (د) (٣٢ ، ٢ ، $\frac{٢}{١٦}$ ، ...)

(٤٧) متتابعة هندسية مجموع حدودها إلى ∞ يساوى ٤ ومجموع مكعبات حدودها إلى ∞ يساوى ١٩٢ فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٦ ، ٣ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ...) (ب) (٨ ، ٦ ، $٤\frac{١}{٢}$ ، ...)

(جـ) (٦ ، ٢- ، $-\frac{٢}{٣}$ ، ...) (د) (٦ ، ٣- ، $\frac{٣}{٢}$ ، ...)

(٤٨) متتابعة هندسية كل حد من حدودها يساوى نصف مجموع الحدود التالية له مباشرة إلى ∞ فإذا كان مجموع حديها الثانى والرابع $٨\frac{٢}{٣}$ فإن المتتابعة هى ....

(أ) ($\frac{٢٧}{٨}$ ، $\frac{٩}{٤}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ...) (ب) (١ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٩}{٤}$ ، ...)

(جـ) (٩ ، ٦ ، ٤ ، ...) (د) (١ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٤}{٩}$ ، ...)

(٤٩) متتابعة هندسية حدودها موجبة ، مجموع حديها الثانى والثالث يساوى ٢٠ ومجموع حدودها الثلاثة الأولى يساوى ٦٥ فإن مجموع حدودها إلى ما لا نهاية يساوى ....

(أ) ٤٢,٥ (ب) ٦٧,٥ (جـ) ٧٨,٥ (د) ١٧٠

(٥٠) إذا كان مجموع أول حدين من متتابعة هندسية لا نهائية يساوى ١ وكان كل حد يساوى ضعف مجموع الحدود التالية له فإن الحد الأول = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(٥١) قيمة المتسلسلة : $(١ + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٣^٢} + \cdots)$ تساوى ....

(أ) ٢ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{١٠}{٩}$

(٥٢) إذا كان مجموع متتابعة هندسية إلى ما لا نهاية ثلاثة أمثال مجموع أول حدين فيها فإن الأساس = ...

(أ) $\pm \frac{\sqrt{٢}}{٣}$ (ب) $\sqrt{\frac{٢}{٣}}$ (جـ) $\pm \sqrt{\frac{٢}{٣}}$ (د) $\frac{\sqrt{٢}}{٣}$

(٥٣) إذا كان : ح $= ١ + أ + أ^٢ + \cdots \infty$ حيث $|أ| < ١$

، ح َ $= ١ + ب + ب^٢ + \cdots \infty$: $|ب| < ١$ فإن : $\frac{ح}{ح َ}$ = ...

(أ) $\frac{أ}{ب}$ (ب) $\frac{أ + ١}{ب + ١}$ (جـ) $\frac{١ - أ}{١ - ب}$ (د) $\frac{١ - ب}{١ - أ}$

(٥٤) متتابعة هندسية لا نهائية حدها الثانى يساوى ٢ ومجموع عدد لانهائى من حدودها يساوى ٨ فإن أساسها = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(٥٥) قيمة المتسلسلة : (١ + جا^٢ هـ + جا^٤ هـ + ...) تساوى .... حيث هـ $\neq$ ن π حيث ن $\in$ ص

(أ) جا^٢ هـ (ب) قا^٢ هـ (جـ) جتا^٢ هـ (د) قتا^٢ هـ

(٥٦) إذا كان : (١ + جا θ + جا^٢ θ + جا^٣ θ + ...) $= ٢ - \sqrt{٢}$

فإن : θ = ... حيث θ $\in$]٠ ، π[

(أ) $\frac{\pi}{٨}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{٣\pi}{٨}$ (د) $\frac{٣\pi}{٤}$

(٥٧) حاصل ضرب $٣^{\frac{١}{٣}} \times ٩^{\frac{١}{٩}} \times ٢٧^{\frac{١}{٢٧}} \times \cdots$ إلى ∞ يساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١

(٥٨) إذا كان ح$_ن$ هو مجموع ن حدًا الأولى من المتسلسلة الهندسية الغير منتهية $١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + \cdots$

وكان ح$_\infty$ − ح$_ن$ $< \frac{١}{١٠٠٠}$ فإن أقل قيمة للعدد ن = ...

(أ) ٨ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (د) ١١

ثانيًا الأسئلة المقالية

تمارين على المتسلسلة الهندسية ومجموع ن حدًا الأولى من متسلسلة هندسية

١ أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين :

(١) $١ + ٣ + ٩ + \cdots + ٦٥٦١$ | (٢) $٢٠ - ١٠ + ٥ - \cdots - \frac{٥}{٣٢}$

٢ أوجد مجموع كل من المتتابعتين الهندسيتين اللتين فيهما :

(١) أ = ٤ ، ر = ٣ ، ن = ٦ | (٢) أ = −٤ ، ر = $-\frac{١}{٢}$ ، ل = $\frac{١}{٨}$

٣ أوجد :

① $\sum_{ر=١}^{٥} ٢ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر-١}$ | ② $\sum_{ر=٥}^{١٢} ٣\,(٢)^{ر-١}$

---

٤ أثبت أن : المتتابعة $(ح_ن) = (١٠ \times ٢^{ن-٢})$ هى متتابعة هندسية ، وأوجد عدد الحدود ابتداءً من الحد الأول التى يجب أخذها من المتتابعة ليكون مجموعها ٢٥٥٥ «٩»

---

٥ متتابعة هندسية حدها الأول ٢ وحدها الرابع ٥٤ أوجد أقل عدد من حدودها يلزم أخذه ابتداءً من الحد الأول ليكون مجموعها أكبر من ٥٠٠٠ «٨»

---

٦ متتابعة هندسية حدها الرابع يساوى ٨ وحدها السابع يساوى ٦٤ أوجد المتتابعة ومجموع العشرة حدود الأولى منها. «(١ ، ٢ ، ٤ ، ...) ، ١٠٢٣»

---

٧ $(ح_ن)$ متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها : $ح_٢ = ٦$ ، $ح_٣ - ح_١ = ٩$ أوجد هذه المتتابعة ومجموع الاثنى عشر حدًا الأولى منها. «(٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...) ، ١٢٢٨٥»

---

٨ متتابعة هندسية حدودها موجبة وحدها الأول يساوى أربعة أمثال حدها الثالث ومجموع حديها الثانى والخامس = ٣٦ أوجد المتتابعة ومجموع العشرة حدود الأولى منها. «(٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ...) ، $١٢٧\frac{٧}{٨}$»

---

٩ متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة فإذا كان : $ح_٣ + ح_٤ = ٦\, ح_٢$ ، $ح_٧ = ٣٢٠$ أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموع الثمانية حدود الأولى منها. «(٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، ...) ، ١٢٧٥»

---

١٠ متتابعة هندسية مجموع حدودها الثلاثة الأولى يساوى ١٣ ، مجموع حدودها الثلاثة التالية لها يساوى ٣٥١ ، أوجد المتتابعة ومجموع الحدود العشرة الأولى منها. «(١ ، ٣ ، ٩ ، ...) ، ٢٩٥٢٤»

---

١١ متتابعة هندسية مجموع الأربعة حدود الأولى منها يساوى ٦٠ ومجموع الحدود الأربعة التالية يساوى ١٦ مرة مجموع الحدود الأربعة الأولى. أوجد المتتابعة. «(٤ ، ٨ ، ١٦ ، ...) أ ، (-١٢ ، ٢٤ ، -٤٨ ، ...)»

---

١٢ إذا كان مجموع ن حدًا الأولى من متتابعة يعطى بالقانون : $جـ_ن = \frac{١}{٢}\,[٣^{ن+٢} - ٩]$ أثبت أن المتتابعة هندسية ثم أوجدها. «(٩ ، ٢٧ ، ٨١ ، ...)»

---

١٣ عند إدخال ن من الأوساط الهندسية بين ٨١ ، $\frac{١}{٧٢٩}$ كان مجموع الوسطين الأولين ٣٦ ، ومجموع الوسطين الأخيرين $\frac{٤}{٢٤٣}$ ، أوجد مجموع هذه الأوساط الهندسية. «$\frac{٩٨٤١}{٢٤٣}$»

---

١٤ إذا كان مجموع التسعة حدود الأولى من متتابعة هندسية يساوى ل ، ومجموع التسعة حدود التالية لها يساوى م ، فأثبت أن : أساس المتتابعة = $\sqrt[٩]{\frac{م}{ل}}$

تمارين على المتسلسلات الهندسية غير المنتهية - مجموع المتتابعة الهندسية غير المنتهية

١٥ بين أى المتسلسلات الهندسية الآتية يمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها ، وأوجد هذا المجموع إن أمكن :

(١) ٧ + ٢١ + ٦٣ + ...
(٢) ٧٥ + ٤٥ + ٢٧ + ...
(٣) $١٥ - ٥ + \frac{٥}{٣} - \frac{٥}{٩} + ...$
(٤) ٩٦ − ٤٨ + ٢٤ − ١٢ + ...

---

١٦ بين أى المتتابعات الهندسية الآتية يمكن إيجاد مجموعها إلى ∞ من الحدود وأوجد هذا المجموع إن أمكن :

(١) (٢٤ ، ١٢ ، ٦ ، ...)
(٢) (٣ ، −٦ ، ١٢ ، ...)
(٣) $(ح_ن) = (٥ \times ٢^{ن})$
(٤) $(ح_ن) = (٢ \times ٥^{١-ن})$

---

١٧ ضع كلاً من الكسور العشرية الدائرية الآتية على صورة كسر اعتيادى :

(١) $٠,\overline{٣}$ «$\frac{١}{٣}$»
(٢) $٠,\overline{١٨}$ «$\frac{٢}{١١}$»
(٣) $\sqrt[٣]{٠,٠\overline{٣٧}}$ «$\frac{١}{٣}$»
(٤) $٠,\overline{٤} + ٠,٢\overline{٣}$ «$\frac{٦١}{٩٠}$»

---

١٨ أوجد :

(١) $\sum_{ر=١}^{\infty} ٥٦ \left(\frac{٣}{٤}\right)^{ر-١}$ «٢٢٤»
(٢) $\sum_{ر=٢}^{\infty} \frac{١}{٨١} (٣)^{١-ر}$ «$\frac{١}{١٦٢}$»

---

١٩ إذا كان الحد الأول من متتابعة هندسية عدد حدودها غير منته = ١٨ ، الحد الرابع منها = $\frac{١٦}{٣}$ ، فما مجموعها ؟ «٥٤»

---

٢٠ متتابعة هندسية مجموع عدد لا نهائى من حدودها ابتداء من حدها الأول يساوى ١٠٨ ، ويزيد حدها الأول عن حدها الثانى بمقدار ١٢ ، أوجد المتتابعة ومجموع حدودها السبعة الأولى.

«(٣٦ ، ٢٤ ، ١٦ ، ...) ، $\frac{٨٢٣٦}{٨١}$»

---

٢١ أوجد المتتابعة الهندسية التى مجموع حديها الأول والثانى = ١٦ ، ومجموع عدد غير منته من حدودها = ٢٥

«(١٠ ، ٦ ، $\frac{١٨}{٥}$ ، ...) أ، (٤٠ ، −٢٤ ، $\frac{٧٢}{٥}$ ، ...)»

---

٢٢ متتابعة هندسية غير منتهية ، حدها الأول = مجموع الحدود التالية له إلى ما لا نهاية ، مجموع حديها الأول والثانى = ٩ ، أوجد هذه المتتابعة. «(٦ ، ٣ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ...)»

---

٢٣ متتابعة هندسية حدودها موجبة وكل حد من حدودها يساوى ضعف مجموع الحدود التالية له مباشرة إلى ∞ من الحدود فإذا كان حدها الثالث يساوى المعكوس الضربى لحدها الخامس فأوجد المتتابعة ومجموع الخمسة حدود الأولى منها. «(٢٧ ، ٩ ، ٣ ، ...) ، $\frac{١٢١}{٣}$»

---

٢٤ متتابعة هندسية كل حد من حدودها يساوى ٧ أمثال مجموع الحدود التالية له مباشرة إلى ∞ فإذا كان حدها الثالث يساوى $\frac{٣}{٨}$ فأوجد المتتابعة. «(٢٤ ، ٣ ، $\frac{٣}{٨}$ ، ...)»

٢٥ إذا كان مجموع متتابعة هندسية غير منتهية $\frac{٣٧٥}{٤}$ ، مجموع حديها الأول والثانى يساوى ٩٠ ، فأثبت أنه توجد متتابعتان وأوجدهما. «(٧٥ ، ١٥ ، ٣ ، ...) أو (١١٢,٥ ، -٢٢,٥ ، ٤,٥ ، ...)»

---

٢٦ ($ح_ن$) متتابعة هندسية فيها : $ح_٢ - ح_٦ = ٤٥$ ، $ح_٤$ الأولى = ١٨٠ ، أوجد المتتابعة ، وبين أنه يمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها وأوجد هذا المجموع. «(٩٦ ، ٤٨ ، ٢٤ ، ...) ، ١٩٢»

---

٢٧ متتابعة هندسية حدودها موجبة ، مجموع حديها الأول والثانى يساوى ١٠٨ ومجموع حديها الثالث والرابع يساوى ١٢ أوجد المتتابعة وبين أنه يمكن إيجاد مجموع عدد غير منته من حدودها وأوجد ذلك المجموع. «(٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ...) ، ١٢١,٥»

---

٢٨ ($ح_ن$) متتابعة هندسية فيها : $ح_١ + ح_٤ = ٧٠$ ، $ح_٢ + ح_٣ = ٦٠$ أثبت أنه :

توجد متتابعتان ، وأنه يمكن إيجاد مجموع عدد غير منته من حدود إحداهما ، وأوجد هذا المجموع بدءًا من حدها الأول. «١٦٢»

---

٢٩ متتابعة هندسية حاصل ضرب الحدود الثلاثة الأولى منها = ٦٤ ومجموع حدودها الثانى والثالث والرابع = ٧ أثبت أنه توجد متتابعتان يمكن جمع إحداهما إلى ∞ وأوجد هذا المجموع. «١٦»

---

٣٠ متتابعة هندسية غير منتهية مجموع حدودها إلى ∞ يساوى ١٨ ومجموع مربعات تلك الحدود إلى ∞ يساوى ١٠٨ أوجد المتتابعة. «(٩ ، $\frac{٩}{٢}$ ، $\frac{٩}{٤}$ ، ...)»

---

٣١ إذا كان مجموع الثلاثة حدود الأولى من متتابعة هندسية ١٤ ومجموع مربعاتها ٨٤ أثبت أنه توجد متتابعتان وأنه يمكن إيجاد مجموع إحداهما إلى ما لا نهاية وأوجد هذا المجموع. «١٦»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) متتابعة هندسية غير منتهية فيها الحدان الأول و الثانى عددان صحيحان موجبان مجموعهما = ٣

فإن : $ح_\infty$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ٦٤ (د) ١٠٢٤

(٢) إذا كان : $\sum_{ر=٠}^{\infty} \frac{أ}{(٤)^ر} = ١٦$ فإن : أ = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٢ (د) ١٦

(٣) متتابعة هندسية لا نهائية حدها الأول = س ومجموع حدودها = ٥ فإن : ....

(أ) س ≥ ١٠ (ب) ٠ < س < ١٠ (جـ) س < -١٠ (د) -١٠ < س < ٠

(٤) متتابعة هندسية فيها $ح_{١٨}$ الأولى $- ح_{١٠}$ الأولى = س ، $ح_{١٥}$ الأولى $- ح_٧$ الأولى = ص

فإن : ر = ...

(أ) $\frac{س}{ص}$ (ب) $\sqrt{\frac{س}{ص}}$ (جـ) $\sqrt[٣]{\frac{س}{ص}}$ (د) $\sqrt{\frac{ص}{س}}$

⑤ متتابعة هندسية حدها الأول (أ) وأساسها (ر) وعدد حدودها (ن) ومجموع حدودها (ح) فإن مجموع مقلوبات هذه الحدود = ...

(أ) $\frac{ح}{أ\,ر^{ن-١}}$ (ب) $\frac{أ\,ح}{ر^{ن-١}}$ (جـ) $\frac{٢\,ح}{أ\,ر^{ن-١}}$ (د) $\frac{ح}{أ^{٢}\,ر^{ن-١}}$

⑥ متتابعة هندسية حدها الأول (أ) وحدها الأخير (ل) وعدد حدودها (ن) فإن حاصل ضرب جميع حدودها هو ....

(أ) $\left(\frac{أ}{ل}\right)^{\frac{ن}{٢}}$ (ب) $(أ\,ل)^{ن}$ (جـ) $أ\,(ل)^{\frac{ن}{٢}}$ (د) $(أ\,ل)^{\frac{ن}{٢}}$

⑦ إذا كان : $س = \sum_{ن=٠}^{\infty} جتا^{٢ن} هـ$ ، $ص = \sum_{ن=٠}^{\infty} جا^{٢ن} هـ$ فإن : ....

(أ) $س\,ص = ١$ (ب) $س\,ص = س + ص$

(جـ) $س + ص = ١$ (د) $س = ص$

⑧ إذا كان : $ح_{ن}$ هو الحد النونى فى متتابعة هندسية حدودها أعداد صحيحة موجبة وكان :

$أ = \sum_{ن=١}^{١٠٠} ح_{٢ن}$ ، $ب = \sum_{ن=١}^{١٠٠} ح_{٢ن+١}$ حيث $أ \neq ب$ فإن أساس المتتابعة الهندسية = ...

(أ) $\frac{أ}{ب}$ (ب) $\frac{ب}{أ}$ (جـ) $\sqrt{\frac{أ}{ب}}$ (د) $\sqrt{\frac{ب}{أ}}$

⑨ مجموع المتسلسلة $(١ + ٢\,س + ٣\,س^{٢} + ٤\,س^{٣} + \cdots$ إلى $\infty)$ لكل $٠ < س < ١$ يساوى ....

(أ) $\frac{١}{١ - س}$ (ب) $\frac{١}{١ + س}$ (جـ) $\frac{١}{١ - ٢\,س}$ (د) $\frac{١}{(١ - س)^{٢}}$

⑩ إذا كان : ل ، م جذرى المعادلة $١٦\,س^{٢} + ١ = ١٦\,س$ فإن : $\sum_{ر=١}^{\infty} ل^{ر} + \sum_{ر=١}^{\infty} م^{ر} =$ ....

(أ) ١٢ (ب) ١٤ (جـ) ١٦ (د) ٣٢

⑪ مجموع العشرين حدًا الأولى من المتتابعة (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٨ ، ٧ ، ١٦ ، ...) هو ....

(أ) ٥١٢ (ب) ١٠٢٣ (جـ) ١١٢٣ (د) ٢١٤٦

تطبيقات حياتية

١ خزان به ٦١٣٨ لترًا من الماء ، يتسرب منه فى أول يوم ٦ لترات وفى اليوم الثانى ١٢ لترًا وفى اليوم الثالث ٢٤ لترًا وهكذا فبعد كم يوم يصبح الخزان فارغًا ؟ «١٠»

٢ **الربط بالأجور :** يتقاضى عامل راتبًا شهريًا قدره ١٢٠٠ جنيه فى العام الأول ثم يزداد أجره بمعدل ١٠٪ سنويًا من مرتب السنة السابقة لها مباشرة. اكتب باستخدام رمز التجميع مجموع ما يتحصل عليه العامل من أجر خلال خمس سنوات ، ثم أوجد هذا المجموع. «٧٣٢٦»

٣ استطاع كريم أن يوفر ١٥٠ جنيهًا فى السنة عندما كان عمره ٦ سنوات ، وكان فى كل سنة تالية يوفر ضعف ما يوفره فى السنة السابقة فإذا كان عمر كريم الآن ١٠ سنوات ، وأراد شراء حاسب آلى بمبلغ ٥٠٠٠ جنيه ، فهل مجموع ما وفره كريم خلال هذه المدة يكفى لشراء الحاسب ؟ فسر إجابتك.

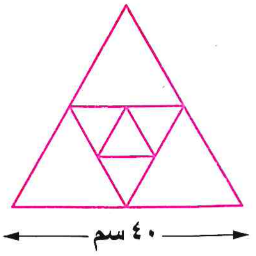
---

٤ **الربط بالتعدين :** منجم للذهب ينتج فى العام الأول ٤٢٠٠ كجم من الذهب ، ويتناقص إنتاج المنجم بمعدل ١٠ ٪ سنويًا من إنتاج السنة السابقة لها مباشرة. أوجد إنتاج المنجم فى السنة الثامنة ، ثم احسب إنتاج المنجم خلال الثمان سنوات الأولى. «٢٠٠٨,٨ ، ٢٣٩٢٠ كجم»

---

٥ **الربط بالهندسة :**

يبين الشكل المقابل مثلثًا متساوى الأضلاع طول ضلعه ٤٠ سم ، رسم مثلث آخر نحو الداخل عن طريق توصيل النقاط التى تمثل منتصفات أضلاع المثلث الأكبر ، ويتم تكرار رسم المثلثات الداخلية بنفس الطريقة فأوجد لأقرب عدد صحيح مجموع محيطات الـ ١٠ مثلثات الأولى فى هذا النمط.



«٢٤٠ سم»

---

٦ أيهما يعطى لك دخلاً أكثر على مدى ٢٥ عامًا : عمل يبدأ بمرتب سنوى قدره ١٠٠٠ جنيه مع علاوة ثابتة سنوية قدرها ٣٠ جنيهًا أو عمل يبدأ بنفس المرتب السنوى مع علاوة سنوية قدرها ٢٪ من قيمة مرتب السنة السابقة ؟ وما الفرق بين الدخلين ؟ «١٩٧٠ جنيهًا»

---

٧ **الربط بالإنتاج :** بئر إنتاجها من البترول فى السنة الأولى ٥٦٠ ألف برميل ، وكان إنتاجها يتناقص سنويًا بمعدل ٤٪ عن إنتاج السنة السابقة لها مباشرة. أوجد أقصى إنتاج لهذه البئر. «١٤ مليون برميل»

---

٨ كرة إذا سقطت من ارتفاع معين عن سطح الأرض ، فإنها ترتد إلى ثلثى الارتفاع الذى سقطت منه ، فإذا أُسقطت من ارتفاع ٩٠ مترًا ، فأوجد مجموع المسافات التى تقطعها حتى تسكن ؟ «٤٥٠ مترًا»

---

٩ **الربط بالهندسة :** مستطيل طوله ١٦ سم وعرضه ١٢ سم ، نصفت أضلاعه ثم نصفت أضلاع الشكل الحادث من توصيل منتصفات الأضلاع وهكذا بتكرار ما سبق إلى اللانهاية. أوجد مجموع محيطات الأشكال المرسومة. «١٩٢ سم»

الوحدة 2

التباديل والتوافيق

دروس الوحدة

الدرس 1

مبدأ العد - التباديل

مبدأ العد الأساسى

تعريف

إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما يساوى $م_١$ طريقة وعدد طرق إجراء عمل ثان $م_٢$ طريقة وعدد طرق إجراء عمل ثالث $م_٣$ طريقة وهكذا ... فإن : عدد طرق إجراء هذه الأعمال معًا = $م_١ \times م_٢ \times م_٣ \times ... \times م_ن$

مثال ١

بكم طريقة يمكن لشخص الدخول والخروج من محل له ثلاثة أبواب مرقمة بالأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ؟

الحل

عدد طرق الدخول = ٣ طرق (يمكن الدخول من الباب رقم ١ أو ٢ أو ٣ أى بثلاث طرق)

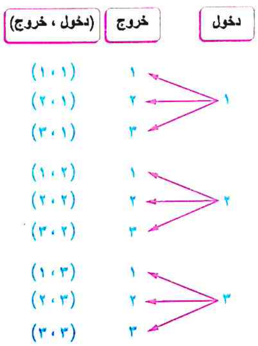
عدد طرق الخروج = ٣ طرق (يمكن الخروج من الباب رقم ١ أو ٢ أو ٣ أى بثلاث طرق)

وبحسب مبدأ العد يكون :

عدد طرق إجراء عمليتى الدخول والخروج معًا = عدد طرق الدخول × عدد طرق الخروج = ٣ × ٣ = ٩ طرق

ملاحظة

مبدأ العد ينتج لنا عدد الطرق التى يمكن بها إجراء عمليتين أو أكثر معًا ويمكن توضيح هذه الطرق باستخدام المخطط البيانى المقابل الذى يعرف باسم الشجرة البيانية :



لاحظ أن :

(١ ، ٢) يعبر عن دخول من الباب ١ وخروج من الباب ٢ بينما (٢ ، ١) يعبر عن دخول من الباب ٢ وخروج من الباب ١ ولذلك فإن : (١ ، ٢) ، (٢ ، ١) يعبران عن طريقتين مختلفتين للدخول والخروج.

مبدأ العد المشروط

مثال ٢

في المثال السابق إذا أضفنا شرطًا ألا يخرج الشخص من نفس الباب الذى دخل منه فكم يكون عدد طرق دخول وخروج هذا الشخص ؟

الحل

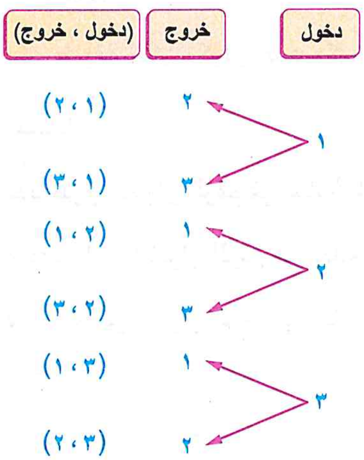
عدد طرق الدخول = ٣ طرق (يمكن الدخول من الباب رقم ١ أو ٢ أو ٣ أى بثلاث طرق)

عدد طرق الخروج = ٢ طريقة (يمكن الخروج من بابين فقط بعد استبعاد الباب الذى دخل منه)

وبحسب مبدأ العد يكون :

عدد طرق إجراء عمليتى الدخول والخروج معًا = ٣ × ٢ = ٦ طرق

والشجرة البيانية المقابلة توضح طرق الدخول والخروج.



مثال ٣

إذا كان لدى شخص ٤ بدل ، ٦ قمصان ، ٣ أربطة عنق.

بكم طريقة يمكن لهذا الشخص الظهور فى زى مكون من بدلة وقميص ورابطة عنق ؟

الحل

عدد طرق اختيار البدلة = ٤ طرق ، عدد طرق اختيار القميص = ٦ طرق

، عدد طرق اختيار رابطة العنق = ٣ طرق.

∴ عدد طرق اختيار الزى = ٤ × ٦ × ٣ = ٧٢ طريقة.

مثال ٤

كم عدد مكون من رقمين يمكن تكوينه من الأرقام ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨ إذا كان :

١ غير مسموح بتكرار أى رقم فى العدد.   ٢ مسموحًا بتكرار الأرقام فى العدد.

الحل

١ عدد طرق اختيار الرقم فى خانة العشرات = ٥ طرق.

، عدد طرق اختيار الرقم فى خانة الآحاد = ٤ طرق.

(لاحظ استبعاد الرقم الذى تم اختياره فى خانة العشرات)

∴ عدد طرق تكوين العدد = ٥ × ٤ = ٢٠ طريقة.

٢ عدد طرق اختيار الرقم فى خانة العشرات = ٥ طرق.

، عدد طرق اختيار الرقم فى خانة الآحاد = ٥ طرق.

(لاحظ عدم استبعاد الرقم الذى تم اختياره فى خانة العشرات)

∴ عدد طرق تكوين العدد = ٥ × ٥ = ٢٥ طريقة.

مثال ٥

بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من ٣ أرقام مختلفة من الأرقام {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣} ؟

الحل

عدد طرق اختيار الرقم فى خانة المئات = ٣ طرق (لاحظ استبعاد العدد صفر من خانة المئات)

، عدد طرق اختيار الرقم فى خانة العشرات = ٣ طرق (لاحظ استبعاد الرقم المختار فى خانة المئات)

، عدد طرق اختيار الرقم فى خانة الآحاد = ٢ طريقة   ∴ عدد طرق تكوين العدد = ٣ × ٣ × ٢ = ١٨ طريقة.

مثال ٦

كم عدد الأعداد المكون كل منها من ثلاثة أرقام مختلفة من مجموعة الأرقام {٢ ، ٣ ، ٧ ، ٨}

بحيث يكون العدد أصغر من ٨٠٠ ؟

الحل

لاحظ أنه لكى يكون العدد أصغر من ٨٠٠ يجب اختيار الرقم فى خانة المئات أقل من ٨

∴ عدد طرق اختيار الرقم فى خانة المئات = ٣ طرق   (لاحظ استبعاد الرقم ٨ من الاختيار)

، عدد طرق اختيار الرقم فى خانة العشرات = ٣ طرق

(لاحظ اختيارنا للرقم ٨ والرقمان الباقيان من الاختيار السابق)

، عدد طرق اختيار الرقم فى خانة الآحاد = ٢ طريقة

∴ عدد طرق تكوين العدد الأصغر من ٨٠٠ = ٣ × ٣ × ٢ = ١٨ طريقة.

مضروب العدد

مضروب العدد الصحيح الموجب ن يكتب على الصورة |ن ويساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من أو تساوى ن

أى أن |ن = ن (ن − ١) × (ن − ٢) × ... × ٣ × ٢ × ١

ويكون عدد عوامل المضروب = ن من العوامل

فمثلًا : • |٥ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ (خمسة عوامل)

• |٩٩ = ٩٩ × ٩٨ × ٩٧ × ... × ٣ × ٢ × ١ (٩٩ عاملًا)

ملاحظات

١ أصغر عوامل |ن يساوى واحد وأكبرهم = ن

٢ |٠ = |١ = ١ ومن ذلك إذا كان |ن = ١ فإن : ن = صفر أ، ن = ١

٣ يمكن كتابة مضروب العدد بدلالة مضروب عدد أقل منه أى أن :

|ن = ن |ن − ١ = ن (ن − ١) |ن − ٢ = ... حيث ن ∈ ص$^+$

فمثلًا : |٥ = ٥ |٤ = ٥ × ٤ |٣ = ...

٤ مضروب أى عدد صحيح موجب يقبل القسمة على مضروب أى عدد صحيح موجب أقل منه

فمثلًا : $\frac{|٥}{|٤} = \frac{٥ \ |٤}{|٤} = ٥$ ، $\frac{|١٢}{|١٠} = \frac{١٢ \times ١١ \ |١٠}{|١٠} = ١٣٢$

مثال ٧

أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة كلًا مما يأتى :

١ $\frac{|١٢}{|١٣}$ ٢ |٥ − |٤ − |٣ ٣ $\frac{|٨}{|٦} - \frac{|٧}{|٥}$

الحل

١ $\frac{|١٢}{|١٣} = \frac{|١٢}{١٣ \ |١٢} = \frac{١}{١٣}$

٢ |٥ − |٤ − |٣ = ٥ × ٤ |٣ − ٤ |٣ − |٣

= ٢٠ |٣ − ٤ |٣ − |٣ = ١٥ |٣ = ١٥ × (٣ × ٢ × ١) = ٩٠

٣ $\frac{|٨}{|٦} - \frac{|٧}{|٥} = \frac{٨ \times ٧ \ |٦}{|٦} - \frac{٧ \times ٦ \ |٥}{|٥} = ٥٦ - ٤٢ = ١٤$

ملاحظة

يمكن استخدام الآلة الحاسبة فى إيجاد مضروب العدد بكتابة العدد ثم الضغط على SHIFT ثم x^{-1} ($x!$) ثم =

فمثلاً : لحساب |٥ نضغط 5 ثم SHIFT ثم x^{-1} ($x!$) ثم = فيظهر الناتج ١٢٠

مثال ٨

أوجد قيمة ن إذا كان :

١ |ن = ٧٢٠

٢ $\frac{|ن - ١}{|ن - ٣} = ٣٠$

٣ ن |٢ن - ١ = ١٢

٤ $\frac{١}{|ن} + \frac{٢}{|ن + ١} - \frac{٥٦}{|ن + ٢} = ٠$

الحل

١ ∵ |ن = ٧٢٠

∴ |ن = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

∴ |ن = |٦ ∴ ن = ٦

لاحظ أنه :

لمعرفة العدد الذى مضروبه	٧٢٠ ÷ ١ = ٧٢٠
= ٧٢٠ نبدأ بقسمة ٧٢٠ ÷ ١	٧٢٠ ÷ ٢ = ٣٦٠
ثم نقسم العدد الناتج ÷ ٢	٣٦٠ ÷ ٣ = ١٢٠
ثم على ٣ ثم على ٤ وهكذا	١٢٠ ÷ ٤ = ٣٠
إلى أن نصل إلى العدد ١ من	٣٠ ÷ ٥ = ٦
ناتج القسمة :	٦ ÷ ٦ = ١

٢ ∵ $\frac{|ن - ١}{|ن - ٣} = ٣٠$

∴ $\frac{(ن - ١)(ن - ٢)\,|ن - ٣}{|ن - ٣} = ٣٠$

∴ (ن - ١) (ن - ٢) = ٦ × ٥

∴ ن - ١ = ٦ ∴ ن = ٧

٣ ∵ ن |٢ن - ١ = ١٢ (بضرب الطرفين × ٢)

∴ ٢ن |٢ن - ١ = ٢٤ ∴ |٢ن = ٢٤

∴ |٢ن = |٤ ∴ ٢ن = ٤ ∴ ن = ٢

٤ ∵ $\frac{١}{|ن} + \frac{٢}{|ن + ١} - \frac{٥٦}{|ن + ٢} = ٠$

∴ $\frac{١}{|ن} + \frac{٢}{(ن + ١)\,|ن} - \frac{٥٦}{(ن + ٢)(ن + ١)\,|ن} = ٠$ (بالضرب × |ن)

∴ $١ + \frac{٢}{ن + ١} - \frac{٥٦}{(ن + ٢)(ن + ١)} = ٠$ ∴ $١ + \frac{٢}{ن + ١} = \frac{٥٦}{(ن + ٢)(ن + ١)}$

∴ $\frac{ن + ١ + ٢}{ن + ١} = \frac{٥٦}{(ن + ٢)(ن + ١)}$ ∴ $ن + ٣ = \frac{٥٦}{ن + ٢}$

∴ (ن + ٣) (ن + ٢) = ٥٦ ∴ (ن + ٣) (ن + ٢) = ٨ × ٧

∴ ن + ٣ = ٨ ∴ ن = ٥

ترتيب ن من الأشياء فى صف واحد

النونى	....	الرابع	الثالث	الثانى	الأول

- عدد طرق اختيار الشىء فى المكان الأول = ن
- عدد طرق اختيار الشىء فى المكان الثانى = (ن − ١)

«لاحظ أن عدد الطرق نقص بمقدار واحد بعد وضع أحد الأشياء فى المكان الأول».

- عدد طرق اختيار الشىء فى المكان الثالث = (ن − ٢) ... وهكذا

إلى أن نصل إلى عدد طرق اختيار الشىء فى المكان النونى = ١

∴ عدد طرق ترتيب ن من الأشياء فى صف واحد = ن(ن − ١) (ن − ٢) (ن − ٣) ... × ٣ × ٢ × ١ = |ن

أى أن عدد طرق ترتيب ن من الأشياء فى صف واحد = |ن

مثال ٩

بكم طريقة يمكن لمجموعة من ٦ أشخاص فى حفل أن يرتبوا أنفسهم فى صف واحد.

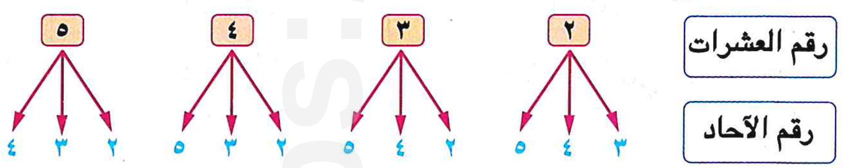
الحل

يمكن للأشخاص الستة أن يجلسوا فى صف بطرق عددها = |٦ = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٧٢٠ طريقة.

التباديل

عند تكوين عدد مكون من رقمين مختلفين من الأرقام ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

فإن عدد طرق تكوين العدد = عدد طرق اختيار الرقم فى خانة العشرات × عدد طرق اختيار الرقم فى خانة الآحاد = ٤ × ٣ = ١٢ طريقة



الأعداد هى ٢٣ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٣٢ ، ٣٤ ، ٣٥ ، ٤٢ ، ٤٣ ، ٤٥ ، ٥٢ ، ٥٣ ، ٥٤

وهذه الأعداد تمثل كل التبديلات الممكنة للأرقام ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ باختيار رقمين منهم فى كل مرة وعدد هذه الأعداد (التبديلات) يرمز له بالرمز $^{٤}ل_{٢}$ وتقرأ (٤ لام ٢) **أى أن :** $^{٤}ل_{٢}$ = ٤ × ٣ = ١٢ طريقة.

تعريف

يرمز لعدد تباديل ن من العناصر المتمايزة مأخوذ منها ر من العناصر فى كل مرة بالرمز $^{ن}ل_{ر}$ حيث :

١ $^{ن}ل_{ر}$ = ن(ن − ١) (ن − ٢) ... (ن − ر + ١) حيث ١ ≤ ر ≤ ن ، ن ، $^{ن}ل_{ر}$ ∈ $ص^{+}$

٢ $^{ن}ل_{ر}$ = ١ عندما ر = ٠

فمثلًا :

- $^{9}\text{ل}_{6}$ = حاصل ضرب ٦ عوامل أكبرهم ٩ وأصغرهم (٩ − ٦ + ١) = ٤ وكل عامل ينقص بمقدار ١ عن سابقه

أى أن : $^{9}\text{ل}_{6} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$

- $^{\text{ن}}\text{ل}_{7} = \text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2) \times \dots \times (\text{ن}-7+1)$

$= \text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2) \times \dots \times (\text{ن}-6)$ (٧ عوامل أكبرهم ن وأصغرهم ن − ٦)

ملاحظات

١ $\boxed{^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \dfrac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}-\text{ر}}}}$

فمثلًا : $^{7}\text{ل}_{3} = \dfrac{\underline{|7}}{\underline{|7-3}} = \dfrac{\underline{|7}}{\underline{|4}}$ ، $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}-1} = \dfrac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}-(\text{ر}-1)}} = \dfrac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}-\text{ر}+1}}$

٢ $\boxed{^{\text{ن}}\text{ل}_{0} = 1}$

الإثبات : $^{\text{ن}}\text{ل}_{0} = \dfrac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}-0}} = \dfrac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}} = 1$ **فمثلًا :** $^{5}\text{ل}_{0} = 1$ ، $^{(\text{ن}-1)}\text{ل}_{0} = 1$

٣ $\boxed{^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ن}} = \underline{|\text{ن}}}$

الإثبات : $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ن}} = \dfrac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}-\text{ن}}} = \dfrac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|0}} = \dfrac{\underline{|\text{ن}}}{1} = \underline{|\text{ن}}$ **فمثلًا :** $^{5}\text{ل}_{5} = \underline{|5}$ ، $^{3}\text{ل}_{3} = \underline{|3}$

مثال ١٠

أوجد :

١ $^{8}\text{ل}_{2}$ | ٢ $^{12}\text{ل}_{3}$ | ٣ $^{\text{ن}}\text{ل}_{4}$

٤ $^{\text{ن}+2}\text{ل}_{3}$ | ٥ $^{\text{ن}-3}\text{ل}_{5}$ | ٦ $^{\text{ن}+1}\text{ل}_{\text{ر}+1}$

الحل

١ $^{8}\text{ل}_{2} = 8 \times 7 = 56$

٢ $^{12}\text{ل}_{3} = 12 \times 11 \times 10 = 1320$

٣ $^{\text{ن}}\text{ل}_{4} = \text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)(\text{ن}-3)$

٤ $^{\text{ن}+2}\text{ل}_{3} = (\text{ن}+2)(\text{ن}+1)\,\text{ن}$

٥ $^{\text{ن}-3}\text{ل}_{5} = (\text{ن}-3)(\text{ن}-4)(\text{ن}-5)(\text{ن}-6)(\text{ن}-7)$

٦ $^{\text{ن}+1}\text{ل}_{\text{ر}+1} = (\text{ن}+1)(\text{ن})(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\dots\big((\text{ن}+1)-(\text{ر}+1)+1\big)$

$= (\text{ن}+1)(\text{ن})(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\dots(\text{ن}+1-\text{ر}-1+1)$

$= (\text{ن}+1)(\text{ن})(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\dots(\text{ن}-\text{ر}+1)$

ملاحظة (استخدام الآلة الحاسبة)

يمكن استخدام الآلة الحاسبة فى إيجاد ناتج التبديل كما يلى :

١ $^{٧}ل_{٥} = ٢٥٢٠$

ابدأ ← 7 SHIFT × 5 = 2520

٢ $^{٤}ل_{٤} = \underline{|٤} = ٢٤$

ابدأ ← 4 SHIFT $x!$ = 24

مثال ١١

إذا كان : $^{١٣}ل_{ر} = ١٧١٦٠$ فأوجد قيمة : ر ثم أوجد : $^{ر^{٢}+١}ل_{٣}$

الحل

نوجد مجموعة من العوامل المتتالية التى أكبرها ١٣ وذلك بقسمة العدد ١٧١٦٠ على ١٣ ثم بقسمة الناتج على ١٢ ثم بقسمة الناتج على ١١ وهكذا حتى نصل إلى الواحد الصحيح.

١٧١٦٠ ÷ ١٣ = ١٣٢٠
١٣٢٠ ÷ ١٢ = ١١٠
١١٠ ÷ ١١ = ١٠
١٠ ÷ ١٠ = ١

فنجد أن $١٧١٦٠ = ١٣ × ١٢ × ١١ × ١٠ = {}^{١٣}ل_{٤}$

∴ $^{١٣}ل_{ر} = {}^{١٣}ل_{٤}$ ∴ $ر = ٤$

∴ $^{ر^{٢}+١}ل_{٣} = {}^{(٤)^{٢}+١}ل_{٣} = {}^{٩}ل_{٣} = ٩ × ٨ × ٧ = ٥٠٤$

مثال ١٢

إذا كان : $^{٢ن+١}ل_{٤} : {}^{٢ن-١}ل_{٣} = ٧٢ : ٥$ فأوجد قيمة : $^{ن^{٢}}ل_{ن}$

الحل

∵ $^{٢ن+١}ل_{٤} = \frac{\underline{|٢ن+١}}{\underline{|٢ن+١-٤}} = \frac{\underline{|٢ن+١}}{\underline{|٢ن-٣}}$

، ∵ $^{٢ن-١}ل_{٣} = \frac{\underline{|٢ن-١}}{\underline{|٢ن-١-٣}} = \frac{\underline{|٢ن-١}}{\underline{|٢ن-٤}}$

∵ $^{٢ن+١}ل_{٤} : {}^{٢ن-١}ل_{٣} = ٧٢ : ٥$ ∴ $\frac{\underline{|٢ن+١}}{\underline{|٢ن-٣}} \div \frac{\underline{|٢ن-١}}{\underline{|٢ن-٤}} = \frac{٧٢}{٥}$

∴ $\frac{\underline{|٢ن+١}}{\underline{|٢ن-٣}} × \frac{\underline{|٢ن-٤}}{\underline{|٢ن-١}} = \frac{٧٢}{٥}$ ∴ $\frac{(٢ن+١)\,٢ن\,\underline{|٢ن-١}}{(٢ن-٣)\,\underline{|٢ن-٤}} × \frac{\underline{|٢ن-٤}}{\underline{|٢ن-١}} = \frac{٧٢}{٥}$

∴ $\frac{٤ن^{٢}+٢ن}{٢ن-٣} = \frac{٧٢}{٥}$ ∴ $٢٠ن^{٢} + ١٠ن = ١٤٤ن - ٢١٦$

∴ $٢٠ن^{٢} - ١٣٤ن + ٢١٦ = ٠$ ∴ $١٠ن^{٢} - ٦٧ن + ١٠٨ = ٠$

∴ $(ن-٤)(١٠ن-٢٧) = ٠$ ∴ $ن = ٤$ أو $ن = ٢,٧$ (مرفوض)

∴ $^{ن^{٢}}ل_{ن} = {}^{٨}ل_{٤} = ٨ × ٧ × ٦ × ٥ = ١٦٨٠$

مثال ١٣

إذا كان: ${}^{٨}ل_{ر} = ٥ \times {}^{٨}ل_{ر-١}$ فأوجد قيمة: $\frac{\underline{|ر}}{\underline{|ر+١}} + \frac{\underline{|ر-١}}{\underline{|ر}} + \frac{\underline{|ر-٣}}{\underline{|ر-٢}}$

الحل

$\because {}^{٨}ل_{ر} = ٥ \times {}^{٨}ل_{ر-١}$ $\quad \therefore \frac{\underline{|٨}}{\underline{|٨-ر}} = ٥ \times \frac{\underline{|٨}}{\underline{|٨-(ر-١)}}$

$\therefore \frac{\underline{|٨}}{\underline{|٨-ر}} = \frac{٥\,\underline{|٨}}{\underline{|٩-ر}}$ $\quad \therefore \frac{\underline{|٨}}{\underline{|٨-ر}} \times \frac{\underline{|٩-ر}}{\underline{|٨}} = ٥$

$\therefore \frac{(٩-ر)\,\underline{|٨-ر}}{\underline{|٨-ر}} = ٥$ $\quad \therefore ٩ - ر = ٥$ $\quad \therefore ر = ٤$

$\therefore \frac{\underline{|ر}}{\underline{|ر+١}} + \frac{\underline{|ر-١}}{\underline{|ر}} + \frac{\underline{|ر-٣}}{\underline{|ر-٢}} = \frac{\underline{|٤}}{\underline{|٥}} + \frac{\underline{|٣}}{\underline{|٤}} + \frac{\underline{|١}}{\underline{|٢}} = \frac{\underline{|٤}}{٥\,\underline{|٤}} + \frac{\underline{|٣}}{٤\,\underline{|٣}} + \frac{١}{٢} = \frac{١}{٥} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٢} = \frac{١٩}{٢٠}$

مثال ١٤

إذا كان: ${}^{م+ن}ل_{٢} = ٢١٠$ ، ${}^{م-ن}ل_{٢} = ٦$ فأوجد قيمتي: م ، ن

الحل

$\because {}^{م+ن}ل_{٢} = ٢١٠$ $\quad \therefore {}^{م+ن}ل_{٣} = ٧ \times ٦ \times ٥ = {}^{٧}ل_{٣}$ $\quad \therefore م + ن = ٧$ (١)

، $\because {}^{م-ن}ل_{٢} = ٦$ $\quad \therefore {}^{م-ن}ل_{٢} = ٣ \times ٢ = {}^{٣}ل_{٢}$ $\quad \therefore م - ن = ٣$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : $\therefore ٢\,م = ١٠$ $\quad \therefore م = ٥$

وبالتعويض فى (١) : $\therefore ن = ٢$

مثال ١٥

أثبت أن: ${}^{ن}ل_{ر} + ر \times {}^{ن}ل_{ر-١} = {}^{ن+١}ل_{ر}$

الحل

$\because {}^{ن}ل_{ر} + ر \times {}^{ن}ل_{ر-١} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}} + ر \times \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر+١}} = \left(\frac{١}{\underline{|ن-ر}} + \frac{ر}{\underline{|ن-ر+١}}\right)\underline{|ن}$

$= \left(\frac{١}{\underline{|ن-ر}} + \frac{ر}{(ن-ر+١)\,\underline{|ن-ر}}\right)\underline{|ن} = \left(\frac{ن-ر+١+ر}{(ن-ر+١)\,\underline{|ن-ر}}\right)\underline{|ن}$

$= \frac{(ن+١)\,\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر+١}} = \frac{\underline{|ن+١}}{\underline{|ن-ر+١}}$ (١)

، $\because {}^{ن+١}ل_{ر} = \frac{\underline{|ن+١}}{\underline{|ن+١-ر}} = \frac{\underline{|ن+١}}{\underline{|ن-ر+١}}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن: ${}^{ن}ل_{ر} + ر\,{}^{ن}ل_{ر-١} = {}^{ن+١}ل_{ر}$

مثال ١٦

أوجد أقل قيمة للعدد $ن$ تحقق المتباينة : $^{ن}ل_{٧} > {}^{ن}ل_{٦}$

الحل

$\because$ $^{ن}ل_{٧} > {}^{ن}ل_{٦}$ $\therefore$ $\frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن - ٧}} > \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن - ٦}}$ (١)

$\therefore$ $\underline{|ن - ٦} > \underline{|ن - ٧}$ $\therefore$ $(ن - ٦) \underline{|ن - ٧} > \underline{|ن - ٧}$

$\therefore$ $ن - ٦ > ١$ $\therefore$ $ن > ٧$

$\therefore$ $ن \in \{٨ ، ٩ ، ١٠ ، ...\}$ $\therefore$ أقل قيمة للعدد $ن$ تحقق المتباينة هى $ن = ٨$

مثال ١٧

من مجموعة الأرقام $\{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧\}$ أوجد :

١ كم عددًا مكونًا من ٤ أرقام مختلفة يمكن تكوينه.

٢ كم عددًا مكونًا من ٧ أرقام مختلفة يمكن تكوينه.

٣ كم عددًا رقم آحاده ٤ ويتكون من خمسة أرقام مختلفة يمكن تكوينه.

٤ كم عددًا فرديًا مكون من ٧ أرقام مختلفة يمكن تكوينه.

٥ كم عددًا أكبر من ٤٠٠ ويتكون من ٣ أرقام مختلفة يمكن تكوينه.

الحل

بفرض أن : $س = \{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧\}$ $\therefore$ $ن(س) = ٧$

١ عدد الأعداد = $^{٧}ل_{٤} = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ = ٨٤٠$ عددًا.

٢ عدد الأعداد = $^{٧}ل_{٧} = \underline{|٧} = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٥٠٤٠$ عددًا.

٣ $\because$ رقم الآحاد = ٤ $\therefore$ عدد طرق اختيار رقم الآحاد = ١ طريقة

ويتبقى ٦ عناصر (أرقام) نختار منهم ٤ أرقام لتكوين باقى العدد

$\therefore$ عدد الأعداد = $١ \times {}^{٦}ل_{٤} = ١ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ = ٣٦٠$ عددًا.

٤ لكى يكون العدد فرديًا يجب أن يكون رقم آحاده عددًا فرديًا أى من الأرقام ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧

$\therefore$ عدد طرق اختيار رقم الآحاد = $^{٤}ل_{١} = ٤$ طرق

ويتبقى لنا من عناصر $س$ ٦ أرقام نختار منهم ٦ أرقام لتكوين باقى العدد

$\therefore$ عدد الأعداد = $٤ \times {}^{٦}ل_{٦} = ٤ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٢٨٨٠$ عددًا.

٥ لكى يكون العدد أكبر من ٤٠٠ يجب أن يكون الرقم المختار فى خانة المئات أكبر من أو يساوى ٤ أى من الأرقام ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧

$\therefore$ عدد طرق اختيار رقم المئات = $^{٤}ل_{١} = ٤$ طرق

ويتبقى لنا من عناصر $س$ ٦ أرقام نختار منهم رقمين بخانتى الآحاد والعشرات

$\therefore$ عدد الأعداد = $٤ \times {}^{٦}ل_{٢} = ٤ \times ٦ \times ٥ = ١٢٠$ عددًا.

تمارين 7

على مبدأ العد - التباديل

من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $\underline{|٠} + \underline{|١} + \underline{|٢} + \underline{|٣} =$ ....

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٠

(٢) $^{٩}\text{ل}_{٠} + {}^{٧}\text{ل}_{١} + {}^{٣}\text{ل}_{٣} =$ ....

(أ) ١٤ (ب) ٢٥ (جـ) ٩٦ (د) ١٨٩

(٣) إذا كان : $\frac{١}{٢}\,\underline{|\text{ن}} = ١$ فإن : $\underline{|\text{ن} - ٢} =$ ....

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) صفر

(٤) $\frac{\underline{|\text{ن}}}{\text{ن}} =$ ....

(أ) ١ (ب) $\underline{|\text{ن}}$ (جـ) $\underline{|\text{ن} - ١}$ (د) $\frac{\text{ن}}{\text{ن} - ١}$

(٥) $^{\text{ن}}\text{ل}_{٢}$ يمكن أن تساوى ....

(أ) ١٥ (ب) ١٦ (جـ) ١٧ (د) ٢٠

(٦) إذا كان : $^{٥}\text{ل}_{\text{ر}} = ٦٠$ فإن : $\text{ر} =$ ....

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ٥

(٧) إذا كان : $^{\text{ن}}\text{ل}_{٣} = ١٢٠$ فإن : $\text{ن} =$ ....

(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) ٤ (د) ٣

(٨) إذا كان : $\underline{|\text{ن}} = ١$ فإن : $\text{ن} =$ ....

(أ) ١ (ب) ٠ (جـ) ٠ ، أ ١ (د) ١ ، أ -١

(٩) إذا كان : $١٠\,\underline{|٢\text{ن} - ٢} = ٢٤٠$ فإن : $\text{ن} =$ ....

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٥

(١٠) إذا كان : $\frac{١}{\underline{|\text{س}}} = \frac{٢}{\underline{|\text{س} + ١}}$ فإن : $\text{س} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(١١) $\frac{^{٧}\text{ل}_{\text{ر}}}{^{٧}\text{ل}_{\text{ر} - ١}} =$ ....

(أ) ر (ب) ر - ١ (جـ) ٧ - ر (د) ٨ - ر

(١٢) إذا كان : ^{٩}ل$_{ر - ١}$ = ٥٠٤ فإن : |ر + ١ = ...

(أ) ٦ (ب) ٢٤ (جـ) ١٢٠ (د) ٧٢٠

(١٣) إذا كان : |½ ن = ١٢٠ فإن : ^{ن}ل$_{٣}$ = ...

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ١٢٠ (د) ٧٢٠

(١٤) إذا كان : $\frac{١}{|٩} + \frac{١}{|١٠} = \frac{س}{|١١}$ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ١١ (جـ) ١٢١ (د) ١٣٢

(١٥) ن|ن + |ن = |.............

(أ) ن (ب) ن + ١ (جـ) ن + ٢ (د) ن − ١

(١٦) عدد الأزواج المرتبة (أ ، ب) التى يمكن تكوينها من عناصر المجموعة {١ ، ٢ ، ٣} حيث أ ≠ ب هو ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ٩

(١٧) عدد طرق ترتيب ٥ أشخاص فى صف يساوى ....

(أ) ^{٤}ل$_{٤}$ (ب) ٢^{٥} (جـ) ^{٥}ل$_{٤}$ (د) ٥ × ٥

(١٨) عدد طرق جلوس ٤ طلاب على أربعة مقاعد فى صف يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٤ + ٤ (جـ) ٤ × ٤ (د) ٤ × ٣ × ٢ × ١

(١٩) عدد طرق اختيار وجبة ومشروب من قائمة بها ٥ وجبات و ٤ مشروبات هى ....

(أ) ٩ (ب) ٢٠ (جـ) ٥ (د) ١

(٢٠) يحتوى رف أحد المكتبات على ٤ كتب مختلفة للكيمياء و ٣ كتب مختلفة للتاريخ وكتابين مختلفين للشعر فبكم طريقة يمكن أختيار كتاب من كل مادة ؟

(أ) ٤ + ٣ + ٢ (ب) ٤ × ٣ × ٢ (جـ) ١ + ١ + ١ (د) ١ × ١ × ١

(٢١) إذا أراد رجل شراء سيارة من بين الموديلات {أ ، ب ، جـ} وأراد أن يختار من بين الألوان {أبيض ، أسود ، فضى ، أحمر} بكم طريقة يمكن اختيار السيارة ؟

(أ) ٧ (ب) ١٢ (جـ) ١٤ (د) ٢٤

(٢٢) كم عدد يمكن تكوينه من ثلاثة أرقام مختلفة من الأرقام ١ ، ٣ ، ٦ ، ٧ ؟

(أ) ٩ (ب) ١٢ (جـ) ٢٤ (د) ٦٤

(٢٣) لجنة مؤلفة من ١٢ عضوًا ، بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب لهذه اللجنة ؟

(أ) ٢ (ب) ٢٣ (جـ) ٦٦ (د) ١٣٢

(٢٤) عدد طرق ترتيب حروف كلمة مصنع يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (د) ٢٤

(٢٥) عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين مأخوذة من مجموعة الأرقام {٥ ، ٣ ، ٠ ، ٤} يساوى ....

(أ) ٣ × ٢ (ب) ٤ × ٢ (جـ) ٣ × ٣ (د) ٣ × ٤

(٢٦) عدد الأعداد الفردية المكونة من ثلاثة أرقام مختلفة مأخوذة من الأرقام {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦} يساوى ....

(أ) ٨ × ٦ × ٣ (ب) ٤ × ٣ × ٣ (جـ) ٤ × ٣ × ٢ (د) ١ × ٣ × ٢

(٢٧) عدد طرق تكوين عدد أولى مكون من ٣ أرقام مختلفة من مجموعة الأرقام ٣ ، ٤ ، ٥ هو ....

(أ) ٦ (ب) ٣ (جـ) ١ (د) صفر

(٢٨) عدد طرق تكوين العدد ١٤٥٣ من الأعداد ١ ، ٣ ، ٤ ، ٥ هو ....

(أ) ٢٤ (ب) ١٦ (جـ) ١ (د) صفر

(٢٩) عدد طرق تكوين عدد مكون من ٣ أرقام من بين ٦ أرقام غير صفرية هو ....

(أ) ٦ × ٥ × ٤ (ب) ٦ + ٥ + ٤ (جـ) ٦ × ٦ × ٦ (د) ٣ × ٢ × ١

(٣٠) كم عدد زوجى مكون من أربعة أرقام مختلفة يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {١ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ؟

(أ) ٥٤٣١ (ب) ٦٠ (جـ) ١٢ (د) ٦

(٣١) كم عدد مكون من ٣ أرقام مختلفة يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {٢ ، ٤ ، ٥ ، ٧} ويكون أصغر من ٥٠٠ ؟

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

(٣٢) عدد طرق الإجابة عن ١٠ أسئلة من نوع الصواب والخطأ يساوى .... طريقة.

(أ) $\underline{|١٠}$ (ب) ١٠ (جـ) $٢^{١٠}$ (د) $١٠^{٢}$

(٣٣) عدد كل الأعداد المكونة من ٥ أرقام باستخدام ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ يساوى ....

(أ) ٢٥٠٠ (ب) ٩٦ (جـ) ١٢٠ (د) ٣١

(٣٤) عدد طرق تكوين عدد مكون من أربعة أرقام مختلفة من الأرقام {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧} بحيث يكون رقم العشرات زوجيًا هو ....

(أ) ١٥ (ب) ٢٤ (جـ) ١٢ (د) ٨

(٣٥) $\dfrac{\underline{|ن - ٢}}{\underline{|ن - ٣}}$ = ...

(أ) ن − ٢ (ب) ن − ٣ (جـ) ن (د) ن − ١

(٣٦) إذا كان : $^{ن}ل_{ن}$ = ٥٠٤٠ فإن : ن = ...

(أ) ١٠ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٣

(٣٧) إذا كان : |ن + ١ = ٣٠ |ن − ١ فإن : ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٢٩ (د) ٣٠

(٣٨) إذا كان : |ن − ١ = ١٢٠ ، |ن − ر = ٦ فإن : ${}^{ن}ل_{ر}$ = ...

(أ) ٧٢٠ (ب) ٦ × ٥ × ٤ (جـ) ٣ × ٤ × ٥ (د) ٦ × ٥

(٣٩) إذا كان : (|ن − ٣) / (|٣) = ٥ / (ن − ٢) فإن : ${}^{ن}ل_{٢}$ = ...

(أ) ٨ (ب) ٢٨ (جـ) ٥٦ (د) ٣٣٦

(٤٠) إذا كان : ن |٢ن − ١ = ٦٠ فإن : ن = ...

(أ) ٢ (ب) ٢,٥ (جـ) ٤ (د) ٥

(٤١) إذا كان : ٨ × ٧ × ٦ = ${}^{س}ل_{ص}$ فإن : س + ص يمكن أن يساوى ....

(أ) ٣٥ (ب) ١٨ (جـ) ١٣ (د) ١١

(٤٢) إذا كان : (|٢ن |ن − ١) / (|٢ن − ١ |ن + ١) = ١/٣ فإن : ن = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٩

(٤٣) مجموعة حل المعادلة : |ن − ١ = ن في ص هي ....

(أ) {٠} (ب) {١} (جـ) {٠ ، ١} (د) {١ ، ٢}

(٤٤) (٢ × ٤ × ٦ × ⋯ × (٢ن − ٢) × (٢ن)) / ${٢}^{ن}$ = ...

(أ) |٢ن (ب) |ن (جـ) ن |ن (د) ٢ |ن

(٤٥) إذا كانت : س = {س : س ∈ ط ، ١ ≤ س ≤ ٥}

وكانت : ص = {(أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ ≠ ب} فإن عدد عناصر ص ....

(أ) ٧ (ب) ١٠ (جـ) ٢٠ (د) ٢٥

(٤٦) (${ن}^{٢}$ + ٣ن + ٢) |ن = |..............

(أ) ${ن}^{٢}$ (ب) ن + ١ (جـ) ن + ٢ (د) ن (ن + ٢)

(٤٧) إذا كان : ${ن}^{٢}$ + ٩ن + ٢٠ = (|ن + ٥) / (|س) فإن : س = ...

(أ) ن + ٣ (ب) |ن + ٣ (جـ) |ن + ٤ (د) ${}^{ن+٥}ل_{٢}$

(٤٨) مجموعة حل المعادلة : (|س) / ١٠ = ${}^{س-١}ل_{س-٣}$ هى ....

(أ) {٥} (ب) {٦} (جـ) {٧} (د) {٨}

(٤٩) (ن + ١) (ن + ٢) (ن + ٣) × ⋯ × (٢ن) = ...

(أ) |٢ن − ١ (ب) $\frac{|٢ن}{|ن}$ (جـ) |٣ن + ١ (د) $\frac{|٢ن}{|ن + ١}$

(٥٠) إذا كان : |ن < ١٠٠ ، |ن + ١ > ١٠٠ فإن : ن = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(٥١) إذا كان : |ن عددًا أوليًا فإن : ن = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٥٢) ن(ن^{٢} − ١) (ن^{٢} − ٤) = ...

(أ) $^{ن-٤}ل_{٣}$ (ب) $^{ن+٢}ل_{٣}$ (جـ) $^{ن+٢}ل_{٥}$ (د) $^{ن-٢}ل_{٥}$

(٥٣) (|ن) (|ن) .... |ن^{٢}

(أ) < (ب) ≥ (جـ) ≤ (د) =

(٥٤) إذا كان : $^{ن}ل_{٥}$ = $^{ن}ل_{٤}$ فإن : ن = ...

(أ) ٢٠ (ب) ٩ (جـ) ٤ (د) ٥

(٥٥) إذا كان : ٢ $^{ن}ل_{٣}$ = $^{ن+١}ل_{٣}$ فإن : ن = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(٥٦) إذا كان : |٧ = $^{٧}ل_{س}$ فإن : س = ...

(أ) ٦ أ، ٧ (ب) ٧ فقط. (جـ) ١ أ، صفر (د) ٥٠٤٠

(٥٧) إذا كان : |٥ |٩ = ١٢ |ن فإن : ن = ...

(أ) ١٠ (ب) ١١ (جـ) ١٢ (د) ١٣

(٥٨) العامل المشترك الأكبر للأعداد : |ن ، |ن + ١ ، |ن + ٢ هو ....

(أ) |ن (ب) |ن + ٢ (جـ) ن (د) ن + ٢

(٥٩) المضاعف المشترك الأصغر للأعداد : |ن ، |ن + ١ ، |ن + ٢ هو ....

(أ) |ن (ب) |ن + ٢ (جـ) ن (د) ن + ٢

(٦٠) إذا كان : أ ، ب عددين متتاليين حيث أ > ب فإن : أ ب = ...

(أ) $^{أ}ل_{٢}$ (ب) $^{ب}ل_{٢}$ (جـ) $^{٢}ل_{أ}$ (د) $^{٢}ل_{ب}$

(٦١) إذا كان : |١٣ = ٢^{أ} × ب حيث ب لا تقبل القسمة على ٢ فإن : أ = ...

(أ) ٨ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (د) ١١

(٦٢) إذا كانت : ٠ ≤ θ < ٣٦٠° فإن مجموعة حل المعادلة |حاθ = ١ هي ....

(أ) {صفر ، ١٨٠°} (ب) {٩٠° ، ٢٧٠°}

(جـ) {صفر ، ٩٠° ، ٢٧٠°} (د) {٩٠° ، ١٨٠°}

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد قيمة ن التى تحقق كلًا مما يأتى :

① $\underline{|ن} = ٧٢٠$

② $^{١٥}ل_{ن} = ٢٧٣٠$

③ $^{ن}ل_{٣} = ٥٠٤$

④ $^{(ن-١)}ل_{٤} = ١٢٠$

⑤ $^{ن}ل_{٠} + {}^{ن}ل_{١} + {}^{ن}ل_{٢} = ٥٠$

⑥ $\underline{|ن - ٤} = ١٢٠$

⑦ $ن\,\underline{|٢ن - ١} = ١٢$

⑧ $\frac{\underline{|ن + ١}}{\underline{|ن}} = ٥$

٢ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① $\underline{|ن - ٥} = ١$ «{٥ ، ٦}»

② $\frac{\underline{|ن + ١}}{\underline{|ن - ١}} = ٤٢$ «{٦}»

③ $١٢ \times \underline{|ن} = \underline{|ن + ٢}$ «{٢}»

④ $\underline{|ن} = ٣٠\,\underline{|ن - ٢}$ «{٦}»

٣ أجب عن الأسئلة الآتية :

① إذا كان : $^{ن}ل_{٤} = ١٤ \times {}^{ن-٢}ل_{٢}$ **فأوجد قيمة : ن** «٨ أ ، ٧»

② إذا كان : $^{٥}ل_{ر} = ٢ \times {}^{٦}ل_{ر-١}$ **فأوجد قيمة : ر** «٣»

③ إذا كان : $^{ن-١}ل_{٣} : {}^{ن+١}ل_{٣} = ٥ : ١٢$ **فأوجد قيمة :** $\underline{|ن - ٣}$ «١٢٠»

④ إذا كان : $^{٢ن+١}ل_{ن-١} : {}^{٢ن-١}ل_{ن} = ٣ : ٥$ **فما قيمة : ن** «٤»

⑤ إذا كان : $^{ن}ل_{ر} = ٦٠٤٨٠٠$ ، $\underline{|ر} = ٥٠٤٠$ **فأوجد قيمة : ن ، ر**

ثم أوجد قيمة : $^{ن+ر}ل_{ن-ر}$ «١٠ ، ٧ ، ٤٠٨٠»

⑥ إذا كان العامل الأوسط فى مفكوك $^{ن}ل_{١١}$ يساوى ١٥ **فأوجد قيمة : ن** «٢٠»

٤ أثبت أن :

① $\frac{\underline{|ن + ١}}{\underline{|ن - ١}} - \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن - ٢}} = ٢ن$

② $\frac{\underline{|ن + ٣}}{\underline{|ن}} = (ن + ٣)\,{}^{ن+٢}ل_{٢}$

③ $\frac{١}{\underline{|ن}} - \frac{١}{\underline{|ن + ١}} + \frac{١}{\underline{|ن + ٢}} = \frac{ن + ١}{(ن + ٢)\,\underline{|ن}}$

④ $\frac{\underline{|٢}}{\underline{|٦}} + \frac{\underline{|٣}}{\underline{|٧}} + \frac{\underline{|٤}}{\underline{|٨}} = \frac{٢٣}{\underline{|٧}}$

⑤ $^{ن+١}ل_{ر+١} = (ن + ١) \times {}^{ن}ل_{ر}$

⑥ $\frac{^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}} = \frac{ن}{ر} \times \frac{^{ن-١}ل_{ر-١}}{\underline{|ر - ١}}$

⑦ $^{ن}ل_{ر} : {}^{ن-١}ل_{ر-١} = ن$ ومن ذلك استنتج قيمة : $^{٩٧}ل_{٤٠} : {}^{٩٦}ل_{٣٩}$ «٩٧»

٥ أوجد قيمة ن إذا كان :

① $\frac{١}{\underline{|ن}} + \frac{٢}{\underline{|ن + ١}} = \frac{٥٦}{\underline{|ن + ٢}}$ «٥»

② $\frac{\underline{|ن + ١}}{\underline{|ن + ٢}} + \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن + ١}} = \frac{١٣}{٤٢}$ «٥»

٦ أوجد :

(١) عدد الطرق المختلفة لجلوس ٥ طلاب على ٧ مقاعد فى صف واحد. « ٢٥٢٠ »

(٢) عدد طرق ترتيب ٨ أشخاص. « ٤٠٣٢٠ »

(٣) عدد طرق اختيار رئيس ونائب رئيس وسكرتير من لجنة مكونة من عشرة أشخاص. « ٧٢٠ »

(٤) بكم طريقة يمكن لحسام أن يتناول وجبة ومشروبًا من ثلاث وجبات (كفتة – فراخ – سمك) ومشروبين (عصير – مياه غازية) (مثِّل ذلك بمخطط الشجرة البيانية). « ٦ »

(٥) كم يبلغ عدد الترتيبات التى يمكن أن يتشكل كل منها من خمسة حروف مختلفة من الأبجدية العربية. « ١١٧٩٣٦٠٠ »

(٦) بكم طريقة يمكن تكوين عددًا مكونًا من ثلاثة أرقام بحيث يكون رقم الآحاد من العناصر {٣ ، ٧} ورقم العشرات من العناصر {٢ ، ٤ ، ٩} ورقم المئات من العناصر {١ ، ٥} « ١٢ »

(٧) كم عددًا مكونًا من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ « ١٢ »

(٨) كم عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مأخوذة من العناصر {٢ ، ٣ ، ٥} « ٢٧ »

(٩) كم عددًا مكونًا من رقمين يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ « ١٦ »

(١٠) بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من ٣ أرقام مختلفة من الأرقام {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} « ٤٨ »

(١١) كم عددًا زوجيًا مكونًا من ٣ أرقام مختلفة يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧} « ٢٤ »

(١٢) بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من أربعة أرقام مختلفة من الأرقام {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧} بحيث يكون رقم العشرات زوجيًا. « ١٢ »

---

٧ **بكم طريقة يمكن تكوين عدد من الأرقام ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ؟**

(١) إذا كان كل عدد يتألف من ٣ أرقام مختلفة. « ٢١٠ »

(٢) إذا كان كل عدد يتألف من الأرقام جميعًا دون تكرار لأى رقم منها. « ٥٠٤٠ »

(٣) إذا كان كل عدد يتألف من ٥ أرقام مختلفة ويقبل القسمة على ٢ « ١٠٨٠ »

(٤) إذا كان كل عدد يتألف من ٤ أرقام مختلفة ورقم آحاده ٧ « ١٢٠ »

(٥) إذا كان كل عدد يتألف من ٤ أرقام مختلفة ويكون أصغر من ٦٠٠٠ « ٣٦٠ »

---

٨ إذا كانت : س = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩}

(١) كم عددًا مكونًا من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من هذه الأرقام ؟ « ٢٠ »

(٢) كم عددًا مكونًا من رقمين يمكن تكوينه من هذه الأرقام ؟ « ٢٥ »

③ كم عددًا مكونًا من ثلاثة أرقام مختلفة يمكن تكوينه من هذه الأرقام ؟ « ٦٠ »

④ كم عددًا مكونًا من ثلاثة أرقام مختلفة وأصغر من ٥٠٠ يمكن تكوينه من هذه الأرقام ؟ « ٢٤ »

⑤ كم عددًا مكونًا من أربعة أرقام مختلفة ورقم آحاده ٢ يمكن تكوينه من هذه الأرقام ؟ « ٢٤ »

---

٩ من مجموعة الحروف {أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و} أوجد :

① عدد طرق اختيار حرف واحد. « ٦ »

② عدد طرق اختيار حرفين مختلفين مع مراعاة الترتيب. « ٣٠ »

---

١٠ إذا كانت : س = {س : س عدد طبيعي ، ١ ≤ س ≤ ٧}

، ص = {(أ ، ب) حيث أ ، ب ∈ س ، أ ≠ ب}

فأوجد عدد عناصر كل من : س ، ص « ٧ ، ٤٢ »

---

١١ إذا كان : ${}^{س+ص}ل_{٣} = ٥٠٤$ ، ${}^{س-ص}ل_{٤} = ١٢٠$ **فأوجد قيمة :** ${}^{س}ل_{ص}$ « ٤٢ »

---

١٢ **حل كلاً من المعادلات الآتية :**

① ${}^{س+٢}ل_{٣} = ٤٢\,س$ « ٥ »

② ${}^{٧}ل_{س} - س \times {}^{٧}ل_{س-١} = ٠$ « ٤ »

③ $\underline{|س-٣} \times {}^{س}ل_{٣} = ٢٠\,\underline{|س-٢}$ « ٥ »

④ $\underline{|س+٢} = ١٨٢ \times {}^{س}ل_{١١}\,\underline{|س-١١}$ « ١٢ »

---

١٣ **أوجد مجموعة حل المعادلة :** $٣٠ \times {}^{س+٢}ل_{٣} = {}^{س+٥}ل_{٥}$ إذا كانت : س ∈ ط «{١}»

---

١٤ إذا كان : ${}^{ن}ل_{١٥} > {}^{ن}ل_{١٤}$ **فأوجد أقل قيمة للعدد :** ن تحقق هذه المتباينة. « ١٦ »

---

١٥ إذا كان : ${}^{أ+ب}ل_{٤} = ٨٤٠$ ، $\underline{|أ-ب} = ٦$ **فأوجد قيمة كل من :** أ ، ب ، $\underline{|٢أ-٥ب}$ « ٥ ، ٢ ، ١ »

---

١٦ إذا كان : ${}^{ن}ل_{ر} = ٢٥٢٠$ ، $\underline{|ر} = ١٢٠$ **فأوجد قيمة :** $\underline{|٣ر-٢ن}$ « ١ »

---

١٧ **أثبت أن :** ① $\underline{|٨٠} = ٢^{٤٠}\,\underline{|٤٠}\,(١ \times ٣ \times ٥ \times ... \times ٧٩)$

② $\frac{\underline{|١٠٠}}{\underline{|٥٠}} = ٢^{٥٠}\,(١ \times ٣ \times ٥ \times ... \times ٩٩)$

③ $\underline{|٢ن} = ٢^{ن}\,\underline{|ن}\,(١ \times ٣ \times ٥ \times ... \times (٢ن-١))$

---

١٨ **أثبت أن :** $\frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\,\underline{|ن-ر}} + \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر-١}\,\underline{|ن-ر+١}} = \frac{\underline{|ن+١}}{\underline{|ر}\,\underline{|ن-ر+١}}$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : $^{ن}ل_{٢}$ ، $^{ن}ل_{٣}$ ، $^{ن+١}ل_{٣}$ فى تتابع حسابى فإن : ن + ⌊ن − ٣ = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ١٢ (د) ٣١

② عدد حلول المعادلة : س = ⌊س فى ص+ يساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى.

③ إذا كان : ⌊ن يقبل القسمة على كل من ٧ ، ١٣ فإن : ....

(أ) ن ≥ ٧ (ب) ن = ١٠ (جـ) ٧ ≥ ن ≥ ١٣ (د) ن ≤ ١٣

④ إذا كان رقم الآحاد فى ⌊ن لا يساوى الصفر فإن : ....

(أ) ن < ٤ (ب) ن > ٥ (جـ) ن < ٩ (د) ن عدد فردى.

⑤ إذا كان : ⌊ر = ن ، ⌊ن = ر فإن : ر + ن = ...

(أ) ٢ (ب) صفر أ، ١ (جـ) ٢ أ، ٣ (د) ٢ أ، ٤

⑥ إذا كانت أطوال أضلاع مثلث هى $\frac{١}{٢}$ ⌊ن ، ⌊٢ − ن ، ⌊ن − ٢ من السنتيمترات

فإن القيمة العددية لمساحة المثلث = ... سم^{٢}

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٨}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{١٦}$

⑦ عند قسمة (⌊١ + ⌊٢ + ⌊٣ + ⌊٤ + ... + ⌊١٠٠) على ٧ يكون الباقى ....

(أ) ٠ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٦

⑧ إذا كان : ⌊ن ، ٣ ⌊ن ، ⌊ن + ١ فى تتابع هندسى فإن : ....

(أ) ⌊ن ، ٤ ⌊ن ، ⌊ن + ١ فى تتابع هندسى.

(ب) ⌊ن ، ٤ ⌊ن ، ⌊ن + ١ فى تتابع حسابى.

(جـ) ⌊ن ، ٥ ⌊ن ، ⌊ن + ١ فى تتابع هندسى.

(د) ⌊ن ، ٥ ⌊ن ، ⌊ن + ١ فى تتابع حسابى.

⑨ رقم الآحاد فى العدد : ⌊٠ + ⌊١ + ⌊٢ + ⌊٣ + ... + ⌊٢٠٢٢ هو ....

(أ) صفر (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٩

⑩ إذا كان أ عدد طبيعى بحيث س = ⌊أ + ⌊أ + ١ + ⌊أ + ٢ فإن العدد الصحيح ب الذى يحقق أن

$\frac{س}{ب}$ = ⌊أ هو ....

(أ) عدد زوجى دائمًا. (ب) عدد فردى دائمًا.

(جـ) عدد أولى. (د) عدد مربع كامل.

تطبيقات حياتية

١ يقدم أحد محلات الآيس كريم ثلاثة أحجام وخمس نكهات

(صغير ، متوسط ، كبير) (فراولة ، مانجو ، ليمون ، حليب ، شيكولاتة)

كم عدد الاختيارات المتاحة لشراء واحد من هذه الأحجام

بإحدى هذه النكهات ؟

« ١٥ »

---

٢ إذا طلب منك عمل رقم سرى لإحدى الخزن مكون من ٤ أرقام ليس من بينهم الصفر

فأوجد عدد الطرق التى يمكن بها تكوين هذا الرقم السرى.

« ٦٥٦١ »

---

٣ رقم تليفون يتكون من ٨ منازل | .... | .... | .... | .... | .... | .... | ح | ٩ | ح يجب أن تكون أحد

الأرقام ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٨ بينما باقى المنازل تتألف من أى رقم دون قيد.

كم عدد أرقام التليفونات المختلفة المتاحة ؟

« ٤٠٠٠٠٠٠ »

---

٤ إذا علمت أن مجموعة أرقام شبكات المحمول فى إحدى الدول تتكون من إحدى عشر رقم ، فإذا كان

الرقم (٠٢٥) ثابت من اليسار.

أوجد أكبر عدد من الخطوط يمكن أن تتحملها شبكات هذا المحمول.

« ١٠٠٠٠٠٠٠٠ »

---

٥ تبدأ لوحات ترخيص السيارات فى إحدى المحافظات بثلاثة من الحروف الأبجدية يتبعها ثلاثة أرقام

غير الصفر. كم عدد اللوحات التى يمكن الحصول عليها ؟ بفرض أنه لا يوجد تكرار لأى من الحروف أو

الأرقام فى أى من لوحات التراخيص ؟

« ٩٩٠٦٦٢٤ »

---

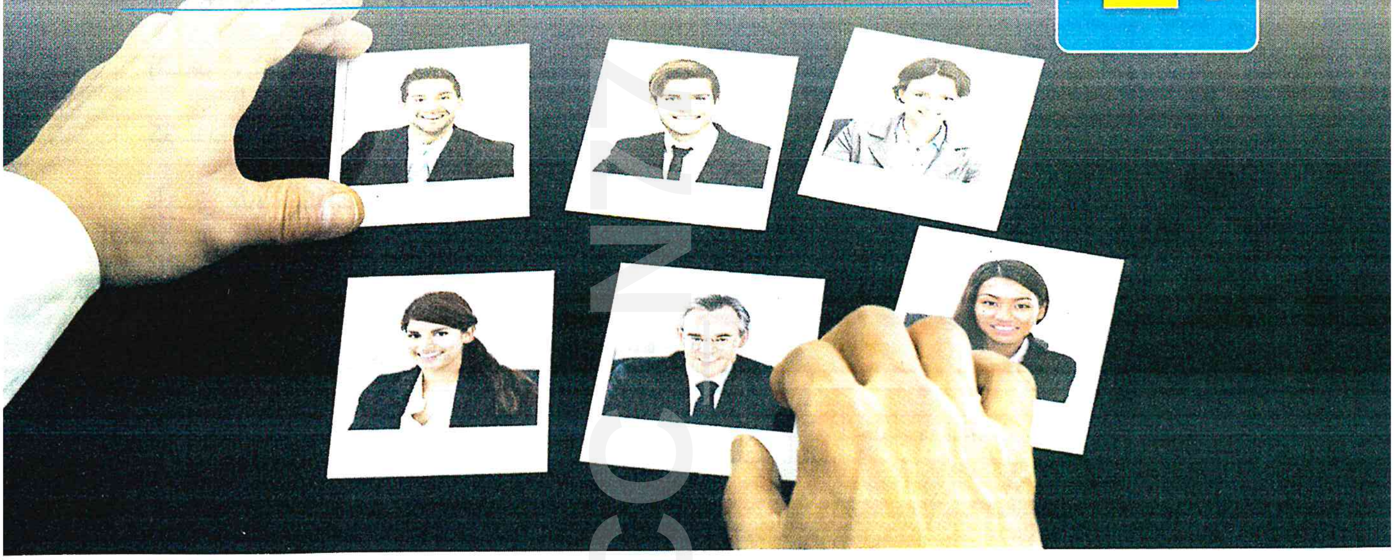
٦ يبلغ عدد فرق الدورى الممتاز لكرة القدم ١٢ فريقاً ، فإذا كان كل فريق يلعب مباراتين مع كل فريق من

باقى الفرق. أوجد عدد مباريات الدورى بأكمله.

« ١٣٢ »

الدرس 2

التوافيق



شخص لديه خمس شقق مرقمة من ١ إلى ٥ أراد أن يعرض شقتين منهم للبيع فبكم طريقة يمكن اختيار الشقتين ؟

للإجابة عن هذا السؤال نلاحظ ما يلى :

- اختيار الشقتين ١ ، ٤ مثلًا هو نفسه اختيار الشقتين ٤ ، ١ أى أنه ليس هناك أهمية للترتيب ولذلك نختار صيغة المجموعات {٤ ، ١} للتعبير عن هذا الاختيار وليس الأزواج المرتبة.
- استخدام التباديل يتم فى حالة أن يكون هناك أهمية للترتيب فى الاختيار ولذا فالتباديل لا تصلح فى الحالة السابقة.

لذلك توجد هناك صيغة رياضية تعبر عن الحالة السابقة تسمى التوافيق.

تعريف التوفيق

هو كل مجموعة يمكن تكوينها من مجموعة من الأشياء بأخذ بعضها أو كلها بصرف النظر عن ترتيبها.

وفى المثال السابق فإن طرق اختيار الشقتين (التوفيقات الممكنة) هى : {١ ، ٢} ، {١ ، ٣} ، {١ ، ٤} ، {١ ، ٥} ، {٢ ، ٣} ، {٢ ، ٤} ، {٢ ، ٥} ، {٣ ، ٤} ، {٣ ، ٥} ، {٤ ، ٥}

- يرمز لعدد التوفيقات السابقة بالرمز ${}^{٥}ق_{٢}$ «وتقرأ ٥ قاف ٢» أو بالرمز $\binom{٥}{٢}$ وتقرأ ٥ فوق ٢

وتستخدم للتعبير عن عدد جميع المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين والتى يمكن تكوينها من مجموعة تحتوى خمسة عناصر.

بصفة عامة

${}^{ن}ق_{ر}$ هو عدد التوافيق المكون كل منها من $ر$ من الأشياء المختارة معًا من بين $ن$ من العناصر حيث :

$٠ \le ر \le ن$

مثال توضيحى

إذا كانت : س = {٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩} حيث عدد عناصر س = ٤ فيكون :

١ جميع المجموعات الجزئية من س هى :

* المجموعة الخالية : «∅» وعددها = ١ ∴ $^{\text{٤}}\text{ق}_{\text{٠}} = \text{١}$
* المجموعات الأحادية العنصر : {٣} ، {٥} ، {٧} ، {٩} وعددها = ٤ ∴ $^{\text{٤}}\text{ق}_{\text{١}} = \text{٤}$
* المجموعات الثنائية العناصر : {٣ ، ٥} ، {٣ ، ٧} ، {٣ ، ٩} ، {٥ ، ٧} ، {٥ ، ٩} ، {٧ ، ٩} وعددها = ٦ ∴ $^{\text{٤}}\text{ق}_{\text{٢}} = \text{٦}$
* المجموعات الثلاثية العناصر : {٣ ، ٥ ، ٧} ، {٣ ، ٥ ، ٩} ، {٣ ، ٧ ، ٩} ، {٥ ، ٧ ، ٩} وعددها = ٤ ∴ $^{\text{٤}}\text{ق}_{\text{٣}} = \text{٤}$
* المجموعات الرباعية العناصر : {٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩} وعددها = ١ ∴ $^{\text{٤}}\text{ق}_{\text{٤}} = \text{١}$

∴ عدد جميع المجموعات الجزئية = ١ + ٤ + ٦ + ٤ + ١ = ١٦ = $\text{٢}^{\text{٤}}$

∴ $^{\text{٤}}\text{ق}_{\text{٠}} + {}^{\text{٤}}\text{ق}_{\text{١}} + {}^{\text{٤}}\text{ق}_{\text{٢}} + {}^{\text{٤}}\text{ق}_{\text{٣}} + {}^{\text{٤}}\text{ق}_{\text{٤}} = \text{٢}^{\text{٤}}$

وبصفة عامة $\boxed{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{٠}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{١}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{٢}} + \cdots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}} = \text{٢}^{\text{ن}}}$

لاحظ أنه :

إذا كانت : س تحتوى على ن عنصر فإن عدد جميع المجموعات الجزئية منها = $\text{٢}^{\text{ن}}$

٢ جميع الأعداد ذات الرقمين التى يمكن تكوينها

من عناصر س هى

٥٣	٧٣	٩٣	٧٥	٩٥	٩٧
٣٥	٣٧	٣٩	٥٧	٥٩	٧٩

، عددهم = $^{\text{٤}}\text{ل}_{\text{٢}} = \text{١٢}$

لاحظ أنه :

فى التوافيق نعتبر الاختيار {٣ ، ٥} هو نفس الاختيار {٥ ، ٣} لأننا لا نراعى الترتيب داخل المجموعة أما فى التباديل نعتبر التبديل ٥٣ يختلف عن ٣٥ إذ أن كلًا منهما يعطى عددًا مخالفًا للآخر.

أما جميع المجموعات الجزئية الثنائية العنصر

التى يمكن تكوينها من عناصر س هى

{٣ ، ٥} ، {٣ ، ٧} ، {٣ ، ٩} ، {٥ ، ٧} ، {٥ ، ٩} ، {٧ ، ٩}

عددهم = $^{\text{٤}}\text{ق}_{\text{٢}} = \text{٦}$ ∴ عدد المجموعات الجزئية الثنائية × ٢ = عدد الأعداد ذات الرقمين.

∴ $^{\text{٤}}\text{ق}_{\text{٢}} \times \underline{|\text{٢}} = {}^{\text{٤}}\text{ل}_{\text{٢}}$ ∴ $^{\text{٤}}\text{ق}_{\text{٢}} = \dfrac{^{\text{٤}}\text{ل}_{\text{٢}}}{\underline{|\text{٢}}}$ وبالمثل يمكن إثبات أن $^{\text{٤}}\text{ق}_{\text{٣}} = \dfrac{^{\text{٤}}\text{ل}_{\text{٣}}}{\underline{|\text{٣}}}$

وبصفة عامة $\boxed{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \dfrac{^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}{\underline{|\text{ر}}}}$

قوانين التوافيق

* إذا كان : ن ، ر $\in$ ط ، ر $\le$ ن فإن :

١ $\;{}^{ن}ق_{ر} = \frac{{}^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\;\underline{|ن - ر}}$

٢ قانون التبسيط : ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$

٣ إذا كان : ${}^{ن}ق_{س} = {}^{ن}ق_{ص}$ فإن : س = ص أ، س + ص = ن

٤ قانون النسبة : $\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{ن - ر + ١}{ر}$

٥ قانون الجمع : ${}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١} = {}^{ن+١}ق_{ر}$

ملاحظات

١ ${}^{ن}ل_{ر}$ ، ${}^{ن}ق_{ر} \in ص^{+}$

٢ ${}^{ن}ق_{ن} = {}^{ن}ق_{٠} = ١$

٣ ${}^{ن}ق_{١} = ن$

٤ التبديل يكون «بدون تكرار» و «يراعى الترتيب» أما التوفيق يكون «بدون تكرار» و «لا يراعى الترتيب».

٥ لكتابة رمز التوافيق ($^{n}c_{r}$) على الحاسبة نضغط على المفاتيح ÷ SHIFT من اليسار لليمين.

٦ يستخدم قانون التبسيط لتبسيط التوافقات العددية إذا كانت : ر $>$ $\frac{١}{٢}$ ن

٧ $\because$ ر $\in$ ط ، ر $\le$ ن لذلك لا معنى للحديث عن ${}^{١٦}ق_{٢٠}$ ، ${}^{٦}ق_{-٢}$ ، ${}^{٦}ق_{٠.٥}$

٨ إذا كان : ${}^{أ}ق_{ر} = {}^{ب}ق_{ر}$ فإن : أ = ب أ، ر = ٠

٩ إذا كان : ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ل_{ر}$ فإن : $\underline{|ر} = ١$ أي أن : ر = ٠ ، أ ١

١٠ إذا كان : ${}^{١٠}ق_{ر} > ١$ ، ${}^{ر}ق_{٨} > ١$ $\therefore$ $٨ < ر < ١٠$ أي أن : ر = ٩

١١ إذا كان : $\underline{|ن - ٨}$ ، $\underline{|٨ - ن}$ لهما قيمة فلابد وأن تكون $\boxed{ن = ٨}$

مثال ١

باستخدام الحاسبة أوجد قيمة : ${}^{٧}ق_{١} + {}^{٥}ق_{٢} - {}^{٣٠}ق_{٠}$

الحل

بالضغط على المفاتيح التالية بالتتابع من اليسار إلى اليمين.

ابدأ → 7 SHIFT ÷ 1 + 5 SHIFT ÷ 2 − 30 SHIFT ÷ 0 =

يظهر على الشاشة 16 $\therefore$ ${}^{٧}ق_{١} + {}^{٥}ق_{٢} - {}^{٣٠}ق_{٠} = ١٦$

مثال ٢

إذا كان : ${}^{ن}ق_{٩} = {}^{ن}ق_{١١}$ أوجد قيمة : ${}^{ن}ق_{١٨}$

الحل

$\because$ ${}^{ن}ق_{٩} = {}^{ن}ق_{١١}$ $\therefore$ ن = ٩ + ١١ = ٢٠

$\therefore$ ${}^{ن}ق_{١٨} = {}^{٢٠}ق_{١٨} = {}^{٢٠}ق_{٢} = \frac{{}^{٢٠}ل_{٢}}{\underline{|٢}} = \frac{٢٠ \times ١٩}{٢ \times ١} = ١٩٠$

مثال ٣

إذا كان : ${}^{١٨}\text{ق}_{\text{س}+٩} = {}^{١٨}\text{ق}_{٣\text{س}+١}$ أوجد قيمة : س

الحـــل

$\because {}^{١٨}\text{ق}_{\text{س}+٩} = {}^{١٨}\text{ق}_{٣\text{س}+١}$

$\therefore$ س + ٩ = ٣ س + ١ ومنها ٢ س = ٨ $\qquad \therefore$ س = ٤

أ، س + ٩ + ٣ س + ١ = ١٨ ومنها ٤ س = ٨ $\qquad \therefore$ س = ٢

مثال ٤

إذا كان : ${}^{١٦}\text{ق}_{\text{س}+٥} = {}^{١٦}\text{ق}_{٢\text{س}-١٠}$ أوجد قيمة : س

الحـــل

$\because {}^{١٦}\text{ق}_{\text{س}+٥} = {}^{١٦}\text{ق}_{٢\text{س}-١٠}$ $\qquad \therefore$ س + ٥ = ٢ س − ١٠

ومنها س = ١٥ (مرفوض) [لأنه يجب أن يكون س + ٥ ≤ ١٦]

أ، س + ٥ + ٢ س − ١٠ = ١٦ ومنها ٣ س = ٢١ $\qquad \therefore$ س = ٧

مثال ٥

أوجد قيمة ن فى كل مما يأتى :

١) ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{٧} : {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٦} = ٤ : ٧$ $\qquad$ ٢) ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{٦} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٥} = ٨٤$

الحـــل

١) $\because \dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{٧}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{٦}} = \dfrac{٤}{٧}$ $\qquad \therefore \dfrac{\text{ن}-٧+١}{٧} = \dfrac{٤}{٧}$ $\qquad \therefore$ ن − ٦ = ٤ $\qquad \therefore$ ن = ١٠

٢) $\because {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٦} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٥} = ٨٤$ $\qquad \therefore {}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{٦} = ٨٤ = {}^{٩}\text{ق}_{٦}$

$\therefore$ ن + ١ = ٩ $\qquad \therefore$ ن = ٨

مثال ٦

إذا كان : ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-٢} = ٤٥$ فما قيمة : ن

الحـــل

$\because {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-٢} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-(\text{ن}-٢)} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}$ $\qquad \therefore {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢} = ٤٥$

$\therefore \dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ل}_{٢}}{\underline{|٢}} = ٤٥$ $\qquad \therefore {}^{\text{ن}}\text{ل}_{٢} = ٤٥ \times \underline{|٢} = ٩٠ = ١٠ \times ٩ = {}^{١٠}\text{ل}_{٢}$

$\therefore$ ن = ١٠

حل آخر : $\because {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢} = ٤٥$ $\qquad \therefore \dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ل}_{٢}}{\underline{|٢}} = ٤٥$ $\qquad \therefore \dfrac{\text{ن}(\text{ن}-١)}{٢ \times ١} = ٤٥$

$\therefore$ ن(ن − ١) = ٩٠ = ١٠ × ٩ $\qquad \therefore$ ن = ١٠

مثال ٧

إذا كان : ${}^{ن}ل_{ر} = ٧٢٠$ ، ${}^{ن}ق_{ر} = ١٢٠$ أوجد قيمة كل من : ن ، ر

ثم أوجد قيمة كل من : ${}^{ن-٢}ق_{٢ر}$ ، ${}^{ن-٢}ق_{٤ر}$

الحـــل

$\because {}^{ن}ق_{ر} = \frac{{}^{ن}ل_{ر}}{\lfloor ر}$ $\quad$ $\therefore ١٢٠ = \frac{٧٢٠}{\lfloor ر}$

$\therefore \lfloor ر = ٦ = ٣ \times ٢ \times ١ = \lfloor ٣$ $\quad$ $\therefore ر = ٣$

$\therefore {}^{ن}ل_{٣} = ٧٢٠$ $\quad$ $\therefore ن(ن-١)(ن-٢) = ١٠ \times ٩ \times ٨$

$\therefore ن = ١٠$ $\quad$ $\therefore {}^{ن-٢}ق_{٢ر} = {}^{١٠-٢}ق_{٦} = {}^{٨}ق_{٦} = {}^{٨}ق_{٢} = \frac{٨ \times ٧}{\lfloor ٢} = ٢٨$

، ${}^{ن-٢}ق_{٤ر} = {}^{١٠-٢}ق_{١٢} = {}^{٨}ق_{١٢}$ غير معرف [لأنه لابد أن يكون $ن \geq ر$]

مثال ٨

حل المعادلة : $٢ \times {}^{ن}ق_{٤} - ٣ \times {}^{ن}ق_{٣} + ٢ \times {}^{ن}ق_{٢} = ٠$

الحـــل

بقسمة المعادلة على ${}^{ن}ق_{٣}$ $\quad$ $\therefore ٢ \times \frac{{}^{ن}ق_{٤}}{{}^{ن}ق_{٣}} - ٣ + ٢ \times \frac{{}^{ن}ق_{٢}}{{}^{ن}ق_{٣}} = ٠$

$\therefore ٢ \times \frac{ن - ٤ + ١}{٤} + ٢ \times \frac{٣}{ن - ٣ + ١} = ٣$ $\quad$ $\therefore \frac{ن - ٣}{٢} + \frac{٦}{ن - ٢} = ٣$

$\therefore \frac{(ن-٣)(ن-٢) + ١٢}{٢(ن-٢)} = ٣$ $\quad$ $\therefore ن^{٢} - ٥ن + ٦ + ١٢ = ٦ن - ١٢$

$\therefore ن^{٢} - ١١ن + ٣٠ = ٠$ $\quad$ $\therefore (ن-٥)(ن-٦) = ٠$

$\therefore ن = ٥$ أو $ن = ٦$

مثال ٩

إذا كان : ${}^{ن}ق_{٥} > {}^{ن}ق_{٤}$ أثبت أن : ن يجب أن تكون أكبر من ٩

الحـــل

$\because {}^{ن}ق_{٥} > {}^{ن}ق_{٤}$ $\quad$ $\therefore \frac{\lfloor ن}{\lfloor ٥ \ \lfloor ن - ٥} > \frac{\lfloor ن}{\lfloor ٤ \ \lfloor ن - ٤}$

$\therefore \frac{\lfloor ن}{٥ \ \lfloor ٤ \ \lfloor ن - ٥} > \frac{\lfloor ن}{(ن-٤) \ \lfloor ٤ \ \lfloor ن - ٥}$ $\quad$ $\therefore \frac{١}{٥} > \frac{١}{ن - ٤}$

$\therefore ن - ٤ > ٥$ $\quad$ $\therefore ن > ٩$

مثال ١٠

بكم طريقة يمكن اختيار لجنة من ٥ أشخاص من بين ١٣ شخصًا ؟

لاحظ أنه :

لا يهمنا ترتيب الأشخاص فى اللجنة التى نختارها
لذلك فإن هذه اللجان هى توفيقات.

الحـــل

عدد الطرق = ${}^{١٣}ق_{٥} = ١٢٨٧$ طريقة.

مثال ١١

لدينا ١٢ طالبًا ، ٨ طالبات بكم طريقة يمكن تكوين مجموعة :

[١] مكونة من ٣ طلاب وطالبتين. [٢] مكونة من ٣ طلاب أو طالبتين.

الحل

عدد طرق اختيار ٣ طلاب من بين ١٢ طالبًا = ${}^{١٢}\text{ق}_{٣}$ = ٢٢٠ طريقة.

، عدد طرق اختيار طالبتين من بين ٨ طالبات = ${}^{٨}\text{ق}_{٢}$ = ٢٨ طريقة.

[١] عدد طرق اختيار ٣ طلاب (و) طالبتين

= ٢٢٠ × ٢٨ = ٦١٦٠ طريقة.

[٢] عدد طرق اختيار ٣ طلاب (أو) طالبتين

= ٢٢٠ + ٢٨ = ٢٤٨ طريقة.

لاحظ أنه :

* إذا كان الربط بين اختيارين بحرف «و» فإننا نضرب ناتجى الاختيارين.
* إذا كان الربط بين اختيارين بحرف «أو» فإننا نجمع ناتجى الاختيارين.

مثال ١٢

١٠ أساتذة يراد ترشيح ٣ منهم للسفر لحضور مؤتمر علمى فى أمريكا و٣ آخرين منهم لحضور مؤتمر آخر يعقد فى نفس الوقت فى إنجلترا ، بكم طريقة يمكن اختيار البعثتين ؟

الحل

البعثة المسافرة إلى أمريكا نختارها من الأساتذة العشرة بطرق عددها = ${}^{١٠}\text{ق}_{٣}$ = ١٢٠ طريقة.

البعثة المسافرة إلى إنجلترا نختارها من الأساتذة السبعة المتبقين بطرق عددها = ${}^{٧}\text{ق}_{٣}$ = ٣٥ طريقة.

وحسب مبدأ العد يكون : عدد طرق اختيار البعثتين = ١٢٠ × ٣٥ = ٤٢٠٠ طريقة.

مثال ١٣

بكم طريقة يمكن انتخاب ٣ لجان كل منها تتكون من شخصين من بين ٨ أشخاص بحيث لا يشترك الشخص فى أكثر من لجنة واحدة ؟

الحل

عدد طرق انتخاب اللجنة الأولى = ${}^{٨}\text{ق}_{٢}$ = ٢٨ طريقة.

نلاحظ أنه باختيارنا شخصين للجنة الأولى فيتبقى ٦ أشخاص ننتخب منهم ٢ للجنة الثانية فيكون : عدد طرق انتخاب اللجنة الثانية = ${}^{٦}\text{ق}_{٢}$ = ١٥ طريقة وبعد ذلك يتبقى ٤ أشخاص ننتخب من بينهم ٢ للجنة الثالثة فيكون :

عدد طرق انتخاب اللجنة الثالثة = ${}^{٤}\text{ق}_{٢}$ = ٦ طرق.

∴ عدد الطرق التى يتم بها انتخاب اللجان الثلاث = ٢٨ × ١٥ × ٦ = ٢٥٢٠ طريقة.

مثال ١٤

بكم طريقة يمكن لمدرس أن يختار طالبًا أو أكثر من بين خمسة طلاب ؟

الحل

يتم اختيار إما ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ من الطلاب وبذلك يكون

عدد الطرق = ${}^{٥}\text{ق}_{١}$ + ${}^{٥}\text{ق}_{٢}$ + ${}^{٥}\text{ق}_{٣}$ + ${}^{٥}\text{ق}_{٤}$ + ${}^{٥}\text{ق}_{٥}$ = ٥ + ١٠ + ١٠ + ٥ + ١ = ٣١

مثال ١٥

إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {(أ ، ب ، ح) : أ ، ب ، ح ∈ س ، أ ≠ ب ≠ ح}
، ع = {{أ ، ب ، ح} : أ ، ب ، ح ∈ س} أوجد عدد عناصر كل من : ص ، ع

الحل

لاحظ أننا : نستخدم التباديل لأن ص تتكون من ثلاثيات مرتبة.

١ يتم اختيار ثلاثيات مرتبة (٣ عناصر)
من المجموعة س (٤ عناصر)
∴ عدد عناصر (ص) = $^{٤}\text{ل}_{٣}$ = ٢٤

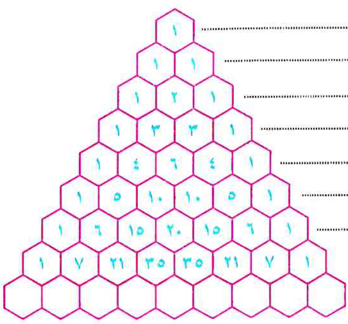
لاحظ أننا : نستخدم التوافيق لأن ع تتكون من مجموعات.

٢ يتم اختيار مجموعات يتكون كل منها من (٣ عناصر)
مأخوذة من المجموعة س (٤ عناصر)
∴ عدد عناصر (ع) = $^{٤}\text{ق}_{٣}$ = ٤

مثلث باسكال

نشاط :

الصف (صفر)
الصف (١)
الصف (٢)
الصف (٣)
الصف (٤)
الصف (٥)
الصف (٦)



١ يبدأ المثلث بالعدد (١) فى القمة.

٢ الصف (١) يمثل (ن = ١)
من العناصر مأخوذ منها ر = ٠ أ، ١
فيكون $^{١}\text{ق}_{٠}$ = ١ ، $^{١}\text{ق}_{١}$ = ١
، الصف (٢) يمثل (ن = ٢) من العناصر
مأخوذ منها ر = ٠ أ، ١ أ، ٢
فيكون $^{٢}\text{ق}_{٠}$ = ١ ، $^{٢}\text{ق}_{١}$ = ٢ ، $^{٢}\text{ق}_{٢}$ = ١
وهكذا ، الصف (٤) يمثل (ن = ٤) من العناصر مأخوذ منها ر = ٠ أ، ١ أ، ٢ أ، ٣ أ، ٤
فيكون $^{٤}\text{ق}_{٠}$ = ١ ، $^{٤}\text{ق}_{١}$ = ٤ ، $^{٤}\text{ق}_{٢}$ = ٦ ، $^{٤}\text{ق}_{٣}$ = ٤ ، $^{٤}\text{ق}_{٤}$ = ١

٣ العدد الأول والعدد الأخير فى كل صف هو (١) لأن $^{\text{ن}}\text{ق}_{٠}$ = ١ ، $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}$ = ١

٤ أى عدد آخر من مثلث باسكال يمكن الحصول عليه بجمع العددين الموضوعين فوقه مباشرة.

٥ يوجد تماثل بين الأعداد الموجودة على جانبى ضلعى المثلث حيث

* يوجد تماثل حول العدد الذى يتوسط الصف (إذا كانت : ن زوجية)
* يوجد تماثل حول العددين اللذين يتوسطان الصف (إذا كانت : ن فردية)

وهذا يطابق العلاقة : $\boxed{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-\text{ر}}}$

٦ مجموع أعداد كل صف = $٢^{\text{ن}}$ حيث إن

* $^{٢}\text{ق}_{٠} + {}^{٢}\text{ق}_{١} + {}^{٢}\text{ق}_{٢} = ٢^{٢}$
* $^{٥}\text{ق}_{٠} + {}^{٥}\text{ق}_{١} + {}^{٥}\text{ق}_{٢} + {}^{٥}\text{ق}_{٣} + {}^{٥}\text{ق}_{٤} + {}^{٥}\text{ق}_{٥} = ٢^{٥}$

تمارين 8

على التوافيق

من أسئلة الكتاب المدرسى ● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $^{١٢}\text{ق}_{٤} + {}^{١٢}\text{ق}_{٣}$ يساوى ....

(أ) ٧١٥ (ب) ٧١٠ (جـ) ٧١٦ (د) ٧٢٠

(٢) إذا كان : $^{\text{ن}}\text{ق}_{٥} : {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٤} = ٣ : ١$ فإن : ن تساوى ....

(أ) ٧ (ب) ٩ (جـ) ١٧ (د) ١٩

(٣) إذا كان : $\underline{|\text{س} - ٣} = ١$ فإن : $^{\text{س}+٢}\text{ق}_{\text{س}-١} =$ ....

(أ) ٣ أ، ٤ (ب) ٩ أ، ٢٠ (جـ) ١٠ أ، ٢٠ (د) ٩ أ، ١٠

(٤) إذا كان : $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-٢} = ٣٦$ فإن : ن = ...

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

(٥) إذا كان : $^{\text{ن}}\text{ق}_{٣} = ١٢٠$ فإن : $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-٩} =$ ....

(أ) ٩٠ (ب) ٦٠ (جـ) ١٠ (د) ٣٠

(٦) إذا كان : $^{٢\text{ن}-١}\text{ق}_{٣} = ٨٤$ فإن : $\underline{|\text{ن} - ٥} =$ ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٦ (د) ٢٤

(٧) إذا كان : $^{٨}\text{ل}_{\text{ر}+١} = ٣٣٦$ فإن : $^{٢\text{ر}}\text{ق}_{٤} =$ ....

(أ) ١٦ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) ١

(٨) إذا كان : $^{\text{ن}+١}\text{ل}_{٢} = ٢٤ \times {}^{\text{ن}-١}\text{ق}_{٢}$ فإن قيم ن هى ....

(أ) ٣ فقط. (ب) ٥ فقط. (جـ) ٨ فقط. (د) ٣ أو ٨

(٩) إذا كان : $^{\text{ن}+\text{م}}\text{ل}_{٢} = ٣٨٠$ ، $^{\text{ن}-١}\text{ق}_{\text{ن}-٢} = ٤$ فإن : $\frac{\text{م}}{\text{ن}} =$ ....

(أ) ٣ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ٤ (د) $\frac{١}{٤}$

(١٠) إذا كان : $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ن}-٣} = ٢٠$ ، $^{\text{م}}\text{ق}_{\text{ن}} = {}^{\text{م}}\text{ق}_{٢\text{ن}+١}$ فإن : م × ن = ...

(أ) ٢٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٦٠ (د) ٨٠

(١١) إذا كان : $^{٦}\text{ق}_{\text{س}} = {}^{٤}\text{ق}_{\text{س}}$ فإن : س = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(١٢) إذا كان : ${}^{٤٠}ق_{٤} = \frac{\underline{|٤٠}}{\underline{|٤}\ \underline{|س}}$ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ٤٤ (جـ) ٣٦ (د) ٤٠

(١٣) إذا كان : ${}^{ن}ل_{ر} = \underline{|ر} \times {}^{ن}ق_{س}$ فإن : س يمكن أن تساوى ....

(أ) ن (ب) ن − ر (جـ) ن + ر (د) ر − ن

(١٤) إذا كان : ${}^{٤}ل_{ن} = ٢٤\ {}^{٤}ق_{ن}$ فإن : ن = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

(١٥) إذا كان : ${}^{١٥}ق_{ر} = {}^{١٥}ق_{٦}$ فإن : ر = ...

(أ) ٦ فقط. (ب) ٩ فقط. (جـ) ٨ فقط. (د) ٦ أ، ٩

(١٦) إذا كان : $\underline{|س} = {}^{٥}ق_{٢} \times {}^{٩}ل_{٢}$ فإن : س = ...

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (د) ١٢٠

(١٧) إذا كان : ${}^{٦}ق_{ر} > ١$ ، ${}^{ر}ق_{٤} > ١$ فإن : $\underline{|ر}$ = ...

(أ) ٦ (ب) ٢٤ (جـ) ١٢٠ (د) ٧٢٠

(١٨) إذا كان : ${}^{ن}ل_{ر} = {}^{ن}ق_{ر}$ فإن : ر = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) صفر أ، ١ (د) ١ أ، ٢

(١٩) إذا كان : ${}^{ن}ل_{١} + {}^{ن}ق_{٢} = ٣٦$ فإن : ن = ...

(أ) ٩ (ب) −٩ أ، ٨ (جـ) ٨ (د) ٩ أ، −٨

(٢٠) إذا كان : ${}^{١٢}ق_{ر^{٢}} = {}^{١٢}ق_{٢ر^{٢}}$ فإن : ر ∋ ....

(أ) {٠ ، ٢} فقط. (ب) {٠ ، −٢} فقط. (جـ) {٢ ، −٢} فقط. (د) {٠ ، ٢ ، −٢}

(٢١) إذا كان : ${}^{ن}ل_{٢} = ٤٢$ ، $\underline{|ن - ر} = ١٢٠$ فإن : ${}^{ن}ق_{ر+٣}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٧ (جـ) ٢١ (د) ٤٢

(٢٢) إذا كان : $\frac{{}^{ن}ل_{٣}}{{}^{ن-١}ل_{٢}} = {}^{ن}ق_{٢}$ فإن : ن = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٤ أ، ٣

(٢٣) إذا كان : ${}^{ن+١}ق_{ن-٢} = ٥٦$ فإن : ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

(٢٤) إذا كان : ${}^{ن}ق_{٢} + {}^{ن}ق_{ن-٣} = ٢\ {}^{ن}ق_{٤}$ فإن : ن = ...

(أ) ٨ (ب) ٧ (جـ) ٢ (د) ١١

(٢٥) ${}^{ن}ل_{ر} \div {}^{ن}ق_{ر}$ = ...

(أ) $\underline{|ن - ١}$ (ب) $\underline{|ر}$ (جـ) $\underline{|ن}$ (د) ١

(٢٦) $\frac{{}^{ن}ق_{ر-١}}{{}^{ن}ق_{ر-٢}} =$ ....

(أ) $\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}}$ (ب) $\frac{ن-ر+١}{ر}$ (جـ) $\frac{ن-ر+٢}{ر-١}$ (د) $\frac{{}^{ن}ل_{ر-١}}{{}^{ن}ل_{ر-٢}}$

(٢٧) إذا كان : ${}^{ن}ل_{س} + {}^{س}ق_{ن} = ١٢١$ فإن : $س =$ ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٢٨) إذا كان : ${}^{ن}ل_{س} + {}^{س}ل_{ن} = ١٤٤٠$ فإن : ${}^{ن+٤}ق_{س-٥} =$ ....

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (د) ١٢

(٢٩) إذا كان : ${}^{ن}ق_{٩} : {}^{ن}ق_{٧} = ٧ : ٩$ فإن : $ن =$ ....

(أ) ٧ (ب) ١٥ (جـ) ١٦ (د) ٩

(٣٠) إذا كان : ${}^{ن-م}ل_{٣} = ٢١٠$ ، ${}^{ن+م}ق_{٤} = ٧١٥$ فإن : $م \times ن =$ ....

(أ) ١٥ (ب) ٣٠ (جـ) ٣٥ (د) ٥٠

(٣١) إذا كان : ${}^{ن}ل_{ر} = ١٢٠ \times {}^{ن}ق_{ن-ر}$ فإن : $ر =$ ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٣٢) إذا كان : ${}^{ن}ق_{١٠} = {}^{ن}ق_{١٤}$ فإن : ${}^{٢٥}ق_{ن} =$ ....

(أ) ٢٤ (ب) ٢٥ (جـ) ١ (د) ٤٩

(٣٣) إذا كان : ${}^{٢٧}ق_{٢ر+١} = {}^{٢٧}ق_{٥ر-٨}$ فإن : ${}^{٥}ق_{ر} =$ ....

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (جـ) ١٣ (د) ١٥

(٣٤) إذا كان : ${}^{ن}ق_{١٠} > {}^{ن}ق_{٩}$ فإن : $ن$ ١٩

(أ) $=$ (ب) $<$ (جـ) $>$ (د) $\geq$

(٣٥) إذا كان : ${}^{٢ن+١}ق_{٢ن-١} - ٢ \times {}^{ن+٢}ق_{ن} = ٤٦$ فإن : $ن =$ ....

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

(٣٦) إذا كان : ${}^{ن-١}ق_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} - {}^{ن-١}ق_{ر}$ فإن : $ن =$ ....

(أ) $٢ر + ١$ (ب) $ر - ١$ (جـ) $ر + ٢$ (د) $ر + ١$

(٣٧) إذا كان : ${}^{ن}ق_{١} + ٢ \times {}^{ن}ق_{٢} + {}^{ن}ق_{٣} = ٣٥$ ، ${}^{١٠}ل_{ر} = ٧٢٠$ فإن : $\underline{|ن - ر} =$ ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٦ (د) ٢٤

(٣٨) أصغر قيمة للعدد ($ن$) تجعل ${}^{ن}ل_{ر-٢} = ٢٤ \times {}^{ن}ق_{ر-٢}$ هى ....

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٨

(٣٩) إذا كان : ${}^{٤}ق_{٠} + {}^{٤}ق_{١} + {}^{٤}ق_{٢} + {}^{٤}ق_{٣} + {}^{٤}ق_{٤} = ٢^{ن}$ فإن : $ن =$ ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٤٠) ${}^{1}\text{ق}_{0} + {}^{2}\text{ق}_{1} + {}^{3}\text{ق}_{2} + \dots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-1} =$ ....

(أ) $\frac{\text{ن}^2}{2}$ (ب) $\frac{\text{ن}^2 + \text{ن}}{2}$ (جـ) $\frac{\text{ن}^2 - \text{ن}}{3}$ (د) $\frac{\text{ن}^2 + 2\text{ن}}{2}$

(٤١) $1 + {}^{6}\text{ق}_{5} + {}^{7}\text{ق}_{5} + {}^{8}\text{ق}_{5} + \dots + {}^{49}\text{ق}_{5} =$ ....

(أ) ${}^{100}\text{ق}_{5}$ (ب) ${}^{99}\text{ق}_{6}$ (جـ) ${}^{50}\text{ق}_{6}$ (د) ${}^{50}\text{ق}_{5}$

(٤٢) إذا كان : ${}^{10}\text{ق}_{\text{ر}+1} : {}^{10}\text{ق}_{\text{ر}-1} = 21 : 10$ فإن : ر = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٤٣) إذا كان : $\text{أ} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$ ، $\text{ب} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-1}$ فإن : $\frac{\text{أ}+\text{ب}}{\text{ب}} =$ ....

(أ) $\frac{\text{ن}-1}{\text{ر}}$ (ب) $\frac{\text{ن}+1}{\text{ر}}$ (جـ) $\frac{\text{ن}}{\text{ن}+1}$ (د) $\frac{\text{ن}}{\text{ر}+1}$

(٤٤) إذا كان : $\frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{4} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{3}}{{}^{\text{ن}+1}\text{ق}_{3}} = 1$ فإن : $|\underline{\text{ن} - 6} =$ ....

(أ) ٦ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ٢٤

(٤٥) إذا كان : ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{5} \geq {}^{\text{ن}}\text{ق}_{4}$ فإن : ن ∈ ....

(أ) {٥ ، ٤} (ب) {٤ ، ٩}

(جـ) {٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩} (د) {٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩}

(٤٦) إذا كان : ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{2\text{ر}}$ حيث : ن ، ر ∈ ص^{+} فإن : ن مضاعف للعدد ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٤٧) إذا كان : ${}^{\text{س}+\text{ص}}\text{ل}_{4} = 360$ ، $|\underline{2\text{س} + \text{ص}} = 5040$ فإن : ${}^{\text{ص}}\text{ق}_{2\text{س}} =$ ....

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ١٢

(٤٨) إذا كان ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} : {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-1} = 7 : 4$ ، ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} : {}^{\text{ن}-1}\text{ل}_{\text{ر}} = 5 : 3$ فإن : ن + ر = ...

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ١١ (د) ١٤

(٤٩) إذا كان : ${}^{\text{ن}^2+\text{ن}}\text{ق}_{3} = {}^{\text{ن}^2+\text{ن}}\text{ق}_{9}$ فإن : ن يمكن أن تساوى ....

(أ) ١٢ (ب) ٦ (جـ) ٣ (د) ٤

(٥٠) إذا كان : ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{2}$ ، ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{2}$ ، $|\underline{\text{ن}}$ فى تتابع هندسى فإن : ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٢

(٥١) ${}^{7}\text{ق}_{0} + {}^{7}\text{ق}_{1} + {}^{7}\text{ق}_{2} + {}^{7}\text{ق}_{3} + {}^{7}\text{ق}_{4} + {}^{7}\text{ق}_{5} + {}^{7}\text{ق}_{6} + {}^{7}\text{ق}_{7} = 2^{7} +$ ....

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) −٧ (د) ٧

(٥٢) عدد التبديلات التى يمكن تكوينها من (ن) عنصر يساوى ....

(أ) $\text{ن}\,|\underline{\text{ن}}$ (ب) ${}^{\text{ن}+1}\text{ل}_{\text{ن}}$ (جـ) ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}$ (د) ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}\,|\underline{\text{ن}}$

(٥٣) إذا كان عدد طرق اختيار ٣ عناصر معًا من ن عنصر يساوى ١٠ فإن : ن = ...

(أ) ٣٠ (ب) ١٠ (جـ) ٦ (د) ٥

(٥٤) إذا التقى ٤ أصدقاء فصافح كل منهم الآخر. كم مصافحة تمت بين الأصدقاء ؟

(أ) ١٦ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ٤

(٥٥) اشترك ٧ أشخاص فى مسابقة الشطرنج بحيث تجرى مباراة واحدة بين كل شخصين فإن عدد مباريات المسابقة = ... مباراة.

(أ) ٤٢ (ب) ٢٨ (جـ) ٢١ (د) ١٨

(٥٦) عدد أقطار الشكل الثمانى = ...

(أ) ٨ (ب) ٢٠ (جـ) ٣٢ (د) ١٨

(٥٧) مضلع له ٤٤ قطر فإن عدد أضلاعه = ...

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ١١ (د) ١٢

(٥٨) عدد طرق اختيار ٤ عناصر معًا من ١٠ عناصر دون مراعاة الترتيب هو ....

(أ) $(١٠)^{٤}$ (ب) ${}^{١٠}ل_{٤}$ (جـ) ${}^{١٠}ق_{٤}$ (د) $\underline{|٤}$

(٥٩) عدد الطرق التى يمكن بها اختيار سبعة طلاب من بين ١٠ طلاب للذهاب إلى رحلة تاريخية = ... طريقة.

(أ) ٨٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ١٤٤ (د) ٧٠

(٦٠) عدد طرق اختيار كرة حمراء وأخرى بيضاء من بين ٦ كرات حمراء مرقمة من ١ إلى ٦ و ٨ كرات بيضاء مرقمة من ١ إلى ٨ = ...

(أ) ٢ (ب) ١٤ (جـ) ٢٤ (د) ٤٨

(٦١) إذا كان عدد طرق اختيار ٣ عناصر معًا من مجموعة ما يساوى عدد طرق اختيار ٥ عناصر معًا من نفس المجموعة فإن عدد عناصر هذه المجموعة يساوى ....

(أ) ${}^{٥}ق_{٣}$ (ب) ${}^{٥}ل_{٣}$ (جـ) ٨ (د) ١٥

(٦٢) فصل به عدد الأولاد ضعف عدد البنات فإذا كان عدد طرق اختيار ولد وبنت هو ٧٢ فإن عدد الأولاد يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ١٨

(٦٣) بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة مكونة من رجلين وسيدة من بين ٧ رجال و٥ سيدات ....

(أ) ٢١٠ (ب) ١٠٥ (جـ) ٢٦ (د) ٧٥

(٦٤) من بين أربعة معلمين يراد اختيار معلم لتدريب طلبة الأولمبياد فى مادة الرياضيات ، ثم معلم آخر لإعداد الاختبار. فإن عدد طرق الاختيار = ...

(أ) ١٦ (ب) ٨ (جـ) ١٢ (د) ١٥

(٦٥) فى مسابقة لكرة القدم يتقابل فيها كل فريقين مرة واحدة وكان عدد المباريات خلال المسابقة ١٥٣ مباراة فإن عدد الفرق المتنافسة يساوى ....

(أ) ٩ (ب) ١٣ (جـ) ١٨ (د) ١٩

(٦٦) شخص له ٨ أصدقاء ، عدد طرق دعوة صديق أو أكثر منهم للعشاء يساوى ....

(أ) ٢٥٠ (ب) ٢٠٠ (جـ) ٢٥٥ (د) ٢٥٦

(٦٧) ٥ نقط فى مستوى لا توجد أى ثلاثة منها على مستقيم واحد فإن عدد المثلثات التى يمكن تكوينها من هذه النقط = ...

(أ) ٥ + ٣ (ب) ٥ × ٣ (جـ) ${}^{٥}\text{ل}_{٣}$ (د) ${}^{٥}\text{ق}_{٣}$

(٦٨) يراد تقسيم ٨ ألعاب مختلفة بين ثلاثة أطفال بحيث يأخذ الطفل الأول ٣ ألعاب والثانى لعبتين والثالث يأخذ الباقى فبكم طريقة يمكن إجراء التقسيم ؟

(أ) ${}^{٨}\text{ق}_{٣} + {}^{٨}\text{ق}_{٢} + {}^{٨}\text{ق}_{٨}$ (ب) ${}^{٨}\text{ق}_{٣} \times {}^{٨}\text{ق}_{٢}$

(جـ) ${}^{٨}\text{ق}_{٣} \times {}^{٥}\text{ق}_{٢} \times {}^{٥}\text{ق}_{٣}$ (د) ${}^{٨}\text{ق}_{٣} \times {}^{٥}\text{ق}_{٢} \times {}^{٣}\text{ق}_{٣}$

(٦٩) امتحان مكون من ٦ أسئلة وعلى الطالب إجابة ثلاثة منها صحيحة على الأقل لينجح فإن عدد الطرق التى يمكن للطالب أن ينجح بها = ...

(أ) ٢٠ (ب) ١٨٠٠ (جـ) ١٥ (د) ٤٢

(٧٠) امتحان مكون من ٦ أسئلة ٢ منهم إجبارى و ٤ اختيارى وكان على الطالب الإجابة على ٣ أسئلة أو أكثر من الامتحان لكى ينجح فإن عدد الطرق التى يمكن بها أن ينجح الطالب = ...

(أ) ٤٢ (ب) ٩٦ (جـ) ١٥ (د) ٤٨

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ اكتب بدلالة التباديل كلًّا من :

(١) ${}^{٨}\text{ق}_{٣}$ (٢) ${}^{١٩}\text{ق}_{٢}$ (٣) ${}^{٥}\text{ق}_{٠}$ (٤) ${}^{س}\text{ق}_{س-ص}$

٢ اكتب مستخدمًا الصورة ${}^{ن}\text{ق}_{ر}$ كلًّا مما يأتى :

(١) $\frac{{}^{٨}\text{ل}_{٢}}{\underline{|٢}}$ (٢) $\frac{{}^{٩}\text{ل}_{٣}}{\underline{|٣}}$ (٣) $\frac{{}^{١٠}\text{ل}_{٤}}{\underline{|٤}}$ (٤) $\frac{{}^{٨}\text{ل}_{٠}}{\underline{|٠}}$

٣ إذا كان : ${}^{م}\text{ق}_{م-٤} = ٣٥$ **فأوجد قيمة : م** وإذا كان : ${}^{ن}\text{ق}_{م} = {}^{ن}\text{ق}_{م+١}$ **فأوجد قيمة : ن** «٧ ، ١٥»

٤ إذا كان : ${}^{ن}\text{ق}_{٣} = ٣٥$ ، ${}^{س}\text{ق}_{ن} = {}^{س}\text{ق}_{ن+٣}$ **فما قيمة : س** «١٧»

٥ إذا كان : ${}^{٢٨}\text{ق}_{ر} = {}^{٢٨}\text{ق}_{٢ر-٤٧}$ **أوجد قيمة : ر** «٢٥»

٦ إذا كان : ${}^{25}ق_{2ر+1} = {}^{25}ق_{3ر-1}$ فما قيمة : ر «٢ أ ٥»

---

٧ إذا كان : ${}^{36}ق_{3ر-5} = {}^{36}ق_{ر-3}$ أوجد قيمة : ${}^{11}ق_{ر}$ «١»

---

٨ إذا كان : ${}^{ن+1}ق_{4} = \frac{5}{2}\,{}^{ن}ق_{3}$ فأوجد قيمة : ن «٩»

---

٩ إذا كان : ${}^{ن}ق_{3} = \frac{1}{3} \cdot 30\, ن$ فأوجد قيمة : ن «١٥»

---

١٠ إذا كان ${}^{ن}ق_{4} : {}^{ن-2}ق_{3} = 7 : 2$ فما قيمة : ن «٧ أ ٨»

---

١١ إذا كان ${}^{ن}ق_{5} : {}^{ن}ق_{4} = 8 : 5$ فما قيمة : ن «١٢»

---

١٢ **أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :**

(١) ${}^{ن}ق_{2} = 84$ «{٩}»

(٢) ${}^{12}ق_{ر} = {}^{12}ق_{2ر+3}$ «{٣}»

(٣) ${}^{ن}ق_{2ن-21} = {}^{ن}ق_{3}$ «{١٨ ، ١٢}»

(٤) ${}^{ن+1}ق_{3} = 4\,{}^{ن-1}ق_{2}$ «{٣ ، ٨}»

(٥) $\underline{|س+2} = 182 \times {}^{س}ل_{11}\, \underline{|س-11}$ «{١٢}»

(٦) ${}^{ن}ق_{3} + 2\,{}^{ن}ق_{2} + {}^{ن}ق_{1} = 120$ «{٨}»

(٧) $2 \times {}^{ن}ق_{4} - 11 \times {}^{ن}ق_{3} + 22 \times {}^{ن}ق_{2} = 0$ «{١٤ ، ١٣}»

---

١٣ **أوجد قيمة كل مما يأتى :**

(١) ${}^{5}ق_{0} + {}^{5}ق_{1} + {}^{5}ق_{2} + {}^{5}ق_{3} + {}^{5}ق_{4} + {}^{5}ق_{5}$ «٣٢»

(٢) ${}^{5}ق_{0} - {}^{5}ق_{1} + {}^{5}ق_{2} - {}^{5}ق_{3} + {}^{5}ق_{4} - {}^{5}ق_{5}$ «صفر»

---

١٤ **أوجد قيمة كل من ن ، ر فى كل مما يأتى :**

(١) ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+2} : {}^{ن}ق_{ر+1} = 15 : 28 : 24$ «٤ ، ١٢»

(٢) ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+2} : {}^{ن}ق_{ر+4} = 3 : 14 : 14$ «١٢ ، ١٠»

---

١٥ إذا كان : ${}^{2ن+م}ق_{2} = 190$ ، ${}^{ن-2م}ل_{3} = 60$ أوجد قيمة كل من : ن ، م «٢ ، ٩»

---

١٦ إذا كان : ${}^{ن}ل_{ر-1} = 6720$ ، ${}^{ن}ق_{ر-1} = 56$ فما قيمة كل من : ن ، ر «٦ ، ٨»

---

١٧ أثبت أن : ${}^{ن}ق_{ر} \div {}^{ن-1}ق_{ر-1} = \frac{ن}{ر}$ ومنها استنتج قيمة : ${}^{100}ق_{50} \div {}^{99}ق_{49}$ «٢»

---

١٨ أثبت أن : ${}^{ن}ق_{ر} \div {}^{ن}ق_{ر-1} = \frac{ن - ر + 1}{ر}$ ومنها استنتج قيمة : ${}^{10}ق_{6} \div {}^{10}ق_{5}$ « $\frac{5}{6}$ »

١٩ أثبت أن : ${}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-1} = {}^{ن+1}ق_{ر}$ ومنها استنتج قيمة : ${}^{10}ق_{3} + {}^{10}ق_{4}$ «٣٣٠»

---

٢٠ أثبت أن : ${}^{2ن}ق_{ن} = 2^{ن} \times \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2ن - 1)}{\underline{|ن}}$

---

٢١ أثبت أن :

(١) ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن-1}ق_{ر-1} = \dfrac{ن}{ر}$ واستخدم ذلك في : إثبات أن : $\dfrac{{}^{25}ق_{4} + {}^{24}ق_{3}}{{}^{24}ق_{3} + {}^{23}ق_{2}} = \dfrac{58}{9}$

(٢) ${}^{ن}ق_{ر} + 2 \times {}^{ن}ق_{ر+1} + {}^{ن}ق_{ر+2} = {}^{ن+2}ق_{ر+2}$

ومن ذلك أوجد قيمة : ${}^{10}ق_{5} \div 2 \times {}^{10}ق_{6} + {}^{10}ق_{7}$

---

٢٢ إذا كان ${}^{2ن+1}ل_{ن-1} : {}^{2ن}ق_{ن+1} = \dfrac{3}{2}\,\underline{|ن - 1}$ فما قيمة : ن؟ «٤»

---

٢٣ أوجد في $ص^{+}$ قيمتي س ، ص من المعادلتين :

${}^{س}ق_{ص} = 2 \times {}^{س}ق_{ص+1}$ ، ${}^{س}ق_{ص} = {}^{س}ق_{ص-1}$ «س = ٥ ، ص = ٣»

---

٢٤ أثبت أن : $\dfrac{{}^{ن}ق_{1} \times {}^{2ن}ق_{2}}{{}^{3ن}ق_{2}} = \dfrac{{}^{2ن}ل_{2}}{{}^{3ن-1}ل_{2}}$

---

٢٥ أثبت أن : $\underline{|25}$ يقبل القسمة على $\underline{|13}\ \underline{|12}$

---

٢٦ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) إذا كان : $\underline{|ن} = 720$ ، ${}^{ن+1}ق_{ر} : {}^{ن+1}ق_{ر-1} = \dfrac{3}{5}$ أوجد قيمة : ${}^{ن+1}ق_{ر-2}$ «٣٥»

(٢) إذا كان ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-1} = 6 : 5$ ، ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ر+1}$

فأوجد قيمة كل من : ن ، ر «٢١ ، ١٠»

(٣) إذا كان : ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+1} = 2 : 3$ ، ${}^{ن}ق_{ر-1} = 4 \times {}^{ن}ق_{ر-2}$

فأوجد قيمة كل من : ن ، ر «٩ ، ٣»

(٤) إذا كان : $2 \times {}^{ن}ق_{5} = {}^{ن}ق_{4} + {}^{ن}ق_{6}$ فما قيمة : ن «١٤ أ ٧»

(٥) أوجد قيمة ر إذا كان :

(١) $\dfrac{{}^{13}ق_{ر} + {}^{13}ق_{ر-1}}{{}^{13}ق_{ر+1} + {}^{13}ق_{ر}} = 2$ (٢) $\dfrac{{}^{7}ق_{ر}}{{}^{8}ق_{ر-2}} \times \dfrac{{}^{8}ق_{ر-1}}{{}^{7}ق_{ر-1}} = 2$ «٩ ، ٤»

(٦) إذا كان : $4 \times {}^{ن+1}ق_{ر+1} = 9 \times {}^{ن}ق_{ر}$ ، $\underline{|ن - 3} = 120$

فأوجد قيمة : ${}^{ن}ل_{ر} : {}^{ن}ق_{ر}$ «٦»

(٧) إذا كان : ${}^{ن}ق_{ر} \div {}^{ن}ق_{ر-١} = ٥ : ٧$ ، ${}^{ن}ل_{ر} \div {}^{ن}ل_{ر-١} = ٥$

أوجد قيمة كل من : ن ، ر «١١ ، ٧»

(٨) إذا كان ${}^{١٣}ق_{ر} : {}^{١٣}ق_{ر+١} = ٩ : ٥$ ، ${}^{ن}ق_{ر-٢} + {}^{ن}ق_{ر-١} = ٣٤٣٢$

فأوجد قيمة كل من : ن ، ر «١٣ ، ٨»

---

٢٧ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) إذا تم اختيار ثلاثة طلاب من بين عدد (ن) من الطلاب لحضور ندوة بحيث كان عدد طرق الاختيار يساوى ١٠ أوجد عدد الطلاب. «٥»

(٢) يوجد فى أحد الصفوف ١٠ طلاب ، ٨ طالبات ، بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة أنشطة خماسية تتألف من ثلاثة طلاب وطالبتين من هذا الصف. «٣٣٦٠»

(٣) بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة مكونة من ٤ رجال أو ٣ سيدات من بين ٦ رجال و٥ سيدات. «٢٥»

(٤) مدرسة بها ١٠ طلاب يمارسون كرة السلة ، بكم طريقة يمكن اختيار فريق مكون من ٥ أعضاء وقائد للفريق من هؤلاء اللاعبين. «١٢٦٠»

---

٢٨ أوجد عدد الطرق التى يمكن بها انتخاب لجنتين كل منهما تتكون من ٣ أشخاص من بين ١٢ شخصًا بحيث لا يدخل شخص فى كلتا اللجنتين. «١٨٤٨٠»

---

٢٩ إذا كانت : $س = \{س : س \in ط ، ٥ \le س \le ٩\}$ ، $ص = \{(أ ، ب) : أ ، ب \in س ، أ \neq ب\}$ ، $ع = \{\{أ ، ب ، حـ\} : أ ، ب ، حـ \in س\}$ أوجد عدد عناصر كل من ص ، ع «٢٠ ، ١٠»

---

٣٠ بكم طريقة يمكن لمدرس أن يختار طالبًا أو أكثر من بين ستة طلبة ؟ «٦٣»

---

٣١ بكم طريقة يمكن للجنة مكونة من خمسة أعضاء أن تتخذ قرارًا بالأغلبية ؟ «١٦»

---

٣٢ فصل دراسى به ٧ أولاد ، ٦ بنات واختير فريق مكون من ٥ أشخاص من هذا الفصل

احسب عدد الفرق المختلفة التى يمكن اختيارها إذا كان أعضاء الفريق :

(١) من أى جنس.

(٢) من الأولاد فقط.

(٣) من البنات فقط.

(٤) من نفس الجنس.

(٥) من ثلاثة أولاد وبنتين. «١٢٨٧ ، ٢١ ، ٦ ، ٢٧ ، ٥٢٥»

---

٣٣ يدرس الطالب فى إحدى السنوات الدراسية بالجامعة ثمان مواد مختلفة ولا يحق له الانتقال إلى السنة التالية إلا إذا نجح فى ٦ منها على الأقل ، بكم طريقة يمكن للطالب الانتقال إلى السنة التالية ؟ «٣٧»

فهم ○ تطبيق ○ مستويات عليا

٣٤ صندوق به ٦ كرات بيضاء ، ٤ كرات حمراء. احسب عدد طرق سحب ٣ كرات معًا إذا كانت :

(١) الكرات الثلاثة من أى لون.

(٢) الكرات الثلاثة تحتوى على كرتين بيضاويتين بالضبط.

(٣) الكرات الثلاثة تحتوى على كرتين بيضاويتين على الأقل.

(٤) الكرات الثلاثة تحتوى على كرتين بيضاويتين على الأكثر. «١٢٠ ، ٦٠ ، ٨٠ ، ١٠٠»

---

٣٥ تم ترشيح ٩ أشخاص لاختيار ٣ سفراء لإحدى الدول العربية فبكم طريقة يتم هذا الاختيار ؟ وإذا اشترط وجود شخص معين فى أى اختيار فبكم طريقة يتم الاختيار ؟ وإذا استبعد شخص معين فبكم طريقة يتم الاختيار ؟ «٨٤ ، ٢٨ ، ٥٦»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) ${}^{٦}ق_{ر}$ تكون أكبر ما يمكن عندما $ر =$ ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٦

(٢) إذا كان : ${}^{٤}ق_{ر+٢} = {}^{٤}ق_{٢-ر}$ فإن : $ر \in$ ....

(أ) $\{٠\}$ (ب) $\{-١ ، ٤\}$

(جـ) $\{٠ ، ٣\}$ (د) $\{-٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢\}$

(٣) $\sum_{ر=٠}^{ن} {}^{ن}ق_{ر} =$ ....

(أ) $٢^{ر}$ (ب) $ن^{٢}$ (جـ) $٢^{ن}$ (د) $١ - ر^{٢}$

(٤) إذا كانت النقط أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و تقع على دائرة فإن عدد المضلعات التى يمكن رسمها من هذه النقط يساوى ....

(أ) ٢٠ (ب) ١٥ (جـ) ٣٠ (د) ٤٢

(٥) إذا كان : $م = {}^{ن}ق_{٢}$ فإن : ${}^{م}ق_{٢} =$ ....

(أ) $٣ \, {}^{ن}ق_{٣}$ (ب) $٣ \, {}^{ن+١}ق_{٣}$ (جـ) $٤ \, {}^{ن}ق_{٤}$ (د) $٣ \, {}^{ن+١}ق_{٤}$

(٦) عدد متوازيات الأضلاع التى يمكن تكوينها من (م) من المستقيمات المتوازية التى تتقاطع مع (ن) من المستقيمات المتوازية يساوى ....

(أ) ${}^{م-١}ق_{٢} \cdot {}^{ن-١}ق_{٢}$ (ب) ${}^{م-١}ق_{٢} \cdot {}^{ن}ق_{٢}$

(جـ) ${}^{م}ق_{٢} \cdot {}^{ن-١}ق_{٢}$ (د) ${}^{م}ق_{٢} \cdot {}^{ن}ق_{٢}$

ثانيًا

التفاضل والتكامل وحساب المثلثات

الوحدة 3 التفاضل والتكامل.

الوحدة 4 حساب المثلثات.

الوحدة 3

التفاضل والتكامل

دروس الوحدة

الدرس 1

معدل التغير

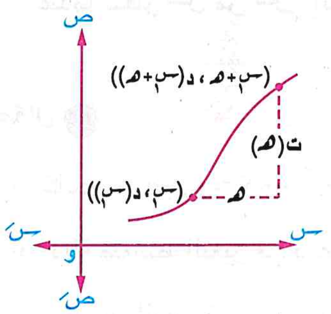
دالة التغير

- إذا كانت : ص = د (س) وتغيرت قيم س من $س_1$ إلى $س_2$ (حيث $س_1$ ، $س_2$ ينتميان إلى مجال الدالة د)

فإن : ص تتغير تبعًا لتغير س من القيمة د ($س_1$) إلى القيمة د ($س_2$)

فإذا كان التغير فى س هو Δ س (ويقرأ دلتا س) = $س_2 - س_1$

فإن التغير فى ص هو $\boxed{\Delta \text{ ص} = \text{د}(س_2) - \text{د}(س_1)}$



- وإذا اعتبرنا أن $س_1$ ، $س_1$ + هـ ينتميان إلى مجال الدالة د

فإن لكل تغير فى $س_1$ مقداره (هـ) أى تتغير س

من $س_1$ إلى $س_1$ + هـ يحدث تغير فى ص يتعين بالدالة ت حيث :

$\boxed{\text{ت}(هـ) = \text{د}(س_1 + هـ) - \text{د}(س_1)}$ وهى دالة فى المتغير هـ وتسمى **دالة التغير** فى د عند س = $س_1$

مثال ١

إذا كانت : د (س) = $س^2$ – ٣ س + ٤ **فأوجد :**

١ دالة التغير فى د عند س = ٣ ثم احسب قيمة ت (٠,٢)

٢ التغير فى د (س) عندما تتغير س من ١ إلى ١,٤

الحل

١ د (س) = $س^2$ – ٣ س + ٤

وعند س = ٣ تكون :

ت (هـ) = د (٣ + هـ) – د (٣) = [$(٣ + هـ)^2$ – ٣ (٣ + هـ) + ٤] – [$(٣)^2$ – ٣ × ٣ + ٤]

= ٩ + ٦ هـ + $هـ^2$ – ٩ – ٣ هـ + ٤ – ٤ = ٣ هـ + $هـ^2$ وهذه هى دالة التغير فى د عند س = ٣

∴ ت (٠,٢) = ٣ (٠,٢) + $(٠,٢)^2$ = ٠,٦٤

٢ التغير فى د (س) = د (س$_٢$) − د (س$_١$) = د (١,٤) − د (١)

= [(١,٤)^٢ − ٣ × ١,٤ + ٤] − [(١)^٢ − ٣ × ١ + ٤] = −٠,٢٤

* **حل آخر للبند (٢) :** هـ = ١,٤ − ١ = ٠,٤ ، س$_١$ = ١ ونوجد دالة التغير فى د عند س = ١

ثم نوجد ت (٠,٤)

عند س = ١ تكون ت (هـ) = د (١ + هـ) − د (١) = [(١ + هـ)^٢ − ٣ (١ + هـ) + ٤] − [١ − ٣ + ٤]

= ١ + ٢ هـ + هـ^٢ − ٣ − ٣ هـ + ٤ − ٢ = هـ^٢ − هـ

∴ ت (٠,٤) = (٠,٤)^٢ − ٠,٤ = ٠,١٦ − ٠,٤ = −٠,٢٤

دالة متوسط التغير

بقسمة دالة التغير السابقة ت (هـ) على التغير الحادث فى س وهو هـ حيث هـ ≠ ٠ فإننا نحصل على دالة جديدة تسمى **دالة متوسط التغير** فى د عند س = س$_١$ ونرمز لها بالرمز م (هـ)

$$\text{م (هـ)} = \frac{\text{ت (هـ)}}{\text{هـ}} = \frac{\text{د (س}_١ + \text{هـ)} - \text{د (س}_١)}{\text{هـ}}$$

ملاحظة

عندما تتغير س من س$_١$ إلى س$_٢$ فإن متوسط التغير = $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{د (س}_٢) - \text{د (س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

مثال ٢

إذا كانت : د (س) = ٢ س^٢ + ٥ س − ١ فأوجد :

١ دالة متوسط التغير فى د عند س = ٢ ثم احسب م (٠,٢)

٢ متوسط التغير فى د عندما تتغير س من ٥,٥ إلى ٤

الحل

١ د (س) = ٢ س^٢ + ٥ س − ١

عند س = ٢ تكون :

$$\text{م (هـ)} = \frac{\text{د (٢ + هـ)} - \text{د (٢)}}{\text{هـ}}$$

حيث هـ ≠ ٠ = $\frac{١}{\text{هـ}}$ [(٢ (٢ + هـ)^٢ + ٥ (٢ + هـ) − ١) − (٢ × ٤ + ٥ × ٢ − ١)]

= $\frac{١}{\text{هـ}}$ (٨ + ٨ هـ + ٢ هـ^٢ + ١٠ + ٥ هـ − ١ − ١٧)

= $\frac{١}{\text{هـ}}$ (١٣ هـ + ٢ هـ^٢) = ١٣ + ٢ هـ وهذه دالة متوسط التغير عند س = ٢

∴ م (٠,٢) = ١٣ + ٢ × ٠,٢ = ١٣,٤

٢ $\because$ متوسط التغير فى د = $\frac{د(س_٢) - د(س_١)}{س_٢ - س_١}$

، عندما تتغير س من ٥,٥ إلى ٤ $\therefore$ س$_١$ = ٥,٥ ، س$_٢$ = ٤

$\therefore$ متوسط التغير فى د = $\frac{د(٤) - د(٥,٥)}{٤ - ٥,٥} = \frac{(٣٢ + ٢٠ - ١) - (٦٠,٥ + ٢٧,٥ - ١)}{-١,٥} = ٢٤$

ويمكن الحل بإيجاد دالة متوسط التغير عند س = ٥,٥ ثم إيجاد م (-١,٥)

معدل التغير

إذا كان لدالة متوسط التغير السابقة م (هـ) نهاية محددة عندما هـ ← ٠ فإن هذه النهاية تسمى معدل التغير للدالة عند س = س$_١$

$\therefore$ معدل التغير للدالة عند س$_١$ = $\lim_{هـ \to ٠}$ م (هـ) = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$

مثال ٣

إذا كانت : د (س) = س^٢ - ٣ س فأوجد معدل التغير للدالة د : عند س = ٢

الحل

عند س = ٢ تكون م (هـ) = $\frac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{هـ}$ حيث هـ $\neq$ ٠

$= \frac{١}{هـ} [((٢ + هـ)^٢ - ٣ (٢ + هـ)) - (٤ - ٦)]$

$= \frac{١}{هـ} (٤ + ٤ هـ + هـ^٢ - ٦ - ٣ هـ + ٢) = \frac{١}{هـ} (هـ + هـ^٢) = ١ + هـ$

$\therefore$ معدل التغير للدالة د عند س = ٢ هو $\lim_{هـ \to ٠}$ (١ + هـ) = ١

مثال ٤

صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بالتسخين بحيث تظل محتفظة بشكلها أوجد :

١ متوسط التغير فى مساحتها بالنسبة لطول ضلعها عندما يتغير طول ضلعها من ١٠ سم إلى ١٠,٢ سم

٢ معدل التغير فى مساحتها بالنسبة لطول ضلعها عندما يكون طول ضلعها ٢٠ سم

الحل

بفرض أن طول ضلع الصفيحة = س سم ومساحتها = ص سم^٢ $\therefore$ ص = د (س) = س^٢

١ $\because$ Δ ص = د (س$_٢$) - د (س$_١$) = د (١٠,٢) - د (١٠) = (١٠,٢)^٢ - (١٠)^٢ = ٤,٠٤

، Δ س = ١٠,٢ - ١٠ = ٠,٢

$\therefore$ متوسط التغير فى المساحة = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{٤,٠٤}{٠,٢} = ٢٠,٢$

٢ عند $\text{س}_1 = ٢٠$ يكون $\text{م}(\text{هـ}) = \dfrac{\text{د}(٢٠ + \text{هـ}) - \text{د}(٢٠)}{\text{هـ}}$

، $\text{هـ} \neq ٠ = \dfrac{١}{\text{هـ}}\left[(٢٠ + \text{هـ})^{٢} - (٢٠)^{٢}\right] = \dfrac{١}{\text{هـ}}(٤٠٠ + ٤٠\,\text{هـ} + \text{هـ}^{٢} - ٤٠٠) = ٤٠ + \text{هـ}$

∴ عندما طول الضلع = ٢٠ سم يكون معدل التغير فى المساحة = $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} (٤٠ + \text{هـ}) = ٤٠$

مثال ٥

صفيحة معدنية رقيقة مستطيلة الشكل طولها ثلاثة أمثال عرضها تتمدد بحيث تظل محتفظة بشكلها وبالنسبة الثابتة بين بعديها **أوجد :**

١ معدل التغير فى مساحتها بالنسبة لطولها عندما يكون طولها = ٦ سم

٢ معدل التغير فى مساحتها بالنسبة لعرضها عندما يكون عرضها = ٢ سم

الحــل

لاحظ أنه :

* لإيجاد معدل التغير فى المساحة بالنسبة للطول نفرض أن : الطول = س سم
* لإيجاد معدل التغير فى المساحة بالنسبة للعرض نفرض أن : العرض = س سم

١ بفرض أن طول الصفيحة = س سم

∴ عرض الصفيحة = $\frac{١}{٣}$ س سم

وبفرض أن : مساحة الصفيحة = ص سم^{٢}

∴ ص = س × $\frac{١}{٣}$ س

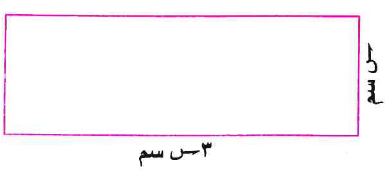
∴ ص = $\frac{١}{٣}$ س^{٢}

عندما س = ٦ (طول المستطيل = ٦)

∴ $\text{م}(\text{هـ}) = \dfrac{\text{د}(٦ + \text{هـ}) - \text{د}(٦)}{\text{هـ}} = \dfrac{\frac{١}{٣}(٦ + \text{هـ})^{٢} - \frac{١}{٣}(٦)^{٢}}{\text{هـ}}$

$= \dfrac{\frac{١}{٣}(٣٦ + ١٢\,\text{هـ} + \text{هـ}^{٢}) - \frac{١}{٣} \times ٣٦}{\text{هـ}} = \dfrac{١٢ + ٤\,\text{هـ} + \frac{١}{٣}\text{هـ}^{٢} - ١٢}{\text{هـ}} = ٤ + \frac{١}{٣}\text{هـ}$

∴ عند س = ٦ يكون معدل التغير فى المساحة بالنسبة لطول ضلع الصفيحة = $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} (٤ + \frac{١}{٣}\text{هـ}) = ٤$



٢ بفرض أن : عرض الصفيحة = س سم

∴ طول الصفيحة = ٣ س سم

وبفرض أن مساحة الصفيحة = ص سم^{٢}

∴ ص = س × ٣ س = ٣ س^{٢} ، عند س = ٢ (عرض الصفيحة = ٢)

∴ $\text{م}(\text{هـ}) = \dfrac{\text{د}(٢ + \text{هـ}) - \text{د}(٢)}{\text{هـ}} = \dfrac{٣(٢ + \text{هـ})^{٢} - ٣(٢)^{٢}}{\text{هـ}}$

$= \dfrac{٣(٤ + ٤\,\text{هـ} + \text{هـ}^{٢}) - ٣ \times ٤}{\text{هـ}} = \dfrac{١٢ + ١٢\,\text{هـ} + ٣\,\text{هـ}^{٢} - ١٢}{\text{هـ}} = ١٢ + ٣\,\text{هـ}$

∴ عند س = ٢ يكون معدل التغير فى المساحة بالنسبة لعرض الصفيحة = $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} (١٢ + ٣\,\text{هـ}) = ١٢$

تمارين 9

على معدل التغير

من أسئلة الكتاب المدرسي ● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت الدالة د : د (س) = ٣ س − ٢ فإن دالة التغير ت (هـ) = ... عند س = ١

(أ) ٣ (ب) هـ (جـ) ٣ هـ (د) ٦ هـ

② إذا كانت : د (س) = ٤ س + ١ فإن التغير فى د عندما تتغير س من ٢ إلى ٢,١ يساوى ....

(أ) ٠,١ (ب) ٠,٤ (جـ) ٤ (د) ٤,١

③ إذا كانت : د (س) = س^{٢} + ٢ س + ٣ فإن : ت (هـ) = ... عند س = ٢

(أ) هـ^{٢} + ٢ هـ + ٣ (ب) هـ^{٢} + ٦ هـ + ١٤ (جـ) ٢ هـ − ١ (د) هـ^{٢} + ٦ هـ

④ إذا كانت : د (س) = س^{٢} − س + ١ فإن :

أولًا : دالة التغير ت عند س = ٣ هى ....

(أ) ت (٣) (ب) ت (س + ٣) (جـ) ٢ هـ − ١ (د) هـ^{٢} + ٥ هـ

ثانيًا : ت (٢ , ٠) = ...

(أ) ١,٠٤ (ب) ٠,٨٤ (جـ) ١,٠٨ (د) ١,٨٢

ثالثًا : ت (−٣ , ٠) = ...

(أ) ١,٤١ (ب) ١,٣١ (جـ) ١,٠٤ (د) −١,٤١

⑤ متوسط تغير الدالة د حيث د (س) = س^{٢} عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,١ يساوى ....

(أ) ٠,٦١ (ب) ٦,١ (جـ) ٩ (د) ٩,٦١

⑥ إذا كانت الدالة د : د (س) = س^{٢} − س فإن متوسط التغير للدالة د عندما تزداد س بمقدار ٠,٣ هو ....

(أ) ٢ س − ١ (ب) ٢ س − ٠,٧ (جـ) −٠,٢١ (د) −٠,١

⑦ إذا كان متوسط التغير فى د يساوى ٢,٤ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,٢ فإن التغير فى د عندئذٍ يساوى ....

(أ) ٠,٣٢ (ب) ٠,٤٨ (جـ) ٣,٦ (د) ٧,٢

⑧ إذا كان متوسط التغير فى د يساوى ٥ عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ ، د (٢) = ٦

فإن : د (٤) = ...

(أ) −٤ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ١٦

(٩) إذا كانت د دالة وكان التغير فى د يساوى ١٤ عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ فإن متوسط التغير فى د عندئذ يساوى ....

(أ) ١٤ (ب) ٧ (جـ) $\frac{٧}{٢}$ (د) −٧

(١٠) إذا كان منحنى الدالة د يمر بالنقطتين (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، فإن متوسط التغير للدالة د عندما تتغير س من ١ إلى ٢ هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) −١

(١١) إذا كان : د (٢) = ٥ ، د (٢,٣) = ٧ فإن التغير فى د عندما تتغير س من ٢ إلى ٢,٣ يساوى ....

(أ) ٠,٣ (ب) ٢ (جـ) ٣٥ (د) ١٢

(١٢) إذا كانت د : د (س) = س^{٢} + أ س − ٣ وكانت دالة التغير ت وكان ت $\left(\frac{١}{٢}\right)$ = $\frac{١٩}{٤}$ عند س = ٢ فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(١٣) دائرة طول نصف قطرها نق ، فإن متوسط التغير فى مساحة الدائرة عندما تتغير نق من (نق$_{١}$) إلى (نق$_{١}$ + هـ) هو ....

(أ) ٢ π نق$_{١}$ (ب) π (٢ نق$_{١}$ + هـ) (جـ) π نق$_{١}^{٢}$ (د) π (٢ نق$_{١}$ + هـ^{٢})

(١٤) دائرة طول نصف قطرها نق فإن متوسط التغير فى محيط الدائرة عندما تتغير نق من نق$_{١}$ إلى نق$_{٢}$ هو ....

(أ) ٢ π نق$_{١}$ (ب) ٢ π (نق$_{٢}$ − نق$_{١}$) (جـ) π نق$_{١}$ (د) ٢ π

(١٥) معدل تغير الدالة د : د (س) = س^{٢} + ٥ س − ٢ عند س = −١ يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٦) معدل تغير الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س}$ عند س = $\sqrt{٥}$ يساوى ....

(أ) ٥ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) −٥ (د) −$\frac{١}{٥}$

(١٧) معدل تغير الدالة د : د (س) = $\sqrt{س}$ حيث س ≥ ٠ عند س = ١٦ تساوى ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٨}$ (د) $\frac{١}{١٦}$

(١٨) إذا كانت د : د (س) = س^{٤} فإن معدل تغير الدالة عند س = ٣ يساوى ....

(أ) ٨١ (ب) ٢٧ (جـ) ١٠٨ (د) ٣٢٤

(١٩) إذا كانت د : د (س) = جاس فإن معدل تغير الدالة عند س = $\frac{π}{٢}$ هى ....

(أ) ± ١ (ب) −١ (جـ) ١ (د) صفر

(٢٠) إذا كانت د : د (س) = أ حيث أ ثابت ، فإن متوسط التغير للدالة د هو ....

(أ) أ (ب) − أ (جـ) صفر (د) ١

(٢١) إذا كان : د (س) = أ س + ب فإن متوسط التغير للدالة د عندما تتغير س من س$_{١}$ إلى س$_{٢}$ هو ....

(أ) − أ (ب) أ (جـ) أ + ب (د) ١

(٢٢) إذا كان متوسط التغير فى الدالة د حيث د (س) = ٤ س^{٢} + أ عندما تتغير س من ب إلى ٢ يساوى −٤ فإن : ب = ...

(أ) −٢ (ب) −٣ (جـ) −٤ (د) ٢٠

(٢٣) 📖 متوسط التغير فى حجم مكعب بالنسبة لطول حرفه عندما يتغير طول حرفه من ٥ سم إلى ٧ سم يساوى ....

(أ) ١٢٥ (ب) ٣٤٣ (جـ) ٢١٨ (د) ١٠٩

(٢٤) صفيحة على شكل مربع يتمدد بانتظام محتفظة بشكلها فإن معدل التغير فى مساحتها بالنسبة لطول ضلعها عندما يكون طول ضلعها ٥ سم يساوى ....

(أ) ١٠ (ب) ٥ (جـ) ٢٥ (د) ١٠٠

(٢٥) يتمدد بالون كروى محتفظًا بشكله بسبب ضغط الغاز داخله فإن متوسط التغير فى مساحته السطحية بالنسبة لطول نصف قطره عندما يتغير طول نصف قطره من ٧ سم إلى ٩ سم يساوى ....

(أ) ١٦ π (ب) ٣٢ π (جـ) ٦٤ π (د) ١٢٨ π

(٢٦) 📖 يعطى حجم مزرعة للبكتيريا عند أى لحظة زمنية ن (مقيسة بالدقائق) بالعلاقة د (ن) = ٢ ن^{٣} + ١٠٠ ملليجرام فإن معدل النمو اللحظى للدالة د عندما ن = ٥ هو ....

(أ) ٢٥٠ (ب) ١٢٥ (جـ) ١٠٥ (د) ١٥٠

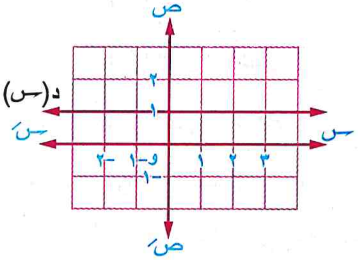
(٢٧) 📖 صفيحة على شكل مثلث طول قاعدتها يساوى ضعف ارتفاعها المناظر ، تتمدد بالحرارة محافظة على شكلها ، فإن متوسط التغير فى مساحتها بالنسبة لارتفاعها إذا تغير ارتفاعها من ٨ سم إلى ٨,٤ سم يساوى ....

(أ) ١٥,٨ (ب) ١٦,٤ (جـ) ١٤,٢ (د) ١٨,٦

(٢٨) صفيحة معدنية رقيقة مستطيلة الشكل طولها ثلاثة أمثال عرضها تتمدد بحيث تظل محتفظة بشكلها وبالنسبة الثابتة بين بعديها ، فإن معدل التغير فى مساحتها بالنسبة لطولها عندما يكون طولها = ٦ سم يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٢

(٢٩) فى الشكل المقابل :



متوسط التغير للدالة د عندما تتغير س من −١ إلى ٢ يساوى ....

(أ) صفر (ب) −١

(جـ) ٢ (د) ٣

(٣٠) فى أى من الدوال الآتية يكون متوسط التغير للدالة عندما تتغير س من (س$_{١}$) إلى (س$_{١}$ + هـ) مقدار ثابت ؟

(أ) د (س) = ٤ س^{٢} + ١٠ (ب) د (س) = ٢ س − ٣

(جـ) د (س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٣} + ٧ س (د) د (س) = $\frac{١}{س}$

● فهم ○ تطبيق ● مستويات عليا

(٣١) أي الدوال الآتية يكون فيها التغير في د ، إذا تغيرت س من أ إلى أ + هـ مساويًا للتغير في د إذا تغيرت س من أ − هـ إلى أ ؟

(أ) د (س) = $س^{٢}$ (ب) د (س) = ٣ س + ٢

(جـ) د (س) = $س^{٣}$ (د) د (س) = جا س

(٣٢) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} س^{٢} & ، س < ٤ \\ ٣ - س & ، س \geq ٤ \end{cases}$ فإن معدل التغير في د عندما س = ٧ هو ....

(أ) ٣ (ب) −١ (جـ) −٢ (د) $\frac{-١}{٣}$

(٣٣) إذا كانت د دالة زوجية فإن متوسط تغير الدالة د عندما تتغير س من −٣ إلى ٣ يساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ٢ د (٠)

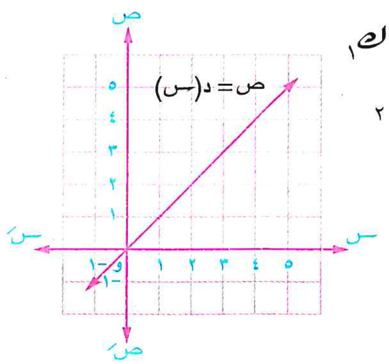
(٣٤) إذا كانت د دالة فردية وكان متوسط تغير الدالة عندما تتغير س من −٣ إلى ٣ يساوى ١٩ ، متوسط تغير الدالة عندما تتغير س من −١ إلى ١ يساوى ٧ فإن متوسط تغير الدالة عندما تتغير س من ١ إلى ٣ يساوى ....

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ٢٥ (د) ٢٦

(٣٥) إذا كان متوسط تغير الدالة عندما تتغير س من ٢ إلى ٣ يساوى $ل_{١}$ ، وكان متوسط تغير الدالة عندما تتغير س من ٣ إلى ٤ يساوى $ل_{٢}$ فإن متوسط تغير الدالة عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ يساوى ....

(أ) $ل_{١} + ل_{٢}$ (ب) $ل_{١} ل_{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢} (ل_{١} + ل_{٢})$ (د) $٢ (ل_{١} + ل_{٢})$

(٣٦) في الشكل المقابل :



إذا كان متوسط التغير للدالة د عندما تتغير س من ١ إلى ٢ هو $ل_{١}$

وكان متوسط التغير للدالة د عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ هو $ل_{٢}$

فإن : ....

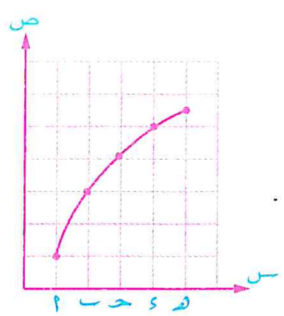
(أ) $ل_{١} = ٢ ل_{٢}$

(ب) $ل_{١} = \frac{١}{٢} ل_{٢}$

(جـ) $ل_{١} = ل_{٢}$

(د) $ل_{١} = ٤ ل_{٢}$

(٣٧) يوضح الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث : ص = د (س)



في أي مما يأتي يكون متوسط التغير في د هو الأكبر ؟

(أ) عندما تتغير س من أ إلى ب

(ب) عندما تتغير س من ب إلى حـ

(جـ) عندما تتغير س من حـ إلى ء

(د) عندما تتغير س من أ إلى هـ

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ إذا كانت : د (س) = س^{2} − ٣ س + ٤ أوجد :

(١) دالة التغير فى د عند س = ٣ ثم احسب قيمة ت (٠,٥)

(٢) مقدار التغير فى د (س) عندما تتغير س من ٢ إلى ٢,٤ «١,٧٥ ، ٠,٥٦»

---

٢ إذا كانت الدالة د : د (س) = س^{2} + ٢ س − ١ أوجد التغير فى د (س) عندما :

(١) تتغير س من ٢ إلى ٢,٢

(٢) تتغير س من ٢ إلى ١,٨

(٣) تتغير س من ١ إلى ١ + هـ

(٤) س = ٢ ، هـ = $\frac{1}{2}$

(٥) س = ٣ ، Δ س = ٠,٢

«١,٢٤ ، −١,١٦ ، هـ^{2} + ٤ هـ ، ٣,٢٥ ، ١,٦٤»

---

٣ إذا كانت : د (س) = س^{2} + ٣ س − ١ فأوجد :

(١) دالة متوسط التغير عند س = ٢ ، ثم أوجد م (٠,٢)

(٢) متوسط التغير عندما تتغير س من ٤,٥ إلى ٣ «٧,٢ ، ١٠,٥»

---

٤ أوجد دالة متوسط التغير للدالة د : د (س) = ٢ س^{2} − ٣ س + ٤ عندما تتغير س من س$_{1}$ إلى س$_{1}$ + هـ ثم أوجد :

(١) متوسط التغير للدالة عند س = ٣ ثم احسب م (٠,٢)

(٢) متوسط التغير للدالة عندما تتغير س من ٣,٥ إلى ٤

(٣) معدل التغير للدالة عند س = ٢ «٩,٤ ، ١٢ ، ٥»

---

٥ إذا كانت الدالة د : د (س) = طا س فأوجد معدل التغير للدالة عند س = π «١»

---

٦ إذا كانت : د (س) = س^{5} فأوجد معدل تغير الدالة د عندما س = ٢ «٨٠»

---

٧ إذا كانت : د (س) = أ س^{2} + ب س + ٤ فأوجد عند س = ٣ دالة التغير ت (هـ)

وإذا كانت : د (٣) = ٤ ، ت $\left(\frac{1}{2}\right)$ = ١$\frac{3}{4}$ فما قيمة كل من : أ ، ب؟ «١ ، −٣»

---

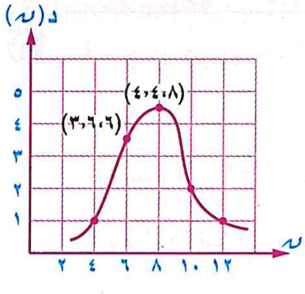
٨ إذا كانت الدالة د : د (س) = ١ + أ س + ب س^{2} وكان التغير لهذه الدالة عندما تتغير س من ٣ إلى ٢ يساوى ٧ وكان معدل التغير للدالة عند س = ٣ يساوى −٩ فأوجد قيمتى : أ ، ب «٣ ، −٢»

---

٩ يوضح الشكل المقابل المنحنى

ص = د (ن) حيث ص جملة مبيعات أحد منافذ بيع أجهزة الحاسب الآلى مقدرًا بملايين الجنيهات ، ن الزمن مقدرًا بالشهور.

أوجد من الرسم متوسط التغير فى جملة المبيعات عندما يتغير الزمن من :



(١) ن = ٤ إلى ن = ٨

(٢) ن = ٨ إلى ن = ١٠

(٣) ن = ٤ إلى ن = ١٢

«٠,٨٥ ، −١,٢ ، صفر»

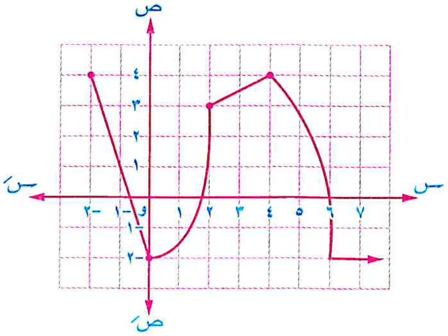
١٠ تفكير ناقد :

يوضح الشكل المقابل منحنى

الدالة د حيث : ص = د (س)

حدد الفترات التى يكون فيها متوسط

التغير فى د ثابتًا ، وفسر إجابتك.



«]-٢ ، ٠[،]٢ ، ٤[،]٦ ، ∞[»

---

١١ صفيحة على شكل مربع يتمدد بانتظام محتفظة بشكلها ، احسب متوسط التغير فى مساحة سطحها بالنسبة لطول ضلعها عندما يتغير طول ضلعها من ٣ سم إلى ٣,٤ سم ، ثم احسب معدل التغير فى مساحة سطحها بالنسبة لطول ضلعها عندما يكون طول ضلعها ٥ سم «٦,٤ ، ١٠»

---

١٢ صفيحة على شكل مربع تنكمش بالتبريد محتفظة بشكلها المربع ، احسب معدل التغير فى مساحة الصفيحة بالنسبة إلى طول ضلعها عندما يكون طول الضلع ٨ سم «١٦»

---

١٣ لوح رقيق معدنى مستطيل الشكل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٣ سم يتمدد بحيث يحتفظ بشكله الهندسى **أوجد :**

(١) التغير فى مساحة اللوح عندما يتغير عرضه من ٤ سم إلى ٤,٢ سم

(٢) التغير فى محيط اللوح عندما يتغير عرضه من ٣,٥ سم إلى ٣,٧ سم «٢,٢٤ ، ٠,٨»

---

١٤ صفيحة معدنية مستطيلة الشكل طولها ضعف عرضها تتمدد بالحرارة بحيث تحتفظ بالنسبة بين طولها وعرضها **أوجد :**

(١) متوسط التغير فى مساحتها بالنسبة لطولها عندما يتغير طولها من ١٥ سم إلى ١٦,٥ سم

(٢) معدل التغير فى كل من مساحتها ومحيطها بالنسبة لطولها عندما يكون طولها ١٥ سم «١٥,٧٥ ، ١٥ ، ٣»

---

١٥ صفيحة دائرية الشكل تتمدد بانتظام بحيث تحتفظ بشكلها. أوجد معدل التغير فى مساحة الصفيحة بالنسبة إلى طول نصف قطرها عندما يكون طول نصف القطر ١٤ سم $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$ «٨٨»

---

١٦ سقط حجر فى بركة ماء فتكونت موجة دائرية تزداد بانتظام بحيث تظل محتفظة بشكلها الدائرى **أوجد :**

(١) متوسط التغير فى مساحة الموجة بالنسبة لطول نصف قطرها عندما يتغير طول نصف قطرها من ٦ سم إلى ٦,٣ سم

(٢) معدل التغير فى مساحتها بالنسبة لطول نصف قطرها عندما يكون طول نصف قطرها ٥ سم

«١٢,٣ π ، ١٠ π»

١٧ مكعب من المعدن يتمدد بانتظام بحيث يظل محتفظًا بشكله **أوجد :**

(١) متوسط التغير فى مساحته الكلية بالنسبة لطول حرفه عندما يتغير طول حرفه من ٢ سم إلى ٢,١ سم

(٢) معدل التغير فى مساحته الكلية بالنسبة لطول حرفه عندما يكون طول حرفه ٣ سم

(٣) معدل التغير فى حجم المكعب بالنسبة لطول حرفه عندما يكون طول حرفه ٤ سم «٢٤,٦ ، ٣٦ ، ٤٨»

---

١٨ فقاعة من الصابون كروية الشكل تتمدد محافظة على شكلها الكروى، احسب متوسط التغير فى مساحة سطحها الكروى بالنسبة لطول نصف قطرها عندما يتغير طول نصف قطرها من ٠,٥ سم إلى ٠,٦ سم ، علمًا بأن مساحة سطح الكرة يساوى ٤ π نق^{٢} حيث نق طول نصف قطر الكرة. «$٤,٤ \pi$»

---

١٩ إذا كانت المسافة ف التى يقطعها جسم متحرك فى خط مستقيم خلال فترة زمنية ن (بالثانية) تعطى بالعلاقة : ف = ن^{٢} + ٣ ن + ٢ حيث ف مقيسة بالمتر **أوجد :**

(١) متوسط التغير فى المسافة بالنسبة للزمن عندما تتغير ن من ٢ ثانية إلى ٤ ثانية.

(٢) معدل التغير فى المسافة بالنسبة للزمن (السرعة) عندما ن = ٥ ثانية. «٩ ، ١٣»

---

٢٠ إذا كان نمو أحد المجتمعات يتبع العلاقة د (ن) = ٦ ن^{٢} + ٥٠٠٠٠ حيث ن مقيسة بالأيام **فأوجد :**

(١) متوسط تغير النمو بالنسبة للزمن عندما تتغير ن من ن$_١$ إلى ن$_١$ + هـ

(٢) متوسط تغير النمو بالنسبة للزمن خلال فترة زمنية طولها ٦ أيام اعتبارًا من بداية اليوم الثالث.

(٣) متوسط تغير النمو بالنسبة للزمن خلال اليوم السابع.

(٤) معدل تغير النمو اللحظى بالنسبة للزمن عندما ن = ٤ «٦ هـ + ١٢ ن$_١$ ، ٦٠ ، ٧٨ ، ٤٨»

---

٢١ صفيحة رقيقة على شكل مثلث متساوى الأضلاع تتمدد بانتظام بحيث تظل محتفظة بشكلها **أوجد :**

(١) متوسط التغير فى مساحة الصفيحة بالنسبة لطول ضلعها عندما يتغير طول ضلعها من ٣,٥ سم إلى ٤,٥ سم

(٢) معدل التغير فى مساحة الصفيحة بالنسبة لطول ضلعها عندما يكون ارتفاعها ٣ $\sqrt{٣}$ سم «٢ $\sqrt{٣}$ ، ٣ $\sqrt{٣}$»

---

٢٢ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٢ س^{٢} - ٣ \text{ ، } س \leq ٢ \\ ٢ س + ١ \text{ ، } س > ٢ \end{cases}$ **فأوجد :**

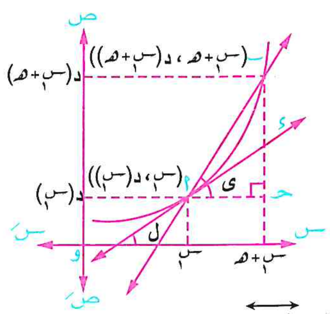
(١) متوسط تغير الدالة عندما تتغير س من ١ إلى ٢

(٢) متوسط تغير الدالة عندما تتغير س من ٤ إلى ٤,٥ «٦ ، ٢»

الدرس 2

الاشتقاق

التفسير الهندسى لمتوسط ومعدل التغير



نفرض أن الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة ص = د (س)

وأن النقطتين أ (س_1 ، د (س_1))

، ب (س_1 + هـ ، د (س_1 + هـ))

تقعان على منحنى الدالة فيكون :

١ أحـ = هـ ، ب حـ = د (س_1 + هـ) − د (س_1)

∴ متوسط التغير = $\dfrac{\text{د}(\text{س}_1 + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{هـ}} = \dfrac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}}$ = ظا ى = ميل القاطع $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

٢ إذا ثبتنا النقطة أ وتصورنا أن النقطة ب تتحرك على منحنى الدالة مقتربة من النقطة أ فإن حـ تقترب أيضًا من أ أى أحـ = هـ ⟵ الصفر وفى الوضع النهائى يقترب القاطع $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ من الانطباق على المماس $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ الذى يمس المنحنى عند أ (س_1 ، د (س_1)) وتؤول الزاوية ى إلى الزاوية ل

أى أن

ميل المماس لمنحنى الدالة (ص = د (س)) عند النقطة (س_1 ، د (س_1))

= ظا ل = $\underset{\text{هـ} \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{د}(\text{س}_1 + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{هـ}}$ إن وجدت = معدل تغير الدالة عند (س = س_1)

المشتقة الأولى للدالة

المقدار $\underset{\text{هـ} \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$ له قيمة وحيدة عند كل قيمة للمتغير س ∈ مجال الدالة لذلك فهو دالة فى س يطلق عليها «الدالة المشتقة» أو «المشتقة الأولى للدالة» أو «المعامل التفاضلى الأول للدالة».

تعريف

إذا كانت د :]أ ، ب[⟵ ح ، س ∈]أ ، ب[فإن الدالة المشتقة دَ :

دَ (س) = $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{د (س + هـ) − د (س)}}{\text{هـ}}$ بشرط أن تكون النهاية موجودة.

وإذا كانت ص = د (س) فيرمز للمشتقة الأولى لهذه الدالة بأحد الرموز :

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ أو صَ أو دَ (س) أو $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ [د (س)]

ملاحظتان

١ الرمز $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ هو تعبير رياضى لا يفسر على أنه خارج قسمة مقدارين ءص ، ءس بل هو رمز معناه مشتقة الدالة ص بالنسبة للمتغير س ويقرأ «دال ص دال س»

٢ ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د (س) عند النقطة (س$_١$ ، د (س$_١$)) هو دَ (س$_١$)

مثال ١

باستخدام تعريف المشتقة أوجد مشتقة الدالة د :

د (س) = س^٢ + ٢ س − ٥ ثم أوجد ميل المماس عند النقطة (٣ ، ١٠)

الحل

∵ د (س) = س^٢ + ٢ س − ٥

∴ د (س + هـ) = (س + هـ)^٢ + ٢ (س + هـ) − ٥ = س^٢ + ٢ س هـ + هـ^٢ + ٢ س + ٢ هـ − ٥

∴ د (س + هـ) − د (س) = ٢ س هـ + هـ^٢ + ٢ هـ = هـ (٢ س + هـ + ٢)

، ∵ دَ (س) = $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{د (س + هـ) − د (س)}}{\text{هـ}}$

∴ دَ (س) = $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{هـ (٢ س + هـ + ٢)}}{\text{هـ}}$ = $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}}$ (٢ س + هـ + ٢) = ٢ س + ٢

، ∵ د (٣) = (٣)^٢ + ٢ (٣) − ٥ = ١٠

∴ النقطة (٣ ، ١٠) تقع على المنحنى.

∴ ميل المماس عند (س = ٣) = دَ (٣) = ٢ × ٣ + ٢ = ٨

مثال ٢

أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د : د (س) = $س^٣$ − ٣ عند النقطة أ (٢ ، ٥) ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة أ لأقرب دقيقة.

الحل

∵ د (٢) = $(٢)^٣$ − ٣ = ٥ ∴ النقطة (٢ ، ٥) تقع على المنحنى

∴ ميل المماس عند (س = ٢) = $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{د (٢ + هـ) - د (٢)}{هـ}$

$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{(٢ + هـ)^٣ - ٣ - (٢)^٣ + ٣}{هـ}$

$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{(٢ + هـ)^٣ - (٢)^٣}{هـ}$

$= ٣ (٢)^٢ = ١٢$

∴ ظا (ل) = ١٢ ∴ ق (∠ ل) = $ظا^{-١}$ (١٢) ≈ ٨٥° ١٤َ

لاحظ أن :

ميل المماس = ظا ل حيث ل هى قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

قابلية الدالة للاشتقاق عند نقطة

يقال إن الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = أ (حيث أ ∈ مجال د)

إذا وفقط إذا كانت $\boxed{دَ (أ) \text{ لها وجود}}$ حيث دَ (أ) = $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{د (أ + هـ) - د (أ)}{هـ}$

* إذا وجدت مشتقة للدالة د عند كل نقطة تنتمى إلى الفترة]حـ ، ء[نقول إن الدالة د قابلة للاشتقاق فى هذه الفترة.

* أى دالة كثيرة حدود تكون قابلة للاشتقاق على ح

المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى

إذا كانت س = أ تنتمى لمجال الدالة د وكانت الدالة تغير قاعدتها على يمين ويسار أ فعند البحث عن قابلية الاشتقاق عند س = أ لابد من بحث المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى للدالة عند س = أ والمقارنة بينهما حيث

المشتقة اليمنى للدالة = دَ $(أ^+)$ = $\underset{هـ \leftarrow ٠^+}{نهـا} \frac{د (أ + هـ) - د (أ)}{هـ}$

والمشتقة اليسرى للدالة = دَ $(أ^-)$ = $\underset{هـ \leftarrow ٠^-}{نهـا} \frac{د (أ + هـ) - د (أ)}{هـ}$

فإذا كان :

دَ $(أ^+)$ = دَ $(أ^-)$ فإن الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = أ ويكون دَ (أ) = دَ $(أ^+)$ = دَ $(أ^-)$

دَ $(أ^+)$ ≠ دَ $(أ^-)$ فإن الدالة د غير قابلة للاشتقاق عند س = أ

العلاقة بين الاشتقاق والاتصال

نظرية «بدون برهان»

إذا كانت الدالة ص = د (س) قابلة للاشتقاق عند النقطة س = أ فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة.

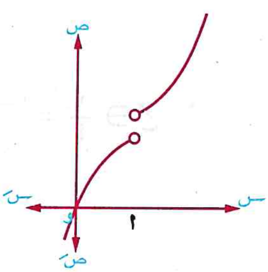
ملاحظات

١) البحث فى اتصال دالة أو قابلية اشتقاقها عند نقطة يتطلب أن تكون الدالة معرفة عند هذه النقطة أى تكون هذه النقطة ضمن مجال تعريف الدالة.

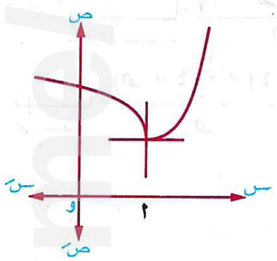
٢) إذا كانت الدالة متصلة عند نقطة فليس من الضرورى أن تكون قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة أما إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق عند نقطة فمن الضرورى أن تكون متصلة عند هذه النقطة.

٣) إذا كانت الدالة د غير متصلة عند نقطة ما فإنها تكون غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

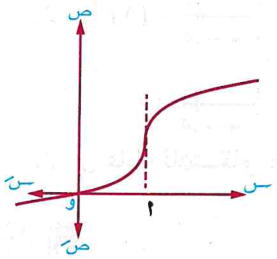
ملاحظات هامة على بعض منحنيات الدوال



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

المنحنيات السابقة تمثل دوال غير قابلة للاشتقاق عند س = أ أى عندها دَ (أ) غير موجودة وذلك لأحد الأسباب التالية :

* المنحنى غير متصل عند س = أ أى المنحنى به قفزة أو ثغرة كما بالشكل (١)
* المنحنى به (ركن حاد مدبب عند س = أ) وذلك لأن المشتقتين اليسرى واليمنى موجودتان ولكنهما غير متساويتين كما بالشكل (٢)
* المنحنى له مماس رأسى عند س = أ كما بالشكل (٣)

ملاحظة هامة

عند بحث اشتقاق دالة عند نقطة فى مجالها ، لا يلزم بحث اتصالها عند هذه النقطة أولاً بل يمكن بحث قابلية اشتقاقها عند هذه النقطة مباشرة.

ولكن يفضل بحث الاتصال أولاً فإذا كانت متصلة عند هذه النقطة نبحث الاشتقاق وإذا كانت غير متصلة فالدالة غير قابلة للاشتقاق.

مثال ٣

ابحث قابلية الاشتقاق عند $\text{س} = ١$ لكل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين :

١ $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ٣}$ ٢ $\text{ر}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} + ٣}$

الحل

١ $\because$ مجال د = ح − {−٣} $\therefore$ د معرفة عند س = ١ ، $\text{د}(١) = \dfrac{١ - ٢}{١ + ٣} = \dfrac{-١}{٤}$

$\therefore \text{د}'(١) = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{د}(١ + \text{هـ}) - \text{د}(١)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{\text{هـ}} \left[\dfrac{١ + \text{هـ} - ٢}{١ + \text{هـ} + ٣} + \dfrac{١}{٤} \right]$

$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{\text{هـ}} \left[\dfrac{\text{هـ} - ١}{\text{هـ} + ٤} + \dfrac{١}{٤} \right] = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{١}{\text{هـ}} \times \dfrac{٤(\text{هـ} - ١) + (\text{هـ} + ٤)}{٤(\text{هـ} + ٤)} \right)$

$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{٤\text{هـ} - ٤ + \text{هـ} + ٤}{٤\text{هـ}(\text{هـ} + ٤)} \right) = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٥\text{هـ}}{٤\text{هـ}(\text{هـ} + ٤)} = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٥}{٤(\text{هـ} + ٤)} = \dfrac{٥}{١٦} \in \text{ح}$

$\therefore$ د قابلة للاشتقاق عند س = ١

٢ $\because$ مجال ر = [−٣ ، ∞[$\therefore$ ر معرفة عند س = ١ ، $\text{ر}(١) = \sqrt{١ + ٣} = ٢$

$\therefore \text{ر}'(١) = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ر}(١ + \text{هـ}) - \text{ر}(١)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{١ + \text{هـ} + ٣} - ٢}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{هـ} + ٤} - ٢}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{هـ} + ٤)^{\frac{١}{٢}} - (٤)^{\frac{١}{٢}}}{\text{هـ}} = \dfrac{١}{٢}(٤)^{\frac{١}{٢} - ١} = \dfrac{١}{٤} \in \text{ح}$

$\therefore$ ر قابلة للاشتقاق عند س = ١

مثال ٤

إذا كانت الدالة د : $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}} + ٥$ أوجد : $\text{د}'(\text{س})$ ثم أوجد : $\text{د}'(١)$ ، $\text{د}'(٩)$

الحل

$\because \text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}} + ٥$ $\therefore \text{د}(\text{س} + \text{هـ}) = \sqrt{\text{س} + \text{هـ}} + ٥$

$\therefore \text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} + \text{هـ}} + ٥ - \left(\sqrt{\text{س}} + ٥\right) = \sqrt{\text{س} + \text{هـ}} - \sqrt{\text{س}}$

$\therefore \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س} + \text{هـ}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{هـ}} \times \dfrac{\left(\sqrt{\text{س} + \text{هـ}} + \sqrt{\text{س}}\right)}{\left(\sqrt{\text{س} + \text{هـ}} + \sqrt{\text{س}}\right)}$

$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} + \text{هـ} - \text{س}}{\text{هـ}\left(\sqrt{\text{س} + \text{هـ}} + \sqrt{\text{س}}\right)} = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}}{\text{هـ}\left(\sqrt{\text{س} + \text{هـ}} + \sqrt{\text{س}}\right)}$

$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{\sqrt{\text{س} + \text{هـ}} + \sqrt{\text{س}}}$

$= \dfrac{١}{\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{س}}} = \dfrac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \dfrac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$

$\therefore \text{د}'(١) = \dfrac{١}{٢\sqrt{١}} = \dfrac{١}{٢}$ ، $\text{د}'(٩) = \dfrac{١}{٢\sqrt{٩}} = \dfrac{١}{٦}$

لاحظ أن :

مجال د هو [٠ ، ∞[

، مجال د' هو]٠ ، ∞[

وبالتالى تكون د(٠) = ٥ (معرفة)

بينما د'(٠) غير معرفة.

مثال ٥

ابحث اتصال وقابلية الاشتقاق للدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٢س - ٥ & ، س \geq ٢ \\ ٢س + ٥ & ، س < ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

الحل

∵ د (٢^+) = ٢ × ٢ − ٥ = −١ ، د (٢^-) = ٢ × ٢ + ٥ = ٩

∴ د (٢^+) ≠ د (٢^-) ∴ الدالة د غير متصلة عند س = ٢

وبالتالى تكون د غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

مثال ٦

ابحث اتصال وقابلية الاشتقاق للدالة د : د (س) = $\begin{cases} س^٢ + ٢س & ، س \geq ١ \\ ٤س - ١ & ، س < ١ \end{cases}$ عند س = ١

الحل

* بحث الاتصال عند س = ١

∵ د (١) = $(١)^٢$ + ٢ × ١ = ٣

، د (١^-) = $\lim_{س \to ١^-}$ $(س^٢ + ٢س)$ = ٣ ، د (١^+) = $\lim_{س \to ١^+}$ (٤س − ١) = ٣

∴ د (١^-) = د (١^+) = د (١) = ٣ ∴ د متصلة عند س = ١

* بحث قابلية الاشتقاق عند س = ١

$د'(١^-) = \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{(١ + هـ)^٢ + ٢(١ + هـ) - ٣}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{١ + ٢هـ + هـ^٢ + ٢ + ٢هـ - ٣}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{٤هـ + هـ^٢}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠^-} (٤ + هـ) = ٤$

$د'(١^+) = \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{٤(١ + هـ) - ١ - ٣}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{٤ + ٤هـ - ١ - ٣}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{٤هـ}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^+} ٤ = ٤$

∴ $د'(١^-) = د'(١^+) = ٤$

∴ د قابلة للاشتقاق عند س = ١ ويكون $د'(١) = ٤$

مثال ٧

ابحث اتصال وقابلية الاشتقاق للدالة د : د (س) = |س − ٣| عند س = ٣

الحل

$$\because \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - ٣ & ، \text{س} > ٣ \\ ٠ & ، \text{س} = ٣ \\ ٣ - \text{س} & ، \text{س} < ٣ \end{cases}$$

* **بحث الاتصال عند س = ٣**

$\because \text{د}(٣) = ٠$ ، $\text{د}(٣^-) = \underset{\text{س} \to ٣^-}{\text{نها}} (٣ - \text{س}) = ٠$ ، $\text{د}(٣^+) = \underset{\text{س} \to ٣^+}{\text{نها}} (\text{س} - ٣) = ٠$

$\therefore \text{د}(٣^-) = \text{د}(٣^+) = \text{د}(٣) = \text{صفر}$ $\therefore$ د متصلة عند س = ٣

* **بحث قابلية الاشتقاق عند س = ٣**

$$\text{د}'(٣^-) = \underset{\text{هـ} \to ٠^-}{\text{نها}} \frac{\text{د}(٣ + \text{هـ}) - \text{د}(٣)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to ٠^-}{\text{نها}} \frac{٣ - (٣ + \text{هـ}) - ٠}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to ٠^-}{\text{نها}} \frac{-\text{هـ}}{\text{هـ}} = -١$$

$$، \text{د}'(٣^+) = \underset{\text{هـ} \to ٠^+}{\text{نها}} \frac{\text{د}(٣ + \text{هـ}) - \text{د}(٣)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to ٠^+}{\text{نها}} \frac{(٣ + \text{هـ}) - ٣ - ٠}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to ٠^+}{\text{نها}} \frac{\text{هـ}}{\text{هـ}} = ١$$

$\therefore \text{د}'(٣^-) \neq \text{د}'(٣^+)$ $\therefore$ د غير قابلة للاشتقاق عند س = ٣

مثال ٨

إذا كانت الدالة د حيث : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} + ٥ & \text{عندما س} < ٢ \\ ٢\text{س}^٢ + \text{أ} & \text{عندما س} \geq ٢ \end{cases}$ متصلة عند س = ٢

فأوجد قيمة : الثابت أ ، ثم ابحث قابلية اشتقاق الدالة د عند س = ٢

الحل

$\because$ د متصلة عند س = ٢ ، $\because \text{د}(٢^-) = ٢ + ٥ = ٧$ ، $\text{د}(٢^+) = ٨ + \text{أ}$

$\therefore ٨ + \text{أ} = ٧$ $\therefore \text{أ} = -١$

$$، \because \text{د}'(٢^-) = \underset{\text{هـ} \to ٠^-}{\text{نها}} \frac{\text{د}(٢ + \text{هـ}) - \text{د}(٢)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to ٠^-}{\text{نها}} \frac{٢ + \text{هـ} + ٥ - ٧}{\text{هـ}} = ١$$

$$، \text{د}'(٢^+) = \underset{\text{هـ} \to ٠^+}{\text{نها}} \frac{\text{د}(٢ + \text{هـ}) - \text{د}(٢)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to ٠^+}{\text{نها}} \frac{٢(٢ + \text{هـ})^٢ - ١ - ٧}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠^+}{\text{نها}} \frac{٨ + ٨\text{هـ} + ٢\text{هـ}^٢ - ٨}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to ٠^+}{\text{نها}} (٨ + ٢\text{هـ}) = ٨$$

$\therefore \text{د}'(٢^-) \neq \text{د}'(٢^+)$

$\therefore$ د غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

مثال ٩

ابحث قابلية الاشتقاق للدالة د : د (س) = $\begin{cases} \text{حا س} & \text{، س} \leq \frac{\pi}{2} \\ \text{١ + حتا س} & \text{، س} > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ عند س = $\frac{\pi}{2}$

الحل

∵ د $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ = حا $\frac{\pi}{2}$ = ١

، ∵ دَ $\left(\frac{\pi}{2}^{-}\right)$ = $\underset{\text{هـ} \to \cdot^{-}}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{د}\left(\frac{\pi}{2} + \text{هـ}\right) - \text{د}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\text{هـ}}$ = $\underset{\text{هـ} \to \cdot^{-}}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{حا}\left(\frac{\pi}{2} + \text{هـ}\right) - ١}{\text{هـ}}$

= $\underset{\text{هـ} \to \cdot^{-}}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{حتا هـ} - ١}{\text{هـ}}$ = صفر

، دَ $\left(\frac{\pi}{2}^{+}\right)$ = $\underset{\text{هـ} \to \cdot^{+}}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{د}\left(\frac{\pi}{2} + \text{هـ}\right) - \text{د}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\text{هـ}}$ = $\underset{\text{هـ} \to \cdot^{+}}{\text{نهـا}}$ $\frac{١ + \text{حتا}\left(\frac{\pi}{2} + \text{هـ}\right) - ١}{\text{هـ}}$

= $\underset{\text{هـ} \to \cdot^{+}}{\text{نهـا}}$ $\frac{-\text{حا هـ}}{\text{هـ}}$ = −١

∴ دَ $\left(\frac{\pi}{2}^{-}\right)$ ≠ دَ $\left(\frac{\pi}{2}^{+}\right)$ ∴ د غير قابلة للاشتقاق عند س = $\frac{\pi}{2}$

مثال ١٠

إذا كانت د (س) = أ س^{٢} + ب حيث أ ، ب ثابتان وكان ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة (١ ، −١) الواقعة عليه يساوى ٨ أوجد قيم : أ ، ب

الحل

∵ ميل المماس للمنحنى عند النقطة (١ ، −١) = دَ (١) ∴ دَ (١) = ٨

، ∵ دَ (١) = $\underset{\text{هـ} \to \cdot}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{د}(١ + \text{هـ}) - \text{د}(١)}{\text{هـ}}$ = $\underset{\text{هـ} \to \cdot}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{أ}(١ + \text{هـ})^{٢} + \text{ب} - (\text{أ} + \text{ب})}{\text{هـ}}$

= $\underset{\text{هـ} \to \cdot}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{أ} + ٢\text{أ هـ} + \text{أ هـ}^{٢} + \text{ب} - \text{أ} - \text{ب}}{\text{هـ}}$ = $\underset{\text{هـ} \to \cdot}{\text{نهـا}}$ $\frac{٢\text{أ هـ} + \text{أ هـ}^{٢}}{\text{هـ}}$

= $\underset{\text{هـ} \to \cdot}{\text{نهـا}}$ ٢ أ + أ هـ = ٢ أ

∴ ٢ أ = ٨ ∴ أ = ٤

، ∵ النقطة (١ ، −١) ∈ منحنى الدالة. ∴ د (١) = −١

∴ أ + ب = −١ ∴ ٤ + ب = −١ ∴ ب = −٥

تمارين 10

على الاشتقاق

من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا: أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : $\lim\limits_{س \to ٢^-}$ د (س) = ٢ ك + ٣ ، $\lim\limits_{س \to ٢^+}$ د (س) = ك − ١ وكانت الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ٢ فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ٤ (د) −٤

(٢) ميل المماس لمنحنى الدالة د عند النقطة (س$_١$ ، ص$_١$) الواقعة عليه يساوى ....

(أ) د (س$_١$ + هـ) − د (س$_١$)

(ب) $\dfrac{د (س_١ + هـ) - د (س_١)}{هـ}$

(جـ) $\lim\limits_{هـ \to ٠} \dfrac{د (س_١ + هـ) - د (س_١)}{هـ}$

(د) $\lim\limits_{س_١ \to ٠} \dfrac{د (س_١) - د (هـ)}{س_١ - هـ}$

(٣) جميع العبارات التالية خطأ ماعدا ....

(أ) إذا كانت الدالة متصلة عند نقطة فإنها تكون قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

(ب) إذا كانت الدالة غير قابلة للاشتقاق عند نقطة فإن الدالة تكون غير معرفة عند تلك النقطة.

(جـ) إذا كانت الدالة د غير متصلة عند نقطة فإن الدالة تكون غير قابلة للاشتقاق عند تلك النقطة.

(د) إذا كانت الدالة لها مشتقة يمنى ومشتقة يسرى عند نقطة فإنها تكون قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

(٤) إذا كانت : د دالة وكانت د (١) = ٥ ، دَ (١) = ٤ فإن : $\lim\limits_{س \to ١}$ د (س) = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٩ (د) غير موجودة.

(٥) الدالة د : د (س) = |س − ٥| عند س = ٥ تكون ....

(١) متصلة (٢) قابلة للاشتقاق (٣) لها نهاية

(أ) (١) فقط. (ب) (١) ، (٢) فقط

(جـ) (١) ، (٣) فقط. (د) (١) ، (٢) ، (٣) معًا.

(٦) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} س^٢ + ٣ & ، س \geq ١ \\ س^٢ - ٣ & ، س < ١ \end{cases}$ فإن : دَ (١$^+$) = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ٤ (د) غير موجودة.

(٧) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} س^٢ & ، س \leq ٢ \\ ٤ س & ، س > ٢ \end{cases}$ فإن : دَ (٢) = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) غير موجودة.

⑧ إذا كانت د : د (سـ) = $\begin{cases} سـ^{٢} + أ & ، سـ \le ٢ \\ أ سـ + ب & ، سـ > ٢ \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند سـ = ٢

فإن : أ + ب = ...

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) −٨ (د) ٨

⑨ إذا كانت د: د (سـ) = $\begin{cases} أ سـ + ٥ ب & ، سـ > ٢ \\ ٢٦ & ، سـ = ٢ \\ ب سـ^{٢} + ٣ أ − ٦ & ، سـ < ٢ \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند سـ = ٢

فإن : أ − ب = ...

(أ) صفر (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

⑩ إذا كانت : د (سـ) = $\begin{cases} سـ^{٢} + سـ + ١ & ، سـ \ge ١ \\ ٣ سـ & ، سـ < ١ \end{cases}$ فإن الدالة د عند سـ = ١ تكون ....

(أ) متصلة وغير قابلة للاشتقاق. (ب) قابلة للاشتقاق.

(جـ) لها مماس رأسى. (د) لها مماس أفقى.

⑪ إذا كانت الدالة د دالة متصلة عند سـ = ٣ وكان $\lim_{سـ \to ٣} \frac{٢ سـ − ٦}{د (سـ) − د (٣)} = \frac{١}{٦}$ فإن دَ (٣) = ...

(أ) −١٢ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) −١٠

⑫ عندما تتغير سـ من $سـ_{١}$ إلى $سـ_{٢}$ فأى من الدوال الآتية يكون متوسط تغيرها أكبر ؟

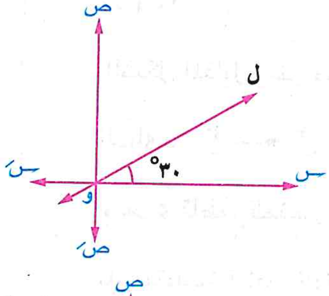
(أ) د (سـ) = ٤ سـ + ١٠ (ب) د (سـ) = ٦ سـ − ٣

(جـ) د (سـ) = $\frac{١}{٢}$ سـ + ٢ (د) د (سـ) = ٢ سـ − ١

⑬ إذا كانت د دالة حيث د (٢ + هـ) = د (٢) + هـ فإن : دَ (٢) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) غير معرفة.

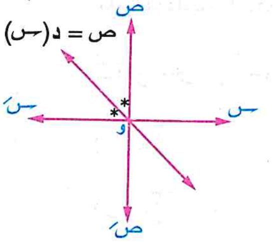
⑭ إذا كان منحنى الدالة د فى الشكل المقابل يمثله المستقيم ل فإن متوسط التغير للدالة د هو ....



(أ) طا ٣٠° (ب) حا ٣٠°

(جـ) حتا ٣٠° (د) − طا ٣٠°

⑮ فى الشكل المقابل :



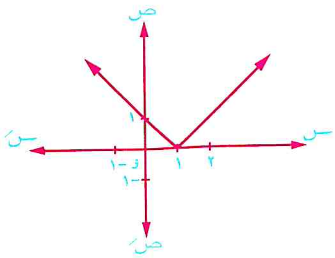
متوسط التغير للدالة د يساوى ....

(أ) ١ (ب) −١

(جـ) سـ (د) − سـ

(١٦) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن : دَ (١⁻) = ...



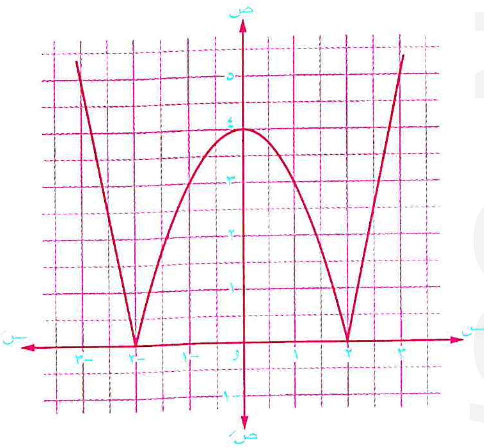
(أ) ١   (ب) صفر

(جـ) −١   (د) غير معرف

(١٧) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن قيمة س التى تكون عندها الدالة

غير قابلة للاشتقاق هى ....



(أ) −٢ فقط

(ب) ٢ فقط

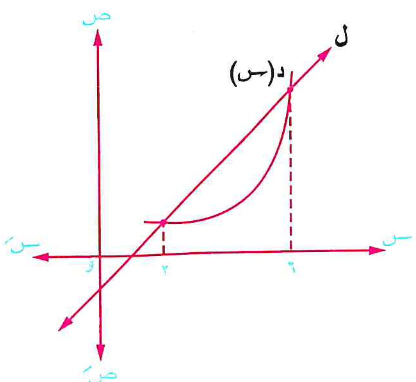
(جـ) ٤ فقط

(د) (أ) ، (ب) معًا.

(١٨) فى الشكل المقابل :

إذا كان ميل المستقيم ل يساوى ٣

فإن : د (٦) − د (٢) = ...



(أ) ٤

(ب) ٧

(جـ) ١٢

(د) ٢٤

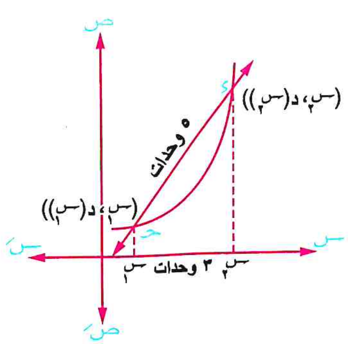
(١٩) الشكل المقابل يمثل منحنى

الدالة د : ح ← ح حيث ص = د (س)

، $\overleftrightarrow{\text{حء}}$ قاطعًا للمنحنى فى حـ ، ء

فإن متوسط التغير للدالة د عندما

تتغير س من $س_1$ إلى $س_2$ = ...



(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$

(جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

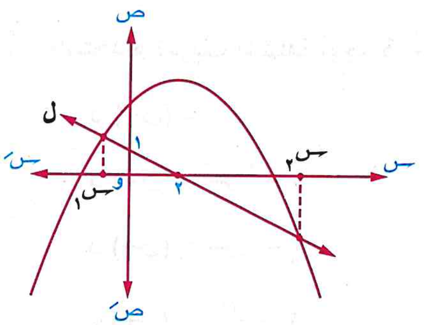
(٢٠) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

إذا قطع المستقيم ل منحنى د عند

النقطتين $((س_١ ، د(س_١))$ ، $((س_٢ ، د(س_٢))$

فإن متوسط معدل التغير للدالة د عندما

تتغير س من $س_١$ إلى $س_٢$ يساوى ....



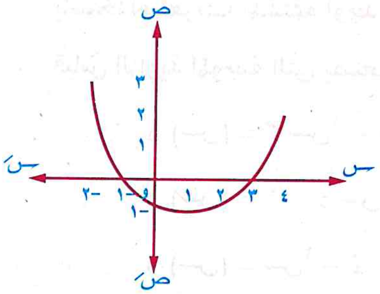
(أ) ٢ (ب) −٢

(جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $-\frac{١}{٢}$

(٢١) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن الدالة ر : ر(س) = | د(س) |

تكون غير قابلة للإشتقاق عند س ∈ ....

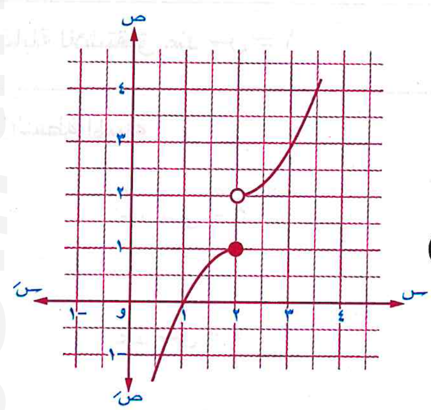


(أ) {٣} (ب) {٣ ، −١}

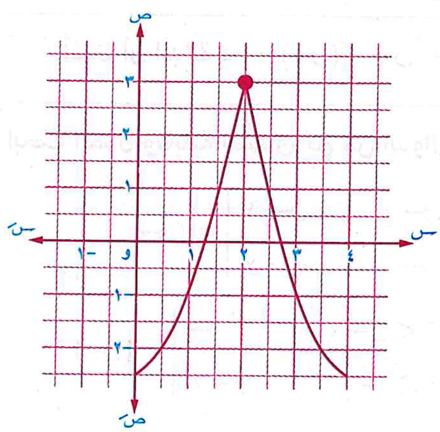
(جـ) {١} (د) ∅

(٢٢) أى الدوال الممثلة بالأشكال الآتية قابلة للاشتقاق عند س = ٢ ؟

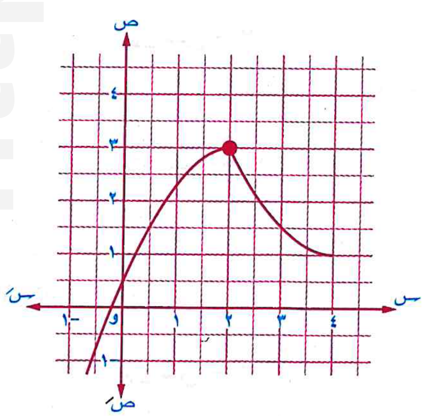
(أ)



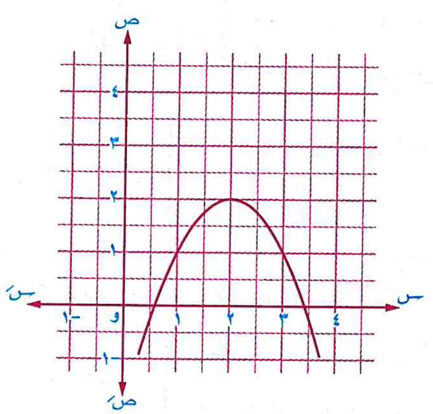
(ب)



(جـ)



(د)



فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ باستخدام تعريف المشتقة أوجد دَ (س) لكل من الدوال الآتية :

(١) د (س) = ٨
(٢) د (س) = ٥ س − ٧
(٣) د (س) = $س^٢$ + ٥
(٤) د (س) = ٩ س + $س^٢$
(٥) د (س) = $س^٣$ − ٢
(٦) د (س) = $\frac{١}{س}$
(٧) د (س) = $\frac{٧}{س}$ − ٢
(٨) د (س) = ٥ − ٤ $\sqrt{س}$
(٩) د (س) = $\sqrt{٣ س + ١}$
(١٠) د (س) = $\frac{س}{س + ٥}$

٢ باستخدام تعريف المشتقة أوجد ميل المماس لكل من منحنيات الدوال الآتية عند النقطة المبينة ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند نفس النقطة لأقرب دقيقة :

(١) د (س) = ٣ $س^٢$ − ٥ عند النقطة (٢ ، ٧) «١٢ ، ٨٥° ١٤َ»
(٢) د (س) = ١ − ٥ س − ٣ $س^٢$ عند النقطة (−١ ، ٣) «١ ، ٤٥°»
(٣) د (س) = $س^٣$ − ٤ عند النقطة (١ ، −٣) «٣ ، ٧١° ٣٤َ»
(٤) د (س) = $\sqrt[٣]{س + ٣}$ عند النقطة (٥ ، ٢) «$\frac{١}{١٢}$ ، ٤° ٤٦َ»

٣ أثبت أن الدالة د : د (س) = $س^٢$ − س + ١ قابلة للاشتقاق عند س = ١

٤ ابحث اتصال وقابلية اشتقاق كل من الدوال الآتية عند النقطة المبينة :

(١) د (س) = $\begin{cases} ٢ س − ١ & ، س < ٣ \\ ٧ − س & ، س \geq ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

(٢) د (س) = $\begin{cases} س^٢ & ، س > ٢ \\ ٤ س − ١ & ، س \leq ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

(٣) د (س) = $\begin{cases} س^٢ − ٥ & ، س < ٢ \\ ٤ س − ٩ & ، س \geq ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

(٤) د (س) = $\begin{cases} ١ − س^٣ & ، س > −١ \\ ٥ + \frac{٣}{س} & ، س \leq −١ \end{cases}$ عند س = −١

٥ ابحث قابلية اشتقاق كل من الدوال الآتية عند النقط المبينة :

(١) د (س) = $\begin{cases} ٢ س − ٣ & ، س \leq ١ \\ س^٢ − ٢ & ، س > ١ \end{cases}$ عند س = ١

② 📖 $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٤ - \text{س}^{٢} & ، \text{س} \leq ١ \\ ٢\text{س} + ١ & ، \text{س} > ١ \end{cases}$ عند $\text{س} = ١$

③ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ٣ & ، \text{س} < ١ \\ ٣\text{س}^{٢} - ١٢\text{س} + ١١ & ، \text{س} \geq ١ \end{cases}$ عند $\text{س} = ١$

---

٦ 📖 **بين أن الدالة د : د(س) =** $\begin{cases} \text{س}^{٢} & ، \text{س} \leq ٢ \\ \text{س} + ٢ & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$ غير قابلة للاشتقاق عند $\text{س} = ٢$

---

٧ ابحث قابلية اشتقاق كل من الدوال الآتية عند النقط المبينة :

① 📖 $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} - ١}{\text{س} + ١}$ عند $\text{س} = ٢$

② $\text{د}(\text{س}) = \text{س} + \dfrac{١}{\text{س}}$ عند $\text{س} = ١$

③ $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} - ٤}$ عند $\text{س} = ٤$

④ $\text{د}(\text{س}) = \sqrt[٣]{(\text{س} + ٢)^{٢}}$ عند $\text{س} = ٦$

⑤ $\text{د}(\text{س}) = |\text{س} - ٢|$ عند $\text{س} = ٢$

⑥ $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٩}$ عند $\text{س} = -٣$

⑦ $\text{د}(\text{س}) = ٣ + |\text{س} + ٢|$ عند $\text{س} = -٢$

⑧ $\text{د}(\text{س}) = \text{س}\,|\text{س}|$ عند $\text{س} = ٠$

---

٨ ابحث قابلية اشتقاق كل من الدوال الآتية عند النقط المبينة :

① $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}\,|\text{س}| + ٥ & ، \text{س} \geq ٠ \\ \dfrac{\text{س}}{|\text{س}|} + ٦ & ، \text{س} < ٠ \end{cases}$ عند $\text{س} = ٠$

② $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} + ٣ & ، \text{س} \leq ٠ \\ ٣ + \text{ظا}\,٢\text{س} & ، \text{س} > ٠ \end{cases}$ عند $\text{س} = ٠$

③ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{جتا}\,٢\text{س} & ، \text{س} \leq \dfrac{\pi}{٢} \\ -\text{جا}\,\text{س} & ، \text{س} > \dfrac{\pi}{٢} \end{cases}$ عند $\text{س} = \dfrac{\pi}{٢}$

٩ **إذا كانت كل من الدوال الآتية متصلة عند النقطة المبينة أوجد قيمة أ ثم ابحث قابلية هذه الدوال للاشتقاق عند نفس النقطة :**

① د(س) = $\begin{cases} \text{أ س}^{٢} + ١ & ، \text{س} \geq ٢ \\ ٤\,\text{س} - ٣ & ، \text{س} < ٢ \end{cases}$ عند س = ٢ «١»

② د(س) = $\begin{cases} ٣\,\text{س} + ٢ & ، \text{س} < ٢ \\ \text{أ س}^{٣} & ، \text{س} \geq ٢ \end{cases}$ عند س = ٢ «١»

---

١٠ **أوجد قيم أ ، ب إذا كانت كل من الدوال الآتية قابلة للاشتقاق عند النقطة المبينة :**

① د(س) = $\begin{cases} ٤ - \text{أ س}^{٢} & ، \text{س} \leq ٢ \\ \text{س} + \text{ب} & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$ عند س = ٢ «$-\frac{١}{٤}$ ، ٣»

② د(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} - ٤ & ، \text{س} \leq ٢ \\ \text{أ س} + \text{ب} & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$ عند س = ٢ «٤ ، −٨»

---

١١ إذا كان : د(س) = أ س^{٢} + ب حيث أ ، ب ثابتان أوجد :

① المشتقة الأولى للدالة د عند أي نقطة (س ، ص)

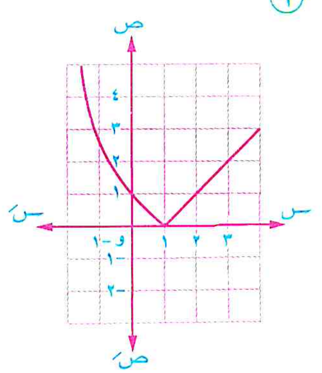
② قيمتي أ ، ب إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة (٢ ، −٣) الواقعة عليه يساوي ١٢

«٣ ، −١٥»

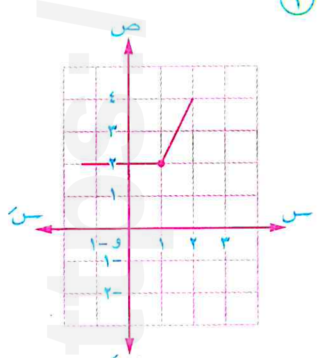
---

١٢ **قارن بين المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى لكل من الدوال الآتية ، وأثبت أن كلاً منها غير قابلة للاشتقاق عند النقطة س = ١**

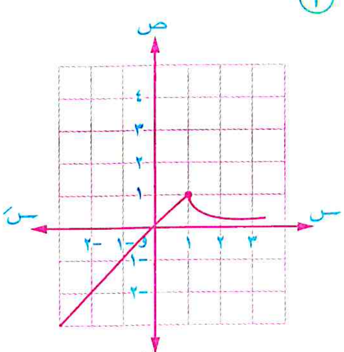
①



②



③



---

١٣ إذا كانت : د(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + \text{أ س} - ٢ & ، \text{س} < ٢ \\ ٤ & ، \text{س} = ٢ \\ \text{أ} + \text{ب س} & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$ متصلة عند س = ٢

فأوجد قيم : أ ، ب ثم ابحث قابلية اشتقاق د عند س = ٢ «١ ، ١٫٥»

١٤ $د(س) = \begin{cases} م س + ٣ حـ & ، س < ١ \\ حـ س^{٢} + ٤ م & ، س \geq ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١ ، د (١) = ١١

أوجد قيم الثابتين : م ، حـ ثم ابحث قابلية اشتقاق الدالة عند س = ١ «٢ ، ٣»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان د (أ) = صفر ، دَ (أ) = ب حيث ب < ٠ وكان : ر (س) = | د (س) |

فإن : رَ (أ) = ...

(أ) ب (ب) − ب (جـ) صفر (د) غير معرفة.

(٢) $\displaystyle نهـا_{هـ \to ٠} \frac{د(هـ + ٣) - د(هـ - ٢) + د(-٢) - د(٣)}{هـ} = ...$

(أ) دَ (٣) + دَ (−٢) (ب) دَ (٣)

(جـ) دَ (−٢) (د) دَ (٣) − دَ (−٢)

(٣) إذا كانت د دالة وكان دَ (١) = ٢ د (١) = ٤ فإن : $\displaystyle نهـا_{هـ \to ٠} \frac{٣ هـ}{د(١ + هـ) - ٢} = ...$

(أ) صفر (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) ١٢ (د) $\frac{١}{٤}$

(٤) إذا كانت د دالة وكان : د (٢) = ٤ ، دَ (٢) = ١ فإن : $\displaystyle نهـا_{س \to ٢} \frac{س د(٢) - ٢ د(س)}{س - ٢} = ...$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(٥) إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = س² − ١ يمر بالنقطتين : أ (٢ ، د (٢)) ، ب (٣ ، د (٣))

فإن : $\dfrac{\text{ميل القاطع } \overleftrightarrow{أب}}{\text{ميل المماس للمنحنى عند أ}} = ...$

(أ) ٥ (ب) $\frac{٥}{٤}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) ١

---

٢ إذا كانت الدالة د : $د(س) = \begin{cases} ٢ س + ٣ & ، س < ٢ \\ أ س^{٢} + ب س - ١ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

متصلة عند س = ٢ وكان متوسط تغير د عندما تتغير س من ١ إلى ٣ يساوى ٤,٥

أوجد قيمتى : أ ، ب ثم ابحث قابلية اشتقاق هذه الدالة عند س = ٢ «١ ، ٢»

الدرس 3

قواعد الاشتقاق

إن إيجاد مشتقة الدالة من خلال التعريف قد يستغرق وقتًا وجهدًا ولتسهيل ذلك إليك بعض القواعد التى توفر لك أسلوبًا سهلاً للحصول على المشتقة.

١ مشتقة الدالة الثابتة

إذا كانت : د $(س)$ = أ حيث أ ثابت　　فإن : دَ $(س)$ = صفر

فمثلًا : – إذا كانت : د $(س) = ٤$　　فإن : دَ $(س)$ = صفر

– إذا كانت : د $(س) = ٢٥$ جا $\frac{\pi}{٣}$　　فإن : دَ $(س)$ = صفر

٢ مشتقة الدالة د : د $(س) = س^{ن}$

إذا كانت : د $(س) = س^{ن}$ حيث $ن \in ح$　　فإن : دَ $(س) = ن\, س^{ن-١}$

فمثلًا : – إذا كانت : د $(س) = س^{٤}$　　فإن : دَ $(س) = ٤\, س^{٣}$

– إذا كانت : د $(س) = س^{-\frac{٥}{٢}}$　　فإن : دَ $(س) = -\frac{٥}{٢}\, س^{-\frac{٧}{٢}}$

إذا كانت : د $(س) = أ\, س^{ن}$ حيث أ ثابت ، $ن \in ح$　　فإن : دَ $(س) = أ\, ن\, س^{ن-١}$

فمثلًا : – إذا كانت : د $(س) = ٢\, س^{٥}$　　فإن : دَ $(س) = ١٠\, س^{٤}$

– إذا كانت : ص $= ٦\sqrt{س} = ٦\, س^{\frac{١}{٢}}$　　فإن : صَ $= ٣\, س^{-\frac{١}{٢}} = \frac{٣}{\sqrt{س}}$

– إذا كانت : ص $= س^{٢}\sqrt[٣]{س^{٢}} = س^{٢\frac{٢}{٣}}$　　فإن : صَ $= \frac{٨}{٣}\, س^{١\frac{٢}{٣}}$

لاحظ أنه :

* إذا كانت : ص = $س$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = ١$
* إذا كانت : ص = $\sqrt{س}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$
* إذا كانت : ص = $\frac{١}{س}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-١}{س^٢}$

٣ مشتقة مجموع دالتين أو الفرق بينهما

إذا كانت : د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

وكانت : ص = د (س) ± ر (س) فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = دَ (س) ± رَ (س)

وبصفة عامة : إذا كانت $د_١$ ، $د_٢$ ، ... ، $د_ن$ دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

وكانت ص = $د_١$ (س) ± $د_٢$ (س) ± ... ± $د_ن$ (س)

فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = $دَ_١$ (س) ± $دَ_٢$ (س) ± ... ± $دَ_ن$ (س)

فمثلًا : – إذا كانت : د (س) = ٥ $س^٢$ + ٢ س + ٧ فإن : دَ (س) = ١٠ س + ٢

– إذا كانت : ص = $\frac{١}{٢}$ $س^٦$ – ٤ $س^{\frac{٧}{٢}}$ فإن : صَ = ٣ $س^٥$ – ١٤ $س^{\frac{٥}{٢}}$

مثال ١

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

١ ص = ٢ $س^٥$ + ٣ $س^٣$ – ٤ س + ٦

٢ د (س) = (س – ٣) (٢ س – ١)

٣ د (س) = ٢ س $\sqrt{س}$ + ٤ $\sqrt{س}$ – ١

٤ د (س) = $\frac{س^٣ + ٥ س^٢ + س + ٤}{س^٣}$ حيث س ≠ ٠

الحـــل

١ صَ = ١٠ $س^٤$ + ٩ $س^٢$ – ٤

٢ ∵ د (س) = ٢ $س^٢$ – ٧ س + ٣ ∴ دَ (س) = ٤ س – ٧

٣ ∵ د (س) = ٢ $س^{\frac{٣}{٢}}$ + ٤ $س^{\frac{١}{٢}}$ – ١ ∴ دَ (س) = ٢ × $\frac{٣}{٢}$ $س^{\frac{١}{٢}}$ + ٤ × $\frac{١}{٢}$ $س^{-\frac{١}{٢}}$ = ٣ $\sqrt{س}$ + $\frac{٢}{\sqrt{س}}$

٤ ∵ د (س) = $\frac{س^٣}{س^٣}$ + $\frac{٥ س^٢}{س^٣}$ + $\frac{س}{س^٣}$ + $\frac{٤}{س^٣}$ = ١ + ٥ $س^{-١}$ + $س^{-٢}$ + ٤ $س^{-٣}$

∴ دَ (س) = صفر – ٥ $س^{-٢}$ – ٢ $س^{-٣}$ – ١٢ $س^{-٤}$ = – $\frac{٥}{س^٢}$ – $\frac{٢}{س^٣}$ – $\frac{١٢}{س^٤}$

مثال ٢

إذا كانت : د (س) = $س^٣$ + ٦ $س^٢$ − ٣٦ س + ٤ **فأوجد :**

١ دَ (١) ، دَ (٠)

٢ قيم س التى تجعل دَ (س) = ٠

الحل

∵ دَ (س) = ٣ $س^٢$ + ١٢ س − ٣٦

١ دَ (١) = ٣ × ١ + ١٢ × ١ − ٣٦ = −٢١ ، دَ (٠) = −٣٦

٢ بوضع دَ (س) = ٠ ∴ ٣ $س^٢$ + ١٢ س − ٣٦ = ٠

∴ $س^٢$ + ٤ س − ١٢ = ٠ ∴ (س + ٦) (س − ٢) = ٠

∴ س = −٦ أ، س = ٢

٤ مشتقة حاصل ضرب دالتين

إذا كانت د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س وكانت ص = د (س) × ر (س)

فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = د (س) × رَ (س) + ر (س) × دَ (س)

أى أن المشتقة الأولى لحاصل ضرب دالتين قابلتين للاشتقاق
= الأولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى

مثال ٣

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

١ ص = ($س^٢$ + ٣) (٢ $س^٣$ − ٥)

٢ ص = (س + $\frac{١}{س}$) ($س^٣$ − ٢)

الحل

١ $\frac{ءص}{ءس}$ = ($س^٢$ + ٣) × ٦ $س^٢$ + (٢ $س^٣$ − ٥) × ٢ س

= ٦ $س^٤$ + ١٨ $س^٢$ + ٤ $س^٤$ − ١٠ س = ١٠ $س^٤$ + ١٨ $س^٢$ − ١٠ س

٢ ∵ ص = (س + $س^{-١}$) ($س^٣$ − ٢)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ $س^٢$ (س + $س^{-١}$) + (١ − $س^{-٢}$) ($س^٣$ − ٢)

ملاحظة

يمكن الاكتفاء بهذه النتيجة وعدم فك الأقواس أما إذا كان المطلوب وضع الناتج فى أبسط صورة فيجب إكمال الحل بفك الأقواس وجمع الحدود الجبرية المتشابهة.

نتيجة

إذا كانت : د ، ر ، ق دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

وكانت : ص = د (س) × ر (س) × ق (س)

فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = دَ (س) × ر (س) × ق (س) + رَ (س) × د (س) × ق (س) + قَ (س) × د (س) × ر (س)

وبقسمة الطرفين على ص = د (س) × ر (س) × ق (س) نجد أن :

$\frac{1}{\text{ص}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{دَ (س)}}{\text{د (س)}} + \frac{\text{رَ (س)}}{\text{ر (س)}} + \frac{\text{قَ (س)}}{\text{ق (س)}}$

مثال ٤

أوجد المشتقة الأولى للدالة د حيث : د (س) = (٢ س^3 + ٣) (س^2 − ٥) (س^3 − ٤ س + ١) ثم أوجد : دَ (٠)

الحل

دَ (س) = ٦ س^2 (س^2 − ٥) (س^3 − ٤ س + ١) + ٢ س (٢ س^3 + ٣) (س^3 − ٤ س + ١)

+ (٣ س^2 − ٤) (٢ س^3 + ٣) (س^2 − ٥)

، دَ (٠) = ٠ × (−٥) × ١ + ٠ × ٣ × ١ + (−٤) × ٣ × (−٥) = ٦٠

٥ مشتقة خارج قسمة دالتين

إذا كانت : د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

وكانت : ص = $\frac{\text{د (س)}}{\text{ر (س)}}$ حيث ر (س) ≠ ٠ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ر (س)} \times \text{دَ (س)} - \text{د (س)} \times \text{رَ (س)}}{(\text{ر (س)})^2}$

أى أن المشتقة الأولى لخارج قسمة دالتين قابلتين للاشتقاق

= $\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$

مثال ٥

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

١ ص = $\frac{\text{٣ س − ٤}}{\text{٢ س + ٥}}$

٢ ص = $\frac{\text{٣ س}^2 \text{ + ١}}{\text{س}^2 \text{ − ٤}}$

الحل

١ صَ = $\frac{\text{٣ (٢ س + ٥) − ٢ (٣ س − ٤)}}{(\text{٢ س + ٥})^2} = \frac{\text{٢٣}}{(\text{٢ س + ٥})^2}$

٢ صَ = $\frac{\text{٦ س (س}^2\text{ − ٤) − ٢ س (٣ س}^2\text{ + ١)}}{(\text{س}^2\text{ − ٤})^2} = \frac{\text{− ٢٦ س}}{(\text{س}^2\text{ − ٤})^2}$

مثال ٦

إذا كانت : $د(س) = \frac{س^{٢} - س - ٢}{س^{٢} + س - ٢}$ فأوجد : $دَ(٢)$ ، $دَ(-٢)$

الحل

$$دَ(س) = \frac{(٢س - ١)(س^{٢} + س - ٢) - (٢س + ١)(س^{٢} - س - ٢)}{(س^{٢} + س - ٢)^{٢}}$$

$$= \frac{(٢س^{٣} + س^{٢} - ٥س + ٢) - (٢س^{٣} - س^{٢} - ٥س - ٢)}{(س^{٢} + س - ٢)^{٢}} = \frac{٢س^{٢} + ٤}{(س^{٢} + س - ٢)^{٢}}$$

$\therefore$ $دَ(٢) = \frac{٢(٢)^{٢} + ٤}{(٤ + ٢ - ٢)^{٢}} = \frac{١٢}{١٦} = \frac{٣}{٤}$ ، $دَ(-٢)$ غير موجودة حيث $-٢ \notin$ مجال الدالة.

مثال ٧

إذا كانت الدالة د : $د(س) = \begin{cases} أس + ب & ، س \geq ١ \\ س^{٢} - ٣ & ، س < ١ \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $س = ١$

فما قيمة كل من : أ ، ب

الحل

$\because$ د قابلة للاشتقاق عند $س = ١$

$\therefore$ د متصلة عند $س = ١$

$\therefore$ $د(١^{+}) = د(١^{-})$

$\therefore$ $\lim_{س \to ١^{+}} (أس + ب) = \lim_{س \to ١^{-}} (س^{٢} - ٣)$

$\therefore$ $أ + ب = -٢$ (١)

، $دَ(س) = \begin{cases} أ & ، س \geq ١ \\ ٢س & ، س < ١ \end{cases}$

$\therefore$ $دَ(١^{+}) = دَ(١^{-})$ $\therefore$ $أ = ٢$

وبالتعويض فى (١) : $\therefore$ $ب = -٤$

ملاحظة

الدالة د قابلة للاشتقاق عند $س = ١$

$\therefore$ يمكن استخدام قواعد الاشتقاق مباشرة دون استخدام التعريف.

تمارين 11

على قواعد الاشتقاق

من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : $د(س) = \frac{١}{س}$ فإن : $دَ(١) =$ ....

(أ) ١ (ب) صفر (ج) −١ (د) ٢

(٢) $\frac{ء}{ءس}\left((س - ١)(س + ٣)\right) =$ ....

(أ) ٢ س (ب) ٢ س + ١ (ج) ٢ س − ٣ (د) ٢ س + ٢

(٣) إذا كانت : $د(س) = \frac{١}{٢} س^{١٤} - \frac{١}{٤} س^{٢٠} + \frac{١}{٦} س^{٣٦}$ فإن : $دَ(١) =$ ....

(أ) ٦ (ب) ٨ (ج) ١٦ (د) ١٨

(٤) إذا كانت : $د(س) = (٤ س^٢ - ١)(١ + ٤ س^٢)$ فإن : $دَ\left(-\frac{١}{٢}\right) =$ ....

(أ) صفر (ب) −١ (ج) −٨ (د) −٦٤

(٥) إذا كانت : $دَ(٢) = ٥$ ، $د(س) = س^٢ + م س + ٥$ فإن : م = ...

(أ) ٥ (ب) ٢ (ج) ١٠ (د) ١

(٦) إذا كانت : $د(س) = س^٥$ فإن : $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ} =$ ....

(أ) ٥ (ب) $٥ س^٤$ (ج) $س^٥$ (د) غير موجودة.

(٧) إذا كانت : $ص = \frac{١}{\sqrt{س}}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} =$ ....

(أ) $\frac{-١}{٢\sqrt{س}}$ (ب) $\frac{-١}{٢ س}$ (ج) $\frac{-١}{٢ س \sqrt{س}}$ (د) $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

(٨) إذا كانت : $د(س) = أ^٢$ حيث أ ثابت فإن : $دَ(س) =$ ....

(أ) صفر (ب) ٢ أ (ج) ٢ (د) $أ^٢$

(٩) إذا كانت : $ص = ٣ \sqrt[٤]{س}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} =$ ....

(أ) $١٢ س^٣$ (ب) $١٢ \sqrt[٣]{س}$ (ج) $\frac{٣}{٤ \sqrt[٣]{س^٤}}$ (د) $\frac{٣}{٤ \sqrt[٤]{س^٣}}$

(١٠) إذا كانت : $ص = \frac{٢}{س} + \frac{س}{٢} + ٢$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} =$ ....

(أ) $\frac{٢}{س^٣} + \frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) $\frac{س^٢ - ٤}{٢ س^٢}$ (د) $\frac{س^٢ - ٢}{٢ س^٢}$

(١١) إذا كانت : ص = $\frac{س^{٢} + ٦}{س^{٣} + ٥}$ فإن : صَ عندما س = ١ تساوى ....

(أ) $-\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{٦}{٥}$ (جـ) $\frac{٧}{٦}$ (د) $\frac{١١}{١٢}$

(١٢) $\frac{ى}{ى س}$ (د (س) . ر (س)) = ...

(أ) دَ (س) . رَ (س) (ب) د (س) . رَ (س)

(جـ) دَ (س) . ر (س) (د) د (س) . رَ (س) + دَ (س) . ر (س)

(١٣) إذا كانت : ص = (س + ٤) (س^{٢} + ٥ س + ٧) فإن : صَ = ...

(أ) ٢ س^{٢} + ١٣ س + ٢٠ (ب) س^{٢} + ١٨ س + ٢٠

(جـ) س^{٣} + ١٨ س^{٢} + ٢٧ س + ٢٨ (د) ٣ س^{٢} + ١٨ س + ٢٧

(١٤) إذا كان : س ص = ٨١ فإن : $\frac{ى ص}{ى س}$ = ... عند س = ٩

(أ) −٩ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٩

(١٥) إذا كانت : د (س) = س^{ن} + س$^{-ن}$ فإن : دَ (١) = ...

(أ) ن (ب) ن + $\frac{١}{ن}$ (جـ) ن − $\frac{١}{ن}$ (د) صفر

(١٦) إذا كانت ن ∈ ص$_{+}$ وكانت : د (س) = ن س^{ن} ، دَ (١) = ٩ فإن : ن = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(١٧) $\frac{ى}{ى س}$ (٥ π^{٢}) = ...

(أ) ٥ (ب) ١٠ π (جـ) صفر (د) ٥ π^{٢}

(١٨) إذا كانت : د (س) = س + $\frac{٩}{س}$ فإن : دَ (س) = صفر عندما س = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ± ٣ (د) ± ٩

(١٩) إذا كان : د (س) = ٤ س^{٢} + ر (س) وكان : دَ (٣) = ٧ فإن : رَ (٣) = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٣١ (جـ) −١٧ (د) −٢٤

(٢٠) إذا كان : د (س) = ٥ ر (س) + ٢٠ فإن : رَ (س) = ...

(أ) دَ (س) (ب) دَ (س) − ٢٠ (جـ) ٥ دَ (س) (د) $\frac{١}{٥}$ دَ (س)

(٢١) إذا كانت : د (س) = (س + أ) (س^{٢} − أ) وكانت : دَ (−١) = ٤ فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $-\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $-\frac{٢}{٣}$

(٢٢) إذا كان : د (س) = م س^{٢} + ن س + ل فإن : دَ (١) + دَ (٤) − دَ (٥) = ...

(أ) م (ب) − م (جـ) ن (د) − ن

(٢٣) إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − ٢ س^{٢} + ٥ س − ٤ وكانت دَ (س) = ٢ فإن : س = ...

(أ) ١ أ، ٢ (ب) ١ أ، ٣ (جـ) ٢ أ، ٣ (د) ٣ أ، ٤

(٢٤) إذا كان : د (س) = أ س^{٢} ، ر (س) = $\frac{\text{س}^{٣}}{\text{ب}}$ وكان دَ (−٣) = رَ (٢) فإن : أ ب = ...

(أ) −٦ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ١٢

(٢٥) إذا كانت : د (س) = ٢ أ س^{٣} ، دَ (−٣) = ١٠٨ فإن : دَ (١) = ...

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

(٢٦) إذا كانت : ص = $\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{م}}}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ...

(أ) $\frac{\text{م ص}}{\text{ن س}}$ (ب) م $\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{م}-١}}$

(جـ) $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ $\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{م}-١}}$ (د) $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ $\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{م}+\text{ن}}}$

(٢٧) إذا كانت ص = $\frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٤}$ وكانت : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = صفر فإن : س = ...

(أ) ± ٢ (ب) ± ٤ (جـ) ٢ أ، ٣ (د) −٢ أ، −٣

(٢٨) إذا كانت د (س) = $\frac{٢\text{س}^{٢} + \text{أ س} + \text{ب}}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٤}$ وكان : د (٠) = ٣ ، دَ (٠) = صفر

فإن : أ × ب = ...

(أ) ١٨٠ (ب) −١٨٠ (جـ) ٣ (د) −٢٧

(٢٩) إذا كان : د (س) = س^{٣} − أ س + ١ ، ر (س) = أ س^{٢} + ب س + ٣

وكان : ٢ دَ (١) + رَ (١) = ٢ فإن : ب = ...

(أ) −٤ (ب) −٣ (جـ) ٣ (د) ٤

(٣٠) إذا كان : د (س) = س^{٢} + أ س + ب وكان : دَ (٥) = ٢ دَ $\left(\frac{٧}{٢}\right)$ فإن : أ = ...

(أ) −٤ (ب) −٣ (جـ) ٢ (د) ٣

(٣١) إذا كان (د $\square$ ر)َ = دَ $\square$ رَ فإن أى العمليات الآتية يمكن وضعها فى المربع حتى تكون الجملة صحيحة لكل الدوال د ، ر القابلة للاشتقاق ؟

(أ) (+) فقط. (ب) (+) ، (−) فقط.

(جـ) (+) ، (−) ، (×) ، (÷) (د) (×) فقط.

(٣٢) إذا كانت د : [−١ ، ١] ⟵ ح حيث د (س) = س^{٢} ، ر : [٠ ، ٤] ⟵ ح حيث ر (س) = ٤ س

فإن : $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (د (س) . ر (س)) = ... عند س = ٢

(أ) ١٦ (ب) ٣٢ (جـ) ٤٨ (د) غير معرفة.

(٣٣) إذا كانت : $\frac{د}{د س}$ $[(أ س)^{٣}]$ = ٢٤ عندما س = ١ فإن قيمة أ تساوى ....

(أ) ٨ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٢٤

(٣٤) إذا كانت : د (س) = $س^{٣}$ − ٣ $س^{٢}$ − ٥ س + ٦ فإن : $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{د (١ + ٢ هـ) − د (١)}{هـ}$ = ...

(أ) −٨ (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) −١٦

(٣٥) إذا كانت : د (س) = (س − ٤) (س − ٥) (س − ٦) (س − ٧) فإن : دَ (٧) = ...

(أ) −٧ (ب) −٦ (جـ) صفر (د) ٦

(٣٦) إذا كانت : د (س) = $س^{٢}$ − س + ٤ وكان : دَ (ك) = دَ (٢) + د (٢) فإن : ك = ...

(أ) ٧ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ١

(٣٧) إذا كانت د : د (س) دالة زوجية وقابلة للاشتقاق لجميع قيم س ∈ ح

فإن : دَ (أ) + دَ (− أ) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ دَ (أ) (جـ) ٢ دَ (− أ) (د) −٢ دَ (أ)

(٣٨) إذا كانت د دالة فردية قابلة للاشتقاق لكل س ∈ ح فإن : دَ (أ) + دَ (− أ) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ دَ (أ) (جـ) ١ (د) ٢ د (− أ)

(٣٩) إذا كانت الدالة د : د (س) = أ $س^{٢}$ − ب س + ١ ، وكان دَ (٢) = ٢ ومتوسط التغير للدالة د

عندما تتغير س من ١ إلى ١,٢ يساوى ٥,٦ فإن : أ + ب = ...

(أ) −١٠ (ب) −٢ (جـ) ١٢ (د) −١٢

(٤٠) إذا كان : د (س) = $\begin{vmatrix} س & -١ \\ ١ & ٢ س \end{vmatrix}$ فإن : دَ (٢) = ...

(أ) ١٠ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ٢

(٤١) أى مما يأتى لا يكافىء المشتقة الأولى للدالة د (س) = $\sqrt{س}$ ؟

(أ) $\frac{١}{٢ \sqrt{س}}$ (ب) $\frac{\sqrt{س}}{٢ س}$ (جـ) $\frac{س}{٢ \sqrt{س}}$ (د) $\frac{١}{٢}$ $س^{-\frac{١}{٢}}$

(٤٢) إذا كانت : د (س) = ٣ $س^{٢}$ − ٥ س + ١ وكانت د (أ) = دَ (أ) فإن : أ = ...

(أ) ٣ ، أ $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ ، أ $\frac{١}{٣}$ (جـ) ١ ، أ ٣ (د) ٢ ، أ ٣

(٤٣) إذا كانت : ص = $(أ س + ٢)^{٢}$ وكان $\frac{د ص}{د س}$ = ٦ عندما س = ١ فإن : أ = ...

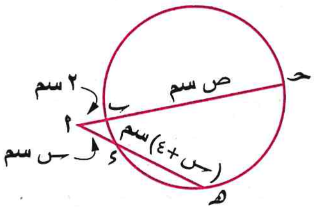
(أ) ١ ، أ ٦ (ب) ١ ، أ −٣ (جـ) −٣ ، أ ٢ (د) ٢ ، أ ٦

٤٤ متوازى مستطيلات قاعدته مربعة طول ضلعه س سم وارتفاعه ص سم وحجمه ٨٠ سم^{3}

فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ... عندما س = ٤

(أ) ٤ (ب) $\frac{-5}{4}$ (جـ) $\frac{-5}{2}$ (د) $\frac{-2}{5}$

٤٥ فى الشكل المقابل :



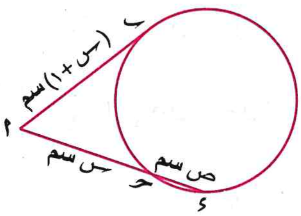
إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ يقطع الدائرة فى ب ، حـ

، $\overleftrightarrow{\text{أهـ}}$ يقطع الدائرة فى ء ، هـ

فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ... عندما س = ٣ سم

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٢

٤٦ فى الشكل المقابل :



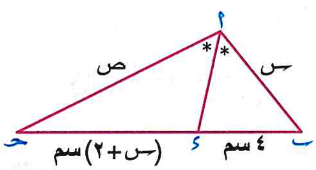
إذا كانت : $\overline{\text{أب}}$ قطعة مماسة للدائرة

فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ... عندما س = ٥

(أ) ‎-٥ (ب) $-\frac{1}{5}$

(جـ) $-\frac{1}{25}$ (د) ‎-٢٥

٤٧ فى الشكل المقابل :

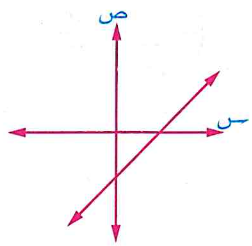


إذا كانت : $\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ

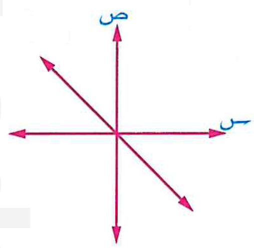
فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ... عندما س = ٢

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) ١ (جـ) $1\frac{1}{2}$ (د) ٢

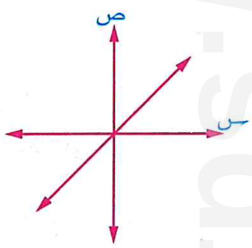
٤٨ إذا كان : ص = أ س^{2} + ٧ كثيرة الحدود حيث أ ∈ ح$^{-}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ يمكن أن يمثلها الشكل ....



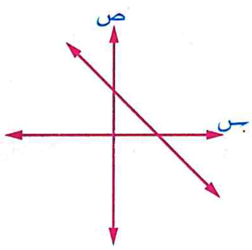
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

(١) ص = ٧

(٢) ص = ٥ س

(٣) ص = س^{4}

(٤) ص = $\frac{4}{3}$ π س^{3}

(٥) ص = $\frac{-4}{\text{س}^{5}}$

(٦) د (س) = ٣ س^{2} − ٤ س + ٥

⑦ $ص = ٨ - \frac{٢}{٣} س^{٣} + \frac{١}{٥} س^{٥}$

⑧ $ص = ٢ س^{٦} + س^{-٩}$

⑨ $ص = س^{٧} + \frac{١}{س^{٧}}$

⑩ $ص = س^{٤} - ٣ س^{٢} + ٥ - \frac{٢}{س^{٢}} - \frac{٣}{س^{٤}}$

⑪ $ص = س \left(٣ س^{٢} - ٢ س\right) + ١٢ س$

⑫ $ص = \frac{٥ س^{٥} - ٢ س^{٣} + ١٠ س^{٢} - ٢٠}{١٠ س^{٣}}$

⑬ $ص = \frac{٢}{س^{٢}} \left(س^{٤} - ٤ س^{٢} + س - ٣\right)$

⑭ $ص = \frac{(س - ٢)(س + ٢)(س^{٢} + ٤)}{س^{٢}}$

⑮ $ص = (س - ١)(س + ١)(س^{٢} + ١)(س^{٤} + ١)(س^{٨} + ١)(س^{١٦} + ١)$

٢ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

① $ص = \sqrt[٣]{س^{٥}}$

② $ص = ٢ س^{٦} + ٣ \sqrt{س}$

③ $ص = س^{٥} - ٢ \sqrt{س^{٣}}$

④ $ص = س \left(٣ س^{٢} - \sqrt{س}\right)$

⑤ $ص = \frac{\sqrt{س} - ٢ س}{\sqrt{س}}$

⑥ $ص = \frac{٤ س^{٢} - ٣ س + ٢ \sqrt{س}}{س}$

⑦ $ص = \frac{٥}{س} + س \sqrt{س} + \sqrt{٣} س - ٤$

⑧ $ص = \sqrt{س} \left(س \sqrt{س} - \frac{س}{\sqrt{س}} - ٣\right)$

٣ أوجد قيمة كل مما يأتى :

① $\frac{د}{د س} \left(\frac{١}{س^{٢}}\right)$

② $\frac{د}{د س} \left(س^{\frac{١}{٣}}\right)$

③ $\frac{د}{د س} \left(\frac{١}{\sqrt[٣]{س}}\right)$

④ $\frac{د}{د س} \left(س \sqrt{س}\right)$

⑤ $\frac{د}{د س} \left(\sqrt[٣]{س^{٢}}\right)$

⑥ $\frac{د}{د س} \left(\frac{١}{\sqrt[٣]{س^{-٥}}}\right)$

٤ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

① $ص = (س^{٢} + ٣)(س^{٣} - ٣ س + ١)$

② $ص = (٤ س^{٢} - ١)(٧ س^{٣} + س)$ عند $س = ١$ «١٣٠»

③ $ص = (س^{٢} + ١)(س^{٣} + ٣)$ عند $س = -١$ «٢»

④ $د(س) = (٤ س^{٢} - ٣ س + ٧)(س^{٢} + ٢ س + ٣)$ عند النقطة $(٠ ، ٢١)$ «٥»

⑤ $د(س) = س (٣ س - ٤)(س^{٢} - ٢)$ عند $س = ٠$ «٨»

⑥ $ص = (٢ س + ١)(٣ س^{٢} - ٢)(٤ س^{٣} + ٣)$

٥ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

(١) ص = $\frac{٤}{س^٢}$

(٢) ص = $\frac{٥}{٢ س + ٣}$

(٣) د (س) = $\frac{س}{٢ س + ١}$

(٤) ص = $\frac{٥ س - ٢}{٥ س + ١}$

(٥) د (س) = $\frac{س}{س^٢ - ١}$

(٦) د (س) = $\frac{س^٢ - ١}{س^٣ + ١}$

(٧) ص = $\frac{س^٢ - ٦ س + ٧}{س - ٢}$

(٨) ص = $\frac{س^٢ + ٢ س + ٥}{س^٢ - ٥ س + ١}$

(٩) د (س) = ١ - $\frac{١}{س - ١}$ **ثم أوجد : دَ (٣)** «$\frac{١}{٤}$»

(١٠) د (س) = $\frac{س}{س + ٢}$ - $\frac{س - ١}{س - ٢}$ **ثم أوجد : دَ (٠)** «$\frac{٣}{٤}$»

---

٦ أوجد قيم أ ، ب إذا كانت كل من الدوال الآتية قابلة للاشتقاق عند النقطة المبينة :

(١) د (س) = $\begin{cases} س^٣ + ٤ & ، س \leq ١ \\ أ س + ب & ، س > ١ \end{cases}$ عند س = ١ «٣ ، ٢»

(٢) د (س) = $\begin{cases} س^٢ - أ & ، س \leq ٢ \\ أ س + ب & ، س > ٢ \end{cases}$ عند س = ٢ «٤ ، -٨»

(٣) د (س) = $\begin{cases} أ س^٢ + ب س + ٧ & ، س \leq ٢ \\ \frac{٥}{س - ١} & ، س > ٢ \end{cases}$ عند س = ٢ «-٢ ، ٣»

---

٧ إذا كانت : ص = $\frac{س^٣ - ١}{س^٣}$ **أثبت أن :** $س^٤ \left(\frac{ءص}{ءس}\right) = ٣$

---

٨ إذا كانت : ص = $\frac{٢}{\sqrt{س}} + \sqrt{س}$ **أثبت أن :** $٢ س^٢ ص \left(\frac{ءص}{ءس}\right) = س^٢ - ٤$

---

٩ إذا كانت : ص = $\frac{٣}{س - ١}$ **أثبت أن :** $\frac{ءص}{ءس} = -\frac{١}{٣} ص^٢$

---

١٠ إذا كانت : ص = $\frac{ل^٢}{س + ل^٢}$ ، ل ثابت **أثبت أن :** $\frac{ءص}{ءس} + \left(\frac{ص}{ل}\right)^٢ = ٠$

---

١١ إذا كانت : د (س) = أ $س^٣$ + ب س وكانت : د (١) = ٢ ، دَ (١) = صفر

فما قيمة كل من : أ ، ب ؟ «-١ ، ٣»

● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

١٢ أوجد قيم س التى تجعل دَ (س) = ٧ حيث د (س) = $س^٣$ − ٥ س + ٢ «± ٢»

---

١٣ أوجد قيمة الثابت ٢ إذا كانت : د (س) = $\frac{س + ٢}{س − ٢}$ ، دَ (٢) = − ٢ «٤ أ ١ ، ١»

---

١٤ إذا كانت : د (س) = $\frac{س^٢ + ٢ س + ب}{س^٢ − س + ٢}$ وكان د (٠) = ١ ، دَ (٠) = ١

فما قيمة كل من : ٢ ، ب ؟ «١ ، ٢»

---

١٥ إذا كان : ص = ٢ $س^٣$ + ب $س^٢$ ، $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٨ عندما س = ١ وكان متوسط تغير ص

عندما تتغير س من −١ إلى ٢ يساوى ٧ **أوجد قيمتى الثابتين : ٢ ، ب** «٢ ، ١»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : دَ (س) × ر (س) + رَ (س) × د (س) = س + $\frac{١}{س}$

فإن : $\frac{ء}{ء س}$ [د (س) × ر (س)] = ... عند س = ٢

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{٥}{٢}$ (د) ٣

(٢) إذا كان : د (س) = (٢ س + ١) × هـ (س) وكان : د (٢) = ١٥ ، هـَ (٢) = ٤

فإن : دَ (٢) = ...

(أ) ٢٦ (ب) ٢٨ (جـ) ٣٠ (د) ٣٢

(٣) إذا كان : ٢ د (١) = دَ (١) = ٤ ، ٣ هـ (١) = هـَ (١) = ٣

فإن : $\frac{ء}{ء س}$ $\left[\frac{د (س)}{هـ (س)}\right]$ = ... عند س = ١

(أ) −٤ (ب) −٢ (جـ) ١ (د) ٣

(٤) إذا كانت : د (س) = $\frac{هـ (س)}{٢ س^٢ + ٣}$ وكانت : هـ (١) = −٥ ، هـَ (١) = ٦ فإن : دَ (١) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٥) إذا كانت : د (س) = (س − ١) (س − ٢) (س − ٣) فإن : $\sum_{ك = ١}^{٣}$ دَ (ك) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

الدرس 4

مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة)

إذا كانت ص دالة فى ع ولتكن ص = د (ع) ، وكانت ع دالة فى س ولتكن ع = ر (س)

فإن : الدالة ص الناتجة من تركيب الدالتين د ، ر تسمى دالة الدالة فى س حيث :

ص = (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) ولإيجاد مشتقة دالة الدالة نتبع النظرية الآتية :

نظرية «قاعدة السلسلة»

إذا كانت : ص = د (ع) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى ع ، ع = ر (س) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

فإن : $\boxed{\dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء ع}} \times \dfrac{\text{ء ع}}{\text{ء س}}}$ ويكون : ص = د [ر (س)] قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

مثال ١

أوجد $\dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ فى كل مما يأتى :

١ ص = ع^{٨} + ١ ، ع = ٢ س − ٣

٢ ص = $\dfrac{\text{ع}}{\text{ع} - ١}$ ، ع = س^{٢} + ٣ س + ٣ ثم أوجد : $\left[\dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right]_{\text{س} = ١}$

الحل

١ $\dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء ع}} = ٨\,\text{ع}^{٧}$ ، $\dfrac{\text{ء ع}}{\text{ء س}} = ٢$ ∴ $\dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء ع}} \times \dfrac{\text{ء ع}}{\text{ء س}} = ٨\,\text{ع}^{٧} \times ٢ = ١٦\,\text{ع}^{٧} = ١٦\,(٢\,\text{س} - ٣)^{٧}$

٢ $\dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء ع}} = \dfrac{\text{ع} - ١ - \text{ع}}{(\text{ع} - ١)^{٢}} = \dfrac{-١}{(\text{ع} - ١)^{٢}}$ ، $\dfrac{\text{ء ع}}{\text{ء س}} = ٢\,\text{س} + ٣$

∴ $\dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء ع}} \times \dfrac{\text{ء ع}}{\text{ء س}} = \dfrac{-١}{(\text{ع} - ١)^{٢}} \times (٢\,\text{س} + ٣) = \dfrac{-(٢\,\text{س} + ٣)}{\left((\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} + ٣) - ١\right)^{٢}} = \dfrac{-(٢\,\text{س} + ٣)}{(\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} + ٢)^{٢}}$

∴ $\left[\dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right]_{\text{س} = ١} = \dfrac{-(٢ + ٣)}{(١ + ٣ + ٢)^{٢}} = \dfrac{-٥}{٣٦}$

مشتقة الدالة $[\text{د}\,(\text{س})]^{\text{ن}}$

إذا كانت : $\text{ص} = [\text{د}\,(\text{س})]^{\text{ن}}$ حيث د قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س ، ن عدد حقيقى

فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ن}\,[\text{د}\,(\text{س})]^{\text{ن}-١} \times \text{د}'\,(\text{س})$

أى أن مشتقة $(\text{قوس})^{\text{ن}} = \text{ن}\,(\text{القوس})^{\text{ن}-١} \times$ مشتقة ما بداخل القوس.

مثال ٢

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

١) $\text{ص} = (٢\text{س}^٣ + ٥)^٤$

٢) $\text{ص} = \left(\frac{٣\text{س}}{٢\text{س} + ١}\right)^٥$

٣) $\text{ص} = \sqrt[٣]{(\text{س}^٢ - ٣\text{س} - ٤)^٢}$

الحـــل

١) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٤\,(٢\text{س}^٣ + ٥)^٣ \times ٦\text{س}^٢ = ٢٤\text{س}^٢\,(٢\text{س}^٣ + ٥)^٣$

٢) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٥\left(\frac{٣\text{س}}{٢\text{س} + ١}\right)^٤ \times \frac{٣\,(٢\text{س} + ١) - ٢ \times ٣\text{س}}{(٢\text{س} + ١)^٢}$

$= ٥\left(\frac{٣\text{س}}{٢\text{س} + ١}\right)^٤ \times \frac{٣}{(٢\text{س} + ١)^٢} = \left(\frac{٣\text{س}}{٢\text{س} + ١}\right)^٤ \times \frac{١٥}{(٢\text{س} + ١)^٢}$

٣) $\because \text{ص} = (\text{س}^٢ - ٣\text{س} - ٤)^{\frac{٢}{٣}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢}{٣}(\text{س}^٢ - ٣\text{س} - ٤)^{-\frac{١}{٣}}\,(٢\text{س} - ٣) = \frac{٢\,(٢\text{س} - ٣)}{٣\sqrt[٣]{\text{س}^٢ - ٣\text{س} - ٤}}$

مثال ٣

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

١) $\text{ص} = (٢\text{س} + ١)^٣\,(٣\text{س} - ٢)^٤$

٢) $\text{ص} = \frac{(\text{س}^٢ + ١)^٣}{(٢\text{س} - ٣)^٢}$

الحـــل

١) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (٢\text{س} + ١)^٣ \times ٤\,(٣\text{س} - ٢)^٣ \times ٣ + (٣\text{س} - ٢)^٤ \times ٣\,(٢\text{س} + ١)^٢ \times ٢$

$= ١٢\,(٢\text{س} + ١)^٣\,(٣\text{س} - ٢)^٣ + ٦\,(٢\text{س} + ١)^٢\,(٣\text{س} - ٢)^٤$

$= ٦\,(٢\text{س} + ١)^٢\,(٣\text{س} - ٢)^٣\,\big(٢\,(٢\text{س} + ١) + (٣\text{س} - ٢)\big)$

$= ٦\,(٢\text{س} + ١)^٢\,(٣\text{س} - ٢)^٣\,(٤\text{س} + ٢ + ٣\text{س} - ٢)$

$= ٦\,(٢\text{س} + ١)^٢\,(٣\text{س} - ٢)^٣\,(٧\text{س})$

$= ٤٢\text{س}\,(٢\text{س} + ١)^٢\,(٣\text{س} - ٢)^٣$

٢ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٣ (\text{س}^٢ + ١)^٢ \times ٢\text{س} \times (٢\text{س} - ٣)^٢ - ٢ (٢\text{س} - ٣) \times ٢ \times (\text{س}^٢ + ١)^٣}{\left((٢\text{س} - ٣)^٢\right)^٢}$

$= \frac{٦\text{س} (\text{س}^٢ + ١)^٢ (٢\text{س} - ٣)^٢ - ٤ (\text{س}^٢ + ١)^٣ (٢\text{س} - ٣)}{(٢\text{س} - ٣)^٤}$

$= \frac{٢ (\text{س}^٢ + ١)^٢ (٢\text{س} - ٣) \left(٣\text{س} (٢\text{س} - ٣) - ٢ (\text{س}^٢ + ١)\right)}{(٢\text{س} - ٣)^٤}$

$= \frac{٢ (\text{س}^٢ + ١)^٢ (٦\text{س}^٢ - ٩\text{س} - ٢\text{س}^٢ - ٢)}{(٢\text{س} - ٣)^٣}$

$= \frac{٢ (\text{س}^٢ + ١)^٢ (٤\text{س}^٢ - ٩\text{س} - ٢)}{(٢\text{س} - ٣)^٣}$

ملاحظة

إذا كانت : $\text{ص} = \sqrt{\text{د}(\text{س})}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{د}(\text{س})}} \times \text{د}'(\text{س}) = \frac{\text{د}'(\text{س})}{٢\sqrt{\text{د}(\text{س})}}$

أى أن : مشتقة الجذر التربيعى لدالة = $\frac{١}{٢\,(\text{الجذر})}$ × مشتقة ما تحت الجذر.

مثال ٤

أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يأتى :

١ $\text{ص} = \sqrt{٢\text{س} + ٣}$

٢ $\text{ص} = \sqrt{٥\text{س}^٣ - ١٢\text{س}^٢ + ٨\text{س} + ١}$

الحل

١ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢\sqrt{٢\text{س} + ٣}} \times ٢ = \frac{١}{\sqrt{٢\text{س} + ٣}}$

٢ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١٥\text{س}^٢ - ٢٤\text{س} + ٨}{٢\sqrt{٥\text{س}^٣ - ١٢\text{س}^٢ + ٨\text{س} + ١}}$

مثال ٥

إذا كانت : $\text{ص} = \frac{\text{ع}^٢}{\text{ع}^٢ + ١}$ ، $\text{ع} = \sqrt{٣\text{س} - ٢}$ **فأوجد :** $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند $\text{س} = ١$

الحل

$\because \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{٢\text{ع} (\text{ع}^٢ + ١) - ٢\text{ع} (\text{ع}^٢)}{(\text{ع}^٢ + ١)^٢} = \frac{٢\text{ع}^٣ + ٢\text{ع} - ٢\text{ع}^٣}{(\text{ع}^٢ + ١)^٢} = \frac{٢\text{ع}}{(\text{ع}^٢ + ١)^٢}$ ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{٣}{٢\sqrt{٣\text{س} - ٢}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{٢\text{ع}}{(\text{ع}^٢ + ١)^٢} \times \frac{٣}{٢\sqrt{٣\text{س} - ٢}}$

وبالتعويض عن ع : $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢\sqrt{٣\text{س} - ٢}}{(٣\text{س} - ٢ + ١)^٢} \times \frac{٣}{٢\sqrt{٣\text{س} - ٢}} = \frac{٣}{(٣\text{س} - ١)^٢}$

$\therefore \left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\text{س} = ١} = \frac{٣}{(٣ \times ١ - ١)^٢} = \frac{٣}{٤}$

حل آخر : فى بعض الأحيان نجد أنه من الأفضل التعويض عن ع فى ص وذلك لجعل ص دالة فى س ثم إيجاد $\frac{ءص}{ءس}$ كالآتى :

$\because$ ع $= \sqrt{٣س - ٢}$ $\quad \therefore$ ص $= \frac{\left(\sqrt{٣س - ٢}\right)^{٢}}{\left(\sqrt{٣س - ٢}\right)^{٢} + ١} = \frac{٣س - ٢}{٣س - ٢ + ١} = \frac{٣س - ٢}{٣س - ١}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٣\,(٣س - ١) - ٣\,(٣س - ٢)}{(٣س - ١)^{٢}} = \frac{٩س - ٣ - ٩س + ٦}{(٣س - ١)^{٢}} = \frac{٣}{(٣س - ١)^{٢}}$

$\therefore \left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{س = ١} = \frac{٣}{(٣ \times ١ - ١)^{٢}} = \frac{٣}{٤}$

نتيجة

إذا كانت ص دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س فإن : $\frac{ء}{ءس}(ص^{ن}) = ن\,ص^{ن-١} \times \frac{ءص}{ءس}$

فمثلًا : (١) $\frac{ء}{ءس}(ص^{٣}) = ٣\,ص^{٢} \times \frac{ءص}{ءس}$ $\qquad$ (٢) $\frac{ء}{ءص}(ص^{٣}) = ٣\,ص^{٢}$

مثال ٦

إذا كانت : ص $=$ ع^{٢} $+ ٣$ع $+ ٥$ ، ع $= \frac{١}{٢}$ س^{٢} $+ ٢$

أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس} - ٧\,\frac{ءع}{ءس} - س^{٣} =$ صفر

الحل

$\because \frac{ءص}{ءع} = ٢ع + ٣$ ، $\frac{ءع}{ءس} = \frac{١}{٢} \times ٢س = س$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = (٢ع + ٣) \times س$ وبالتعويض عن قيمة ع

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \left(٢\left(\frac{١}{٢}س^{٢} + ٢\right) + ٣\right) \times س = (س^{٢} + ٤ + ٣) \times س = س^{٣} + ٧س$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} - ٧\,\frac{ءع}{ءس} - س^{٣} = س^{٣} + ٧س - ٧س - س^{٣} =$ صفر $\qquad$ (وهو المطلوب)

ملاحظة

إذا كانت : ص $= (د \circ ر)(س) = د\left(ر(س)\right)$

فإن : $\frac{ءص}{ءس} = دَ\left(ر(س)\right) \,.\, رَ(س)$

مثال ٧

إذا كان : $د(٢س - ١) = س^{٢} + ٣$ $\quad$ **أوجد :** $دَ(٥)$

الحل

$\because د(٢س - ١) = س^{٢} + ٣$ $\quad \therefore دَ(٢س - ١) \times ٢ = ٢س$

وبوضع $٢س - ١ = ٥$ $\quad \therefore س = ٣$ $\quad \therefore دَ(٥) \times ٢ = ٦$ $\quad \therefore دَ(٥) = ٣$

تمارين 12

على مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة)

📖 من أسئلة الكتاب المدرس ● فهم ○ تطبيق ⁂ مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $ص = س^{٢}$ ، $س = ع^{٣} - ١$ فإن : $\frac{ءص}{ءع} = $ ....

(أ) $ع^{٣} - ١$ (ب) $٦ ع^{٢}$

(جـ) $٦ ع^{٢} (ع^{٣} - ١)$ (د) $س^{٢} (ع^{٣} - ١)$

(٢) إذا كان : $ص = س^{٢} + س$ ، $س = ع^{٢} + ع$ فإن : $\frac{ءص}{ءع} = $ .... عند $ع = -١$

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ٢

(٣) إذا كانت : $ص = ع^{٣} - ع - ١$ ، $ع = س - \frac{٤}{س}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = $ .... عند $س = ٢$

(أ) -١ (ب) -٢ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{-١}{٢}$

(٤) إذا كانت : $ص س = ٥$ ، $س ع = ٣$ فإن : $\frac{ءص}{ءع} = $ ....

(أ) ١٥ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) صفر

(٥) إذا كانت : $ص = \frac{س - ٥}{س + ٥}$ ، $س = ٢ ع + ٣$ فإن : $\frac{ءص}{ءع} = $ .... عند $ع = ١$

(أ) $\frac{١}{٢٥}$ (ب) $-\frac{١}{٢٥}$ (جـ) $-\frac{١}{٥}$ (د) $\frac{١}{٥}$

(٦) إذا كانت : $ع = \frac{١}{٢} ص^{٢} + ص - ٢$ ، $ص = س^{٢} + س + ١$

فإن : $\frac{ءع}{ءس} = $ .... عند $س = -\frac{١}{٢}$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $-\frac{١}{٢}$

(٧) إذا كانت : $ص = \sqrt{ع} + \frac{١}{\sqrt{ع}}$ ، $ع = س^{٢} + ٢٥$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = $ .... عند $س = ٠$

(أ) -٢ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٣

(٨) إذا كانت : $ص = \frac{ع + ٣}{ع - ١}$ ، $ع = \frac{س + ١}{س - ٣}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = $ .... عند $س = ٤$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٩) 📖 إذا كانت : $د(س) = \sqrt{س^{٢} + ٩}$ فإن : $دَ(-٤) = $ ....

(أ) $\frac{-٤}{٥}$ (ب) ٥ (جـ) $\frac{١}{١٠}$ (د) $\frac{-١}{١٠}$

(١٠) إذا كان : $\text{ص} = (\text{س}^{٢} - ٢)^{٥}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = $ ....

(أ) $٥\,(\text{س}^{٢} - ٢)^{٤}$ (ب) $١٠\,\text{س}\,(\text{س}^{٢} - ٢)^{٤}$

(جـ) $٢٢\,\text{س}^{٥}$ (د) $٢\,\text{س}\,(\text{س}^{٢} - ٢)^{٥}$

(١١) إذا كانت : $\text{ص} = (\text{ع} + ١)^{٣}$ ، $\text{ع} = \text{س}^{٥} - ١$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = $ ....

(أ) $\text{س}^{١٥}$ (ب) $\text{س}^{٨}$ (جـ) $١٥\,\text{س}^{١٤}$ (د) $٨\,\text{س}^{٧}$

(١٢) 📖 $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\,(٢ - ٣\text{س})^{-٢} = $ ....

(أ) $١٢\,\text{س}^{-٢} - ٢٧\,\text{س}^{-٤}$ (ب) $\frac{١}{٣}\,(٢ - ٣\text{س})^{-١}$

(جـ) $٦\,(٢ - ٣\text{س})^{-٣}$ (د) $-٢\,(٢ - ٣\text{س})^{-٣}$

(١٣) إذا كان : $\text{ص} = \sqrt{٢ - \text{س}}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = $ ....

(أ) $-\frac{١}{٢\,\text{ص}}$ (ب) -١ (جـ) $-٢\,\text{ص} - ١$ (د) $-٢\,\text{ص}$

(١٤) إذا كان : $\text{ص} = (\text{س} + \text{ل})^{٢}$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١٢$ عند $\text{س} = $ صفر فإن : $\text{ل} = $ ....

(أ) ٢ فقط. (ب) ± ٢ (جـ) -٢ فقط. (د) ٤ فقط.

(١٥) إذا كان : $\text{ص} = \frac{١}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}}$ فإن : $\text{ص}' = $ ....

(أ) $\frac{-\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}}$ (ب) $\frac{-\text{س}}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢} + ١}}$ (جـ) $\frac{-\text{س}}{\sqrt{(\text{س}^{٢} + ١)^{٣}}}$ (د) $\frac{-\text{س}}{\sqrt[٣]{(\text{س}^{٢} + ١)^{٢}}}$

(١٦) إذا كانت : $\text{ص} = \sqrt[٣]{٢\,\text{س}^{٢} - ٣\,\text{س} + ٩}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = $ .... عند $\text{س} = ١$

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{١}{١٢}$ (جـ) ٦ (د) ١٢

(١٧) إذا كانت : $\text{ص} = \text{د}\,(\text{س})$ فإن : $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\,(\text{ص}^{٦}) = $ ....

(أ) $٦\,\text{ص}^{٥}$ (ب) $\text{ص}^{٦}$ (جـ) صفر (د) $٦\,\text{ص}^{٥}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

(١٨) 📖 إذا كانت : $\text{ص} = (\text{س}^{٣} - ٣\,\text{س}^{٢} + ٢)^{٥}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = $ ....

(أ) $٥\,(\text{س}^{٣} - ٣\,\text{س}^{٢} + ٢)^{٤}$ (ب) $١٥\,\text{س}^{٢}\,(\text{س}^{٣} - ٣\,\text{س}^{٢} + ٢)^{٤}$

(جـ) $٥\,(٣\,\text{س}^{٢} - ٦\,\text{س})^{٤}$ (د) $١٥\,\text{س}\,(\text{س} - ٢)\,(\text{س}^{٣} - ٣\,\text{س}^{٢} + ٢)^{٤}$

(١٩) إذا كان : $\text{ص} = \frac{\text{ع}}{\text{ع} - ١}$ ، $\text{ع} = \frac{\text{س}}{\text{س} + ١}$ فإن : ....

(أ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ١ = ٠$ (ب) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءص}}$

(جـ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١$ (د) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ع}\,\text{س}}{(\text{ع} - ١)\,(\text{س} + ١)}$

(٢٠) 📖 إذا كان : $\text{ص} = (\text{ع} - ١)^{٥}$ ، $\text{ع} = \text{س}^{٢} + ٣$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = $ ....

(أ) $١٠\,\text{س}\,(\text{س}^{٢} + ٢)^{٤}$ (ب) $٥\,(\text{س}^{٢} + ٢)^{٤}$

(جـ) $٥\,(٢\,\text{س} + ٢)^{٤}$ (د) $١٠\,\text{س}\,(\text{س}^{٢} + ٢)^{٥}$

(٢١) إذا كانت : د (س) = س^{٢} + ٣ فإن : $\frac{ء}{ءس}$ [د (د (س))] = ... عند س = ١

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

(٢٢) إذا كانت : د (٣ − ٢ س) = ٣ س^{٢} + ١ فإن : دَ (٧) = ...

(أ) −١٢ (ب) −٢ (جـ) ٦ (د) ٤٢

(٢٣) إذا كان : د (س − ١) = س − ٢ ر (س^{٢} + ٣) وكان : دَ (١) = ٩ فإن : رَ (٧) = ...

(أ) −٢ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٢

(٢٤) إذا كان : ر (س) = $\sqrt{\text{د (س)}}$ حيث كل من د (س) ، ر (س) دوال قابلة للإشتقاق وكانت د (٣) = ٤

فإن : رَ (٣) : دَ (٣) = ...

(أ) ١ : ٤ (ب) ١ : ١٦ (جـ) ٤ : ١ (د) ١٦ : ١

(٢٥) إذا كانت : د (س) = س^{٢} + ٣ فإن : دَ (د (س)) = ... عند س = ١

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

(٢٦) إذا كانت : ٢ د (٣) = ٥ دَ (٣) = ١٠ ، هـَ (٥) = ٢ فإن : (هـ ∘ د)َ (٣) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢٧) إذا كان : د (س) = $\sqrt{\text{ر (س)}}$ وكان دَ (س) = $\frac{١}{\sqrt{\text{ر (س)}}}$ فإن : رَ (س) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) س (د) دَ (س)

(٢٨) الشكل المقابل يمثل منحنى دالة د

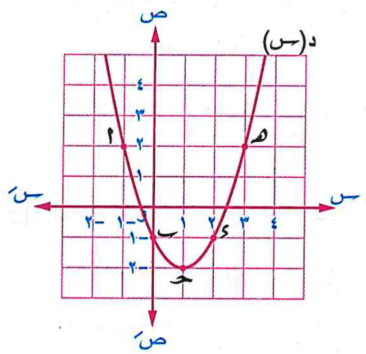
فأى مما يأتى يكون موجب

(أ) $\frac{ء}{ءس}$ [د (س)] عند أ

(ب) $\frac{ء}{ءس}$ [(د (س))^{٢}] عند ء

(جـ) $\frac{ء}{ءس}$ [(د (س))^{٢}] عند ب

(أ) $\frac{ء}{ءس}$ [(د (س))^{٣}] عند حـ



(٢٩) فى الشكلين المقابلين :

إذا كان الشكل الأول يمثل دالة خطية

والثانى يمثل دالة تربيعية

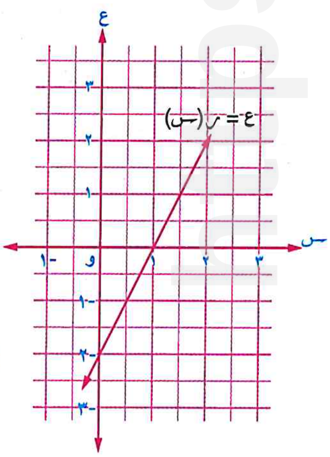
فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عندما ع = ٥

(أ) ٤

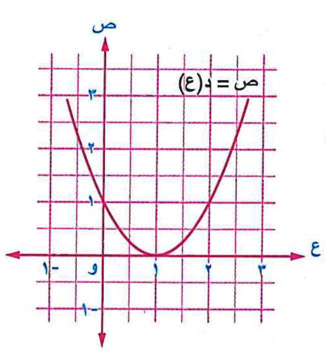
(ب) ٨

(جـ) ١٢

(د) ١٦



شكل (١)



شكل (٢)

● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ فى كل مما يأتى :

١) $ص = ع^{٢}$ ، $ع = ٣ س^{٢} - ٢$ عند $س = ٢$ «٢٤٠»

٢) $ص = ع^{٧}$ ، $ع = س^{٣} + ٢ س^{٢} - ٤$ عند $س = ١$ «٤٩»

٣) $ص = ع^{٥} + ٣$ ، $ع = (س - ١)^{٣}$ عند $س = ٢$ «١٥»

٤) $ص = ع^{٣} + ع - ٢$ ، $ع = س^{٢} - س$ عند النقطة (٠ ، -٢) «-١»

٥) $ص = \sqrt{ع}$ ، $ع = \frac{س - ٢}{س + ١}$ عند $س = ٣$ «$\frac{٣}{١٦}$»

٦) $ص = \frac{ع - ١}{ع + ١}$ ، $ع = \frac{س + ١}{س - ١}$ عند $س = ٢$ «$-\frac{١}{٤}$»

٧) $ص = ع^{٢} - ع + ١$ ، $ع = \sqrt[٣]{(س - ١)^{٢}}$ عند $س = ٢$ «$\frac{٢}{٣}$»

---

٢ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ فى كل مما يأتى :

١) $ص = ٣ ع^{٢} - ١$ ، $ع = \frac{٥}{س}$

٢) $ص = \sqrt[٣]{ع}$ ، $ع = س^{٢} - ٣ س + ٢$

٣) $ص = ع + \frac{١}{ع}$ ، $س ع = ١$

٤) $ص = \frac{ع^{٢}}{ع^{٢} + ١}$ ، $ع = \sqrt{٢ س + ١}$

---

٣ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

١) $ص = (س + ٤)^{١٢}$

٢) $ص = (١ - ٣ س)^{٥}$

٣) $ص = (س^{٢} - ٣)^{٦}$

٤) $ص = (٣ س^{٢} - ٤ س + ١)^{٤}$

٥) $ص = (٦ س^{٣} + ٣ س + ١)^{١٠}$

٦) $ص = \left(س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}}\right)^{٧}$

٧) $ص = \frac{٧}{(٣ س - ١)^{٦}}$

٨) $ص = \frac{٧}{(س^{٢} - ٩)^{٥}}$

---

٤ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

١) $ص = س^{٥} (س + ٣)^{٧}$ عند $س = -٢$ «-١٤٤»

٢) $ص = (س - ٣) (س - ٥)^{٨}$ عند النقطة (٤ ، ١) «-٧»

٣) $ص = (١ - س)^{٦} (١ + س)^{٦}$ عند $س = \sqrt{٢}$ «$١٢ \sqrt{٢}$»

٤) $ص = (س^{٢} + ١)^{٥} (س^{٢} - س + ١)^{-٤}$ عند $س = ١$ «٣٢»

٥) $ص = \left(\frac{٣ س - ٢}{٥ س - ٤}\right)^{٩}$ عند $س = ١$ «-١٨»

٦) $ص = \left(\frac{س^{٢} + ١}{س - ٣}\right)^{٥}$ عند $س = ١$ «$\frac{-١٥}{٢}$»

٧) $ص = \frac{س^{٧}}{(٣ س - ٢)^{٤}}$ عند النقطة (١ ، ١) «-٥»

٨) $ص = \frac{(س - ١)^{٤}}{(س^{٢} + ١)^{٥}}$ عند النقطة (٠ ، ١) «-٤»

٥ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

(١) $ص = \sqrt{س^{٢} + ١}$

(٢) $ص = \sqrt[٣]{(٢س + ١)^{٥}}$

(٣) $ص = \sqrt{٩ - ٢س^{٢}}$ عند $س = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ «$-\frac{١}{٢}$»

(٤) $ص = \sqrt[٣]{(٢س^{٣} + ٤س + ٣)^{٢}}$ عند $س = ٢$ «$\frac{٥٦}{٩}$»

(٥) $ص = س\sqrt{س - ١}$ عند النقطة (٥ ، ١٠) «$٣\frac{١}{٤}$»

(٦) $ص = (س^{٢} - ١)\sqrt{٢س + ٣}$ عند $س = -١$ «-٢»

(٧) $ص = \frac{٩س}{\sqrt{٥س^{٢} - ٤}}$ عند النقطة (١ ، ٩) «-٣٦»

(٨) $ص = \frac{٨س}{\sqrt[٣]{س - ٢}}$ عند $س = ٣$ «صفر»

---

٦ أوجد كلًا مما يأتى :

(١) $\frac{د}{دس}\left(س\sqrt{٢س^{٢} + ١}\right)$ عند $س = ٠$ «١»

(٢) $\frac{د}{دس}\left(\sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}}\right)^{٤}$ عند $س = ١$ «صفر»

---

٧ إذا كانت : $ص = س^{٢} - ١$ ، $س = ع^{٣} - ٢$ أوجد : $\frac{دص}{دع}$

ثم أثبت أن : $\frac{دص}{دع} + ٤\frac{دس}{دع} = ٦ع^{٥}$ «$٦ع^{٥} - ١٢ع^{٢}$»

---

٨ إذا كانت : $ص = ع^{٢} + ع$ ، $ع = ٢س^{٢}$ أثبت أن : $\frac{دص}{دس} - \frac{دع}{دس} = ١٦س^{٣}$

---

٩ إذا كانت : $ص = \sqrt{١ + س^{٢}}$ ، $ع = ٣س^{٢} - ٧$ أثبت أن : $ص\left(\frac{دص}{دس}\right) + \frac{دع}{دس} = ٧س$

---

١٠ إذا كانت : $ص = (س - ٥)^{٣}$ أثبت أن : $\left(\frac{دص}{دس}\right)^{٣} - ص(س - ٥)\left(\frac{دص}{دس}\right) = ٢٤ص^{٢}$

---

١١ إذا كانت : $(س + ص)^{٣} = ٥$ أثبت أن : $\frac{دص}{دس} = -١$

---

١٢ أوجد قيم س التى تجعل $د'(س) = ٧$ حيث $د(س) = (س - ٥)^{٧}$ «٦ ، ٤»

---

١٣ إذا كانت : $ص = (أس + ب)^{٢}$ وعندما $س = ٢$ فإن : $ص = ١$ ، $\frac{دص}{دس} = ٤$

أوجد قيمتى : أ ، ب «±٢ ، ∓٣»

---

١٤ **الربط بالحجوم :** يصب زيت بمعدل ١٠ سم^{٣}/ث فى برميل أسطوانى الشكل طول نصف قطر قاعدته ٩٠ سم.

أوجد معدل ارتفاع الزيت فى البرميل بالنسبة للزمن. «$\frac{١}{٨١٠\pi}$ سم/ث»

● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : د (٢) = دَ (٢) = ٣ وكان : ر (س) = $\left(\text{س}^{٢}\ \text{د}(\text{س})\right)^{٢}$ فإن : رَ (٢) = ...

(أ) ٥٧٦ (ب) ٧٦٨ (جـ) ٦٧٢ (د) ٤٨٠

② إذا كانت د دالة زوجية وقابلة للاشتقاق لجميع قيم س ∈ ح حيث د ليست دالة ثابتة فإن دَ (س) تكون دالة ....

(أ) زوجية. (ب) فردية.

(جـ) ليست زوجية وليست فردية. (د) زوجية وفردية معًا.

③ إذا كانت : د (س) = ٢ س − ٥ فإن : $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ [د$^{-١}$ (س)] = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٤ (د) $\frac{١}{٤}$

④ إذا كان : د (س) = س^{٢} + ٢ ، هـ (س) = س + ٢

فإن : $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ [(د ∘ هـ) (س)] = ... عند س = ١

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٠

⑤ إذا كانت : ل (س) = د (ر (س)) حيث د (−٢) = ٨ ، دَ (−٢) = ٤

، دَ (٥) = ٣ ، ر (٥) = −٢ ، رَ (٥) = ٦ فإن : لَ (٥) = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٢٠ (جـ) ١٢ (د) ٨

⑥ إذا كانت : ص = $\sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س} + \cdots}}}}$ فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{\text{س ص}}$ (جـ) $\frac{١}{٢\,\text{ص} + ١}$ (د) $\frac{١}{٢\,\text{ص} - ١}$

⑦ مشتقة س^{٦} بالنسبة إلى س^{٣} هي ....

(أ) س^{٣} (ب) ٢ س^{٣} (جـ) ٣ س^{٢} (د) ٦ س^{٦}

---

٢ إذا كانت : ص = $\frac{٢\,\text{س}}{\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}}$ ، ع = $\frac{\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}}{٥\,\text{س}}$ **أثبت أن :** ٥ ع^{٢} $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ + ٢ $\frac{\text{ء ع}}{\text{ء س}}$ = ٠ .

---

٣ إذا كانت : ص = $\left(\frac{\text{س}^{٢} - ٢}{\text{س}^{٢} + ٢}\right)^{\text{ن}}$ **أثبت أن :** $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = $\frac{٨\,\text{ن س ص}}{\text{س}^{٤} - ٤}$

مشتقات الدوال المثلثية

١ إذا كانت : ص = حا س	فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = حتا س
٢ إذا كانت : ص = حتا س	فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − حا س
٣ إذا كانت : ص = ظا س	فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قا^{٢} س
٤ إذا كانت : ص = ظتا س	فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − قتا^{٢} س
٥ إذا كانت : ص = قا س	فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قا س ظا س
٦ إذا كانت : ص = قتا س	فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − قتا س ظتا س

البرهان (لا يمتحن فيه الطالب)

∵ ص = حا س ∴ د (س) = حا س ، د (س + هـ) = حا (س + هـ)

∴ دَ (س) = $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{د (س + هـ) − د (س)}}{\text{هـ}}$ = $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{حا (س + هـ) − حا س}}{\text{هـ}}$

= $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{حا س حتا هـ + حتا س حا هـ − حا س}}{\text{هـ}}$

= $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نها}} \left[\frac{\text{حتا س حا هـ}}{\text{هـ}} + \frac{\text{حا س (حتا هـ − ١)}}{\text{هـ}} \right]$

= حتا س $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{حا هـ}}{\text{هـ}}$ + حا س × $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{حتا هـ − ١}}{\text{هـ}}$

= حتا س × ١ + حا س × ٠ = حتا س **أى أن :** $\boxed{\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{حتا س}}$

وبالمثل يمكن استخدام التعريف فى إثبات أن :

إذا كان : ص = حتا س فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − حا س

ثم باستخدام قواعد الاشتقاق يمكننا إثبات اشتقاق باقى الدوال المثلثية.

وبصفة عامة

١ إذا كانت : $\text{ص} = \text{حا ع}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{حتا ع} \cdot \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

٢ إذا كانت : $\text{ص} = \text{حتا ع}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\,\text{حا ع} \cdot \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

٣ إذا كانت : $\text{ص} = \text{ظا ع}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^{٢}\,\text{ع} \cdot \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

٤ إذا كانت : $\text{ص} = \text{ظتا ع}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (-\,\text{قتا}^{٢}\,\text{ع}) \cdot \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

٥ إذا كانت : $\text{ص} = \text{قا ع}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (\text{قا ع ظا ع}) \cdot \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

٦ إذا كانت : $\text{ص} = \text{قتا ع}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (-\,\text{قتا ع ظتا ع}) \cdot \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

حيث ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى المتغير س

مثال ١

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

١ $\text{ص} = \text{حا } ٣\text{س}$

٢ $\text{ص} = ٢\,\text{حتا}\,(٤ - \text{س})$

٣ $\text{ص} = \text{ظتا}\,(٢\text{س} - ١)$

٤ $\text{ص} = \text{قا}\,(٣\text{س} + ٥)$

٥ $\text{ص} = \text{حا}\,(٢\text{س} + \pi) + \text{ظا } ٣\text{س}$

٦ $\text{ص} = \text{س}^{٤} + \text{ظا}\,(٥\text{س} - ٢)$

٧ $\text{ص} = \text{حا}\,(٣\text{س}^{٣} + ٢\text{س} + ١)$

٨ $\text{ص} = \text{حتا}\,\frac{\text{س}}{٣} + \text{حتا}\,\frac{\pi}{٣}$

٩ $\text{ص} = ٥\text{س}^{٢} + \text{قتا}\,\sqrt{\text{س}}$

الحل

١ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{حتا } ٣\text{س} \times ٣ = ٣\,\text{حتا } ٣\text{س}$

٢ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢ \times -\,\text{حا}\,(٤ - \text{س}) \times -١ = ٢\,\text{حا}\,(٤ - \text{س})$

٣ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\,\text{قتا}^{٢}\,(٢\text{س} - ١) \times ٢ = -٢\,\text{قتا}^{٢}\,(٢\text{س} - ١)$

٤ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}\,(٣\text{س} + ٥)\,\text{ظا}\,(٣\text{س} + ٥) \times ٣ = ٣\,\text{قا}\,(٣\text{س} + ٥)\,\text{ظا}\,(٣\text{س} + ٥)$

٥ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{حتا}\,(٢\text{س} + \pi) \times ٢ + \text{قا}^{٢}\,٣\text{س} \times ٣ = ٢\,\text{حتا}\,(٢\text{س} + \pi) + ٣\,\text{قا}^{٢}\,٣\text{س}$

٦ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٤\text{س}^{٣} + \text{قا}^{٢}\,(٥\text{س} - ٢) \times ٥ = ٤\text{س}^{٣} + ٥\,\text{قا}^{٢}\,(٥\text{س} - ٢)$

٧ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{حتا}\,(٣\text{س}^{٣} + ٢\text{س} + ١) \times (٩\text{س}^{٢} + ٢)$

$= (٩\text{س}^{٢} + ٢)\,\text{حتا}\,(٣\text{س}^{٣} + ٢\text{س} + ١)$

٨ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\,\text{حا}\,\frac{\text{س}}{٣} \times \frac{١}{٣} + \text{صفر} = -\,\frac{١}{٣}\,\text{حا}\,\frac{\text{س}}{٣}$

٩ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١٠\text{س} - \text{قتا}\,\sqrt{\text{س}}\;\text{ظتا}\,\sqrt{\text{س}} \times \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} = ١٠\text{س} - \frac{\text{قتا}\,\sqrt{\text{س}}\;\text{ظتا}\,\sqrt{\text{س}}}{٢\sqrt{\text{س}}}$

لاحظ أن :

$\text{حتا}\,\frac{\pi}{٣} = \frac{١}{٢} = \text{مقدار ثابت}$

$\therefore$ المشتقة = صفر

مثال ٢

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

١ ص = حا ٢ س حتا ٣ س

٢ ص = $\dfrac{\text{حا (٢ س + ١)}}{\text{حتا (٣ س − ١)}}$

٣ ص = س^{٣} طا ٥ س

٤ ص = (٥ − ٣ قتا س)^{٤}

٥ ص = حتا^{٢} (٢ س − ١)

٦ ص = طا^{٣} (١ + ٥ س + ٣ س^{٢})

الحــل

١ $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = حا ٢ س × − حا ٣ س × ٣ + حتا ٣ س × حتا ٢ س × ٢

= − ٣ حا ٢ س حا ٣ س + ٢ حتا ٢ س حتا ٣ س

٢ $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\dfrac{\text{حتا (٣ س − ١) × حتا (٢ س + ١) × ٢ − حا (٢ س + ١) × − حا (٣ س − ١) × ٣}}{\text{حتا}^{٢}\text{ (٣ س − ١)}}$

= $\dfrac{\text{٢ حتا (٣ س − ١) حتا (٢ س + ١) + ٣ حا (٢ س + ١) حا (٣ س − ١)}}{\text{حتا}^{٢}\text{ (٣ س − ١)}}$

٣ $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = س^{٣} × قا^{٢} ٥ س × ٥ + طا ٥ س × ٣ س^{٢} = ٥ س^{٣} قا^{٢} ٥ س + ٣ س^{٢} طا ٥ س

٤ $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٤ (٥ − ٣ قتا س)^{٣} × [٣ قتا س طتا س] = ١٢ قتا س طتا س (٥ − ٣ قتا س)^{٣}

٥ ∵ ص = (حتا (٢ س − ١))^{٢}

∴ $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ حتا (٢ س − ١) × − حا (٢ س − ١) × ٢ = − ٤ حتا (٢ س − ١) حا (٢ س − ١)

٦ ∵ ص = (طا (١ + ٥ س + ٣ س^{٢}))^{٣}

∴ $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ طا^{٢} (١ + ٥ س + ٣ س^{٢}) × قا^{٢} (١ + ٥ س + ٣ س^{٢}) × (٥ + ٦ س)

= ٣ (٥ + ٦ س) طا^{٢} (١ + ٥ س + ٣ س^{٢}) قا^{٢} (١ + ٥ س + ٣ س^{٢})

مثال ٣

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

١ ص = طا ٦ س^{٢}

٢ ص = طا^{٢} ٦ س

٣ ص = حتا (طا ٤ س)

٤ ص = ٤ س حا س حتا س حتا ٢ س

٥ ص = $\dfrac{\text{طا س + }\sqrt{٣}}{\text{١ − }\sqrt{٣}\text{ طا س}}$

٦ ص = $\dfrac{\text{١ − طتا س}}{\text{١ + طتا س}}$

الحل

١) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^{٢}\,(\text{٦ س}^{٢}) \times (\text{١٢ س}) = \text{١٢ س قا}^{٢}\ \text{٦ س}^{٢}$

٢) $\because\ \text{ص} = (\text{طا ٦ س})^{٢}$

$\therefore\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢}\,(\text{طا ٦ س}) \times \text{قا}^{٢}\ \text{٦ س} \times \text{٦} = \text{١٢ طا ٦ س قا}^{٢}\ \text{٦ س}$

٣) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{جا}\,(\text{طا ٤ س}) \times \text{قا}^{٢}\ \text{٤ س} \times \text{٤} = -\text{٤ قا}^{٢}\ \text{٤ س جا}\,(\text{طا ٤ س})$

٤) $\because\ \text{ص} = \text{٢ س} \times (\text{٢ جا س جتا س})\ \text{جتا ٢ س} = \text{٢ س جا ٢ س جتا ٢ س}$

$= \text{س} \times \text{٢ جا ٢ س جتا ٢ س} = \text{س جا ٤ س}$

$\therefore\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س} \times \text{جتا ٤ س} \times \text{٤} + \text{جا ٤ س} \times \text{١} = \text{٤ س جتا ٤ س} + \text{جا ٤ س}$

٥) $\because\ \text{طا}\ \frac{\pi}{\text{٣}} = \sqrt{\text{٣}}$ $\quad \therefore\ \text{ص} = \frac{\text{طا س} + \text{طا}\ \frac{\pi}{\text{٣}}}{\text{١} - \text{طا س طا}\ \frac{\pi}{\text{٣}}} = \text{طا}\left(\text{س} + \frac{\pi}{\text{٣}}\right)$

$\therefore\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^{٢}\left(\text{س} + \frac{\pi}{\text{٣}}\right)$

٦) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{١} + \text{طتا س}) \times (\text{قتا}^{٢}\ \text{س}) - (\text{١} - \text{طتا س})\,(-\text{قتا}^{٢}\ \text{س})}{(\text{١} + \text{طتا س})^{٢}}$

$= \frac{\text{قتا}^{٢}\ \text{س}\,(\text{١} + \text{طتا س} + \text{١} - \text{طتا س})}{(\text{١} + \text{طتا س})^{٢}} = \frac{\text{٢ قتا}^{٢}\ \text{س}}{(\text{١} + \text{طتا س})^{٢}}$

مثال ٤

إذا كانت : $\text{ص} = \frac{\text{جتا س}}{\text{١} - \text{جا س}}$ **فاثبت أن :** $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{١}}{\text{١} - \text{جا س}}$

الحل

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{جا س} \times (\text{١} - \text{جا س}) - \text{جتا س} \times (-\text{جتا س})}{(\text{١} - \text{جا س})^{٢}} = \frac{-\text{جا س} + \text{جا}^{٢}\ \text{س} + \text{جتا}^{٢}\ \text{س}}{(\text{١} - \text{جا س})^{٢}}$

$= \frac{-\text{جا س} + \text{١}}{(\text{١} - \text{جا س})^{٢}} = \frac{\text{١} - \text{جا س}}{(\text{١} - \text{جا س})^{٢}} = \frac{\text{١}}{\text{١} - \text{جا س}}$

مثال ٥

إذا كانت : $\text{ص} = \sqrt{\text{٧} - \text{٣ ع}}$ ، $\text{ع} = \text{طا}\ \frac{\text{س}}{\text{٢}}$ **فاثبت أن :** $\text{٤}\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \text{٣} = \text{٠}$ عند $\text{س} = \frac{\pi}{\text{٢}}$

الحل

$\because\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{-\text{٣}}{\text{٢}\sqrt{\text{٧} - \text{٣ ع}}}$ ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\ \text{قا}^{٢}\ \frac{\text{س}}{\text{٢}}$

$\therefore\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{٣}}{\text{٢}\sqrt{\text{٧} - \text{٣ ع}}} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}}\ \text{قا}^{٢}\ \frac{\text{س}}{\text{٢}} = \frac{-\text{٣ قا}^{٢}\ \frac{\text{س}}{\text{٢}}}{\text{٤}\sqrt{\text{٧} - \text{٣ ع}}}$ وبالتعويض عن ع

$= \frac{-\text{٣ قا}^{٢}\ \frac{\text{س}}{\text{٢}}}{\text{٤}\sqrt{\text{٧} - \text{٣ طا}\ \frac{\text{س}}{\text{٢}}}}$

$$\therefore \left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\text{س}=\frac{\pi}{٢}} = \frac{-٣\ \text{قا}^{٢}\ \frac{\pi}{٤}}{٤\sqrt{٧ - ٣\ \text{طا}\ \frac{\pi}{٤}}} = \frac{-٣ \times ٢}{٤\sqrt{٧ - ٣ \times ١}} = \frac{-٣}{٤}$$

$$\therefore ٤\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٣ = ٤ \times \frac{-٣}{٤} + ٣ = \text{صفر}$$

مثال ٦

إذا كانت : $\text{ص} = \text{قتا}^{\text{ن}}\ \text{س}$ **أثبت أن :** $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \text{ن ص طتا س} = ٠$

الحل

$$\because \text{ص} = \text{قتا}^{\text{ن}}\ \text{س} = (\text{قتا س})^{\text{ن}}$$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ن} (\text{قتا س})^{\text{ن}-١} \times (-\ \text{قتا س طتا س}) = -\ \text{ن} (\text{قتا س})^{\text{ن}}\ \text{طتا س}$$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \text{ن}\ \text{قتا}^{\text{ن}}\ \text{س طتا س} = ٠ \qquad \therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \text{ن ص طتا س} = ٠$$

تمارين 13

على مشتقات الدوال المثلثية

من أسئلة الكتاب المدرسي ● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : د (س) = طا (٥ س − π) فإن : دَ $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٥ $\sqrt{2}$ (جـ) ١٠ (د) ١٠ $\sqrt{3}$

(٢) إذا كانت : ص = قتا ٢ س فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند س = $\frac{\pi}{6}$

(أ) $\frac{-3}{4}$ (ب) $\frac{-4}{3}$ (جـ) − $\frac{1}{2}$ (د) $\sqrt{3}$

(٣) $\frac{ء}{ءس}$ (جتا² س + جا² س) = ...

(أ) ١ (ب) صفر

(جـ) س (د) ٢ (جتا س + جا س)

(٤) $\frac{ء}{ءس}$ $\left(طا \frac{\pi}{4}\right)$ = ...

(أ) ١ (ب) قا² $\frac{\pi}{4}$ (جـ) صفر (د) ٢

(٥) إذا كانت : ص = طا (٩ − ٧ س) فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) قا² (٩ − ٧ س) (ب) قا² (−٧)

(جـ) −٧ قا² (٩ − ٧ س) (د) ٢ قا² (٩ − ٧ س)

(٦) إذا كانت : د (س) = ظتا (٥ س − π) فإن : دَ $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ = ...

(أ) ٥ $\sqrt{2}$ (ب) −٥ $\sqrt{2}$ (جـ) ١٠ (د) −١٠

(٧) إذا كانت : ص = قا $\left(\frac{\pi}{4} س\right)$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) $\frac{\pi}{4}$ قا $\left(\frac{\pi}{4} س\right)$ طا $\left(\frac{\pi}{4} س\right)$ (ب) − $\frac{\pi}{4}$ قا $\left(\frac{\pi}{4} س\right)$ طا $\left(\frac{\pi}{4} س\right)$

(جـ) $\frac{\pi}{4}$ قا $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ طا $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ (د) قا $\left(\frac{\pi}{4} س\right)$ طا $\left(\frac{\pi}{4} س\right)$

(٨) إذا كانت : ص = جا ٤ س فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) ٤ جا ٣ س (ب) ٤ جا ٤ س (جـ) ٤ جتا ٤ س (د) −٤ جتا ٤ س

(٩) إذا كانت : ص = جتا $\frac{1}{2}$ س فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) − جا $\frac{1}{2}$ س (ب) − $\frac{1}{2}$ جا $\frac{1}{2}$ س (جـ) $\frac{1}{2}$ جتا س (د) $\frac{1}{2}$ جتا $\frac{1}{2}$ س

(١٠) إذا كانت : ص = ٢ جا (٣ س + ٤) فإن : صَ = ...

(أ) ٦ جتا (٣ س + ٤)　　(ب) ٢ جتا (٣ س + ٤)

(جـ) ٦ جتا (٣ س)　　(د) −٦ جتا (٣ س + ٤)

(١١) إذا كان : ص = جا (س^{٢} + ٣) فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ...

(أ) ٢ جتا (س^{٢} + ٣)　　(ب) ٢ جتا س

(جـ) −٢ جتا س　　(د) ٢ س جتا (س^{٢} + ٣)

(١٢) إذا كانت : ص = س^{٤} + جتا $\frac{\pi}{٢}$ − جا $\frac{\text{س}}{٣}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ...

(أ) ٤ س^{٣} − جا $\frac{\pi}{٢}$ − $\frac{١}{٣}$ جتا $\frac{\text{س}}{٣}$　　(ب) ٤ س^{٣} − $\frac{١}{٣}$ جتا $\frac{\text{س}}{٣}$

(جـ) ٤ س^{٣} − جا $\frac{\pi}{٢}$ + $\frac{١}{٣}$ جتا $\frac{\text{س}}{٣}$　　(د) ٤ س^{٣} − $\frac{١}{٣}$ جا $\frac{\text{س}}{٣}$

(١٣) إذا كان : ص = جتا $\left(\frac{٢}{\text{س}}\right)$ فإن : صَ = ...

(أ) − جتا $\left(\frac{٢}{\text{س}}\right)$　　(ب) $\frac{-٢}{\text{س}^{٢}}$ جا $\left(\frac{٢}{\text{س}}\right)$　　(جـ) $\frac{٢}{\text{س}^{٢}}$ جا $\left(\frac{٢}{\text{س}}\right)$　　(د) $\frac{٢}{\text{س}}$ جا $\left(\frac{٢}{\text{س}}\right)$

(١٤) إذا كان : د (س) = جا^{٢} س فإن : دَ (س) = ...

(أ) جتا^{٢} س　　(ب) ٢ جتا^{٢} س　　(جـ) ٢ جا س　　(د) ٢ جا س جتا س

(١٥) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (ظا ٣ س^{٢}) = ...

(أ) ٦ س ظا ٣ س^{٢} جا^{٢} ٣ س^{٢}　　(ب) ٦ ظا س قا^{٢} ٣ س

(جـ) ٦ س قا^{٢} ٣ س^{٢}　　(د) قا^{٢} ٦ س

(١٦) إذا كانت : ص = س^{٣} + جتا ٣ س + $\frac{١}{٤}$ جا ٤ س فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ... عند س = صفر

(أ) صفر　　(ب) ١　　(جـ) ٣　　(د) ٤

(١٧) إذا كانت : ص = جتا $\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)$ + جا (π − ٢ س) فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ...

(أ) جا س + جا ٢ س　　(ب) جا س + ٢ جا ٢ س

(جـ) جتا س + جتا ٢ س　　(د) جتا س + ٢ جتا ٢ س

(١٨) إذا كانت : ص = جا س فإن : صَ = ...

(أ) ص جتا س　　(ب) ص ظا س　　(جـ) ص ظتا س　　(د) ص جا س

(١٩) إذا كانت : ص = س جا ٢ س فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ...

(أ) س جتا ٢ س + جا ٢ س　　(ب) ٢ س جتا ٢ س + جا ٢ س

(جـ) −٢ س جتا ٢ س + جا ٢ س　　(د) − س جتا ٢ س + جا ٢ س

فهم   تطبيق   مستويات عليا

(٢٠) $\frac{ء}{ءس}$ ($\frac{١}{٢}$ ظتا ٢ س جا ٢ س) = ...

(أ) − جا ٢ س　　(ب) − جتا ٢ س　　(جـ) جا ٢ س　　(د) جتا ٢ س

(٢١) $\frac{ء}{ءس}$ (٢ جتا^{٢} س − ١) = ...

(أ) جا ٢ س　　(ب) جتا ٢ س　　(جـ) −٢ جا ٢ س　　(د) −٢ جتا ٢ س

(٢٢) إذا كانت : ص = ٢ س ظا ٣ س　فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{...............}{\text{جتا}^{٢}\ ٣\ \text{س}}$

(أ) س − جا ٦ س　　(ب) ٢ س + جا ٣ س

(جـ) ٢ س + جا ٦ س　　(د) ٦ س + جا ٦ س

(٢٣) إذا كانت : ص = ٢ جا $\frac{١}{٢}$ س − س جتا $\frac{١}{٢}$ س　فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند س = π

(أ) صفر　　(ب) ١　　(جـ) $\frac{\pi}{٢}$　　(د) π

(٢٤) إذا كانت : ص = $\frac{\text{س}}{\text{جتا}\ ٣\ \text{س}}$　فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند س = $\frac{\pi}{٣}$

(أ) $\frac{١}{٣\pi}$　　(ب) ١　　(جـ) $\frac{\pi}{٣}$　　(د) −١

(٢٥) إذا كان : ص = جتا س　فإن : ص − صَ = ...

(أ) جا س − جتا س　　(ب) جتا س − جا س　　(جـ) جا س + جتا س　　(د) صفر

(٢٦) إذا كان : ص = جا س　فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) جا $\left(\frac{\pi}{٢} + \text{س}\right)$　　(ب) جا $\left(\text{س} - \frac{\pi}{٢}\right)$　　(جـ) جا $\left(\frac{٣\pi}{٢} + \text{س}\right)$　　(د) جا $\left(\frac{٣\pi}{٢} - \text{س}\right)$

(٢٧) إذا كانت : ص = جا^{٢} (٢٧٠° − س)　فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) جا ٢ س　　(ب) − جا ٢ س　　(جـ) جتا ٢ س　　(د) − جتا ٢ س

(٢٨) إذا كان : ص = $\frac{\text{جا س}}{\text{١ + جتا س}}$　فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) ص جا س　　(ب) ص جتا س　　(جـ) ص قتا س　　(د) ص قا س

(٢٩) إذا كانت : ص = ظا س　فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) ١ + ص　　(ب) ١ − ص　　(جـ) ١ + ص^{٢}　　(د) ١ − ص^{٢}

(٣٠) إذا كانت : ص = (جا س + جتا س)^{٢}　فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) ٢ جا ٢ س　　(ب) ٢ جتا ٢ س　　(جـ) ٢ جا س　　(د) جتا س − جا س

(٣١) إذا كانت : ص = جا^{٢} س − جتا^{٢} س　فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) ٢ جا ٢ س　　(ب) ٢ جتا ٢ س

(جـ) ٢ جا س − ٢ جتا س　　(د) جتا س − جا س

(٣٢) إذا كانت : ص = ظا^{2} ٣ س فإن : صَ = ...

(أ) ٢ ظا ٣ س (ب) ٦ ظا ٣ س

(جـ) ٦ ظا ٣ س قا^{2} ٣ س (د) ٣ قا^{4} ٣ س

(٣٣) إذا كانت : ص = جتا $(\sqrt{\text{س}})$ فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ... عند س = $\frac{1}{4}\pi^{2}$

(أ) $\frac{1}{\pi}$ (ب) $\frac{-1}{\pi}$ (جـ) $\frac{-2}{\pi}$ (د) $\frac{2}{\pi}$

(٣٤) إذا كانت : ص = جا^{3} ٤ س فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ... عند س = $\frac{\pi}{16}$

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٣ $\sqrt{2}$ (د) ٦ $\sqrt{2}$

(٣٥) إذا كان : س ص + جا س = ٥ فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ... عند س = $\frac{\pi}{2}$

(أ) $\frac{-4}{\pi}$ (ب) $\frac{-8}{\pi}$ (جـ) $\frac{-4}{\pi^{2}}$ (د) $\frac{-16}{\pi^{2}}$

(٣٦) إذا كانت : ص = س^{2} جا س فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ... عند س = $\frac{\pi}{2}$

(أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) π (جـ) $\frac{3\pi}{2}$ (د) $\frac{-\pi}{2}$

(٣٧) $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ (جا س $-\frac{1}{3}$ جا^{3} س) = ...

(أ) جا^{3} س (ب) $-$ جا^{3} س (جـ) جتا^{3} س (د) $-$ جتا^{3} س

(٣٨) إذا كانت : ص = ٢ جا $\frac{\text{س}}{2}$ جتا $\frac{\pi}{2}$ فإن : صَ = ...

(أ) $-$ جا س (ب) جتا س (جـ) جا س (د) صفر

(٣٩) إذا كانت : ص = ١٦ جا $\frac{\text{س}}{4}$ جتا $\frac{\text{س}}{4}$ جتا $\frac{\text{س}}{2}$ جتا س فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ جا ٢ س (ب) جتا ٢ س (جـ) ٢ جا ٢ س (د) ٤ جتا ٢ س

(٤٠) إذا كانت : د (س) = $\frac{\text{جتا ٢ س}}{\text{جا س} - \text{جتا س}}$ فإن : دَ $\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ = ...

(أ) ٢ $\sqrt{2}$ (ب) $\sqrt{2}$ (جـ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (د) صفر

(٤١) إذا كانت : ص = $\sqrt{\text{جتا (٥ س)}}$ فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ...

(أ) $\frac{-\text{٥ جا ٥ س}}{2\sqrt{\text{جتا (٥ س)}}}$ (ب) $\frac{-\text{جا (٥ س)}}{2\sqrt{\text{جتا (٥ س)}}}$ (جـ) $\frac{5}{2}$ (جتا ٥ س$)^{-\frac{1}{2}}$ (د) $\frac{1}{2}$ (جتا ٥ س$)^{-\frac{1}{2}}$

(٤٢) إذا كانت : ص = $\frac{\text{جا}^{2}\text{ س}}{1 + \text{جتا س}}$ فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ...

(أ) ١ $-$ جتا س (ب) جا^{2} س (جـ) جا س (د) ١ + جتا س

(٤٣) إذا كانت : ص = جا (جتا^{2} س) فإن : صَ = ...

(أ) جتا (جتا^{2} س) (ب) جتا (جتا^{2} س) × ٢ جتا س

(جـ) جتا^{3} س × $-$٢ جتا س (د) $-$٢ جا س جتا س جتا (جتا^{2} س)

(٤٤) إذا كانت : ص = $\frac{\text{س}}{\text{جا س}}$ فإن : $\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\text{س} = \frac{3\pi}{2}}$ = ...

(أ) $\frac{3}{2}$ (ب) جتا $\frac{3\pi}{2}$ (جـ) جتا π (د) ١

(٤٥) إذا كانت : د (س) = $\sqrt{\text{جا س} + \text{جتا س}}$ فإن : دَ (٠) = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (جـ) $\frac{1}{4}$ (د) −١

(٤٦) إذا كانت : د (س) = جا^{4} س فإن : دَ $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) ٤ (جـ) $\frac{1}{4}$ (د) ١

(٤٧) مشتقة ١ − جتا^{2} س بالنسبة إلى جتا^{2} س هى ....

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) طا س (د) − طا س

(٤٨) إذا كان : د (س) = أ جا س ، ر (س) = $\frac{\text{طا س}}{\text{ب}}$ حيث كل من أ ، ب ثوابت
وكان دَ (π) = رَ $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ فإن : أ ب = ...

(أ) −٤ (ب) −$\frac{1}{4}$ (جـ) $\frac{1}{4}$ (د) ٤

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

(١) ص = ٥ طتا (٣ − π س)
(٢) ص = جتا (٥ س + ٣)
(٣) ص = ٣ طا (٢ س + ٣)
(٤) ص = طا (−٥ س^{2} + ١٩)
(٥) ص = ٢ جتا (٤ − ٣ س^{2})
(٦) ص = س − جا ٢ س + طا ٥ س
(٧) ص = جا $\frac{\pi}{4}$ − ٧ جا س
(٨) ص = جتا (٢ س − ١) + جا (٤ − ٥ س)
(٩) ص = طا $\left(\sqrt{\text{س}}\right)$
(١٠) ص = جا $\left(\frac{1}{\text{س}^{2}}\right)$
(١١) ص = ٣ س^{5} + ٤ طتا س
(١٢) ص = ٣ قا ٢ س + ٢ قتا ٣ س

٢ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

(١) ص = س جا (٣ س − ٢)
(٢) ص = س^{2} جا ٢ س
(٣) ص = س جا س − ٣ جتا س
(٤) ص = س قا ٣ س
(٥) ص = (٣ س + ٤) قتا س
(٦) ص = س طا (٣ س) + جتا س
(٧) ص = س جا س + $\sqrt{\text{س}}$
(٨) ص = ٢ جا ٢ س جتا ٣ س
(٩) ص = ٢ جا (٢ س + ١) جتا (٢ س + ١)
(١٠) ص = س^{2} جا (٢ س^{2} + ٥)
(١١) ص = $\frac{\text{طا س}}{\text{س}}$
(١٢) ص = $\frac{\text{جا ٢ س}}{\text{جتا س}}$
(١٣) ص = $\frac{\text{١ + جتا ٢ س}}{\text{١ − جتا ٢ س}}$
(١٤) ص = $\frac{\text{طتا س}}{\text{س}}$
(١٥) ص = $\frac{\text{قتا س}}{\text{١ + قتا س}}$

٣ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

(١) ص = $\text{طا}^{٤}\ \frac{١}{٢}$ س

(٢) ص = $\text{حتا}^{٢}$ (٤ $\text{س}^{٢}$ − ٧)

(٣) ص = ٤ $\text{حتا}^{٥}$ س

(٤) ص = ظتا (٧ $\text{س}^{٢}$) + $\text{ظتا}^{٢}$ (٧ س)

(٥) ص = $\text{طا}^{٣}$ (٤ س − ٧ − ٢ $\text{س}^{٣}$)

(٦) ص = س $\sqrt{\text{حا س}}$

(٧) ص = ٢ حتا س حتا $\frac{\text{س}}{٢}$ حا $\frac{\text{س}}{٢}$

(٨) ص = $\frac{\text{حا ٢ س}}{\text{١ − حا ٢ س}}$

(٩) س = ص حتا س

(١٠) ص = $\text{س}^{٥}$ حتا $\frac{\pi}{\text{س}}$

(١١) $\text{س}^{٢}$ = ص قا (٣ س − ٢)

(١٢) ص = $\sqrt{\text{١ + قتا س}}$

(١٣) ص = $\text{قا}^{٧}$ س

(١٤) ص = $\text{قا}^{٢}$ س − ١

(١٥) ص = $\sqrt{\text{طا}^{٥}\text{ س}}$

(١٦) ص = $\frac{\text{طا س + طا}\ \frac{\pi}{٤}}{\text{١ − طا س طا}\ \frac{\pi}{٤}}$

---

٤ أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ فى كل مما يأتى :

(١) ص = حا ٢ س حتا س عند النقطة (π ، ٠) «−٢»

(٢) ص = (س − ٥) حتا $\frac{\pi\text{ س}}{٨}$ عند س = ٤ «$\frac{\pi}{٨}$»

(٣) ص = حا س طا ٤ س عند س = $\frac{\pi}{٤}$ «٢ $\sqrt{٢}$»

(٤) ص = $\sqrt{\text{١ + حتا س}}$ عند س = $\frac{\pi}{٢}$ «−$\frac{١}{٢}$»

(٥) ص = $\frac{\text{س}^{٣}}{\text{حتا س}}$ عند س = π «−٣ $\pi^{٢}$»

(٦) ص = ٢ ظتا س + $\sqrt{٢}$ قا س عند س = $\frac{\pi}{٤}$ «−٢»

(٧) ص = ٣ طا س − $\text{قتا}^{٢}$ س عند س = $\frac{٣\pi}{٤}$ «٢»

(٨) ص = $(\text{حا ٢ س − حتا ٤ س})^{٤}$ عند س = صفر «−٨»

---

٥ إذا كانت : ص = ٢ س حا س حتا س أثبت أن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = حا ٢ س + ٢ س حتا ٢ س

---

٦ إذا كانت : ص = س حا س أثبت أن : س $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - \text{س حتا س}\right)$ = ص

---

٧ إذا كانت : ص = $\frac{١}{٣}$ $\text{حتا}^{٣}$ س − حتا س أثبت أن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\text{حا}^{٣}$ س

---

٨ إذا كانت : ص = $\frac{\text{حا س}}{\text{١ + حتا س}}$ أثبت أن : (١ + حتا س) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ١

٩ إذا كانت : $\text{ص} = \frac{\text{حاس}}{\text{حاس} + \text{حتاس}}$ أثبت أن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{١ + \text{حا ٢س}}$

١٠ إذا كانت : $\text{ص} = \frac{١ + \text{ظاس}}{١ - \text{ظاس}}$ أثبت أن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^{٢} (\text{س} + ٤٥^\circ)$

١١ إذا كانت : $\text{ص} = \frac{\text{حاس}}{١ + \text{حاس}}$ أثبت أن : $\frac{١}{\text{ص}^{٢}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ظتاس قتاس}$

١٢ إذا كانت : $\text{ص} = \frac{١ + \text{حا}^{٢}\text{س}}{١ - \text{حا}^{٢}\text{س}}$ أثبت أن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٤ \text{ ظاس قا}^{٢}\text{س}$

١٣ إذا كانت : $٢\text{س} + \text{ص} = \text{حا ٢س}$ أثبت أن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٤ \text{ حا}^{٢}\text{س} = \text{صفر}$

١٤ إذا كانت : $\text{ص} = \text{حاس} + \text{حتاس}$ أثبت أن : $(\text{ص}')^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٢$

١٥ إذا كانت : $\text{ص} = \text{قتاس} + \text{ظتاس}$ أثبت أن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \text{ص قتاس} = ٠$

١٦ إذا كانت : $\text{ص} = \text{قا}^{\text{ن}}(\text{س})$ أثبت أن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ن ص ظاس}$

١٧ إذا كان : $\text{ص} = \text{حا}^{٢}\text{س} - \text{حتا ٢س} - ٤\text{س}$

(١) أوجد معدل تغير ص بالنسبة للمتغير س

(٢) أوجد قيم $\text{س} \in]٠ ، \pi[$ عندما يكون معدل التغير مساويًا -١ «$\frac{\pi}{٤}$»

١٨ إذا كانت : $\text{ص} = \text{قا ٤س}$ أوجد معدل تغير ص بالنسبة إلى س عندما $\text{س} = \frac{\pi}{٤}$ «صفر»

١٩ أثبت أن :

(١) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (\text{حا}^{٢}\text{س}) = -\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (\text{حتا}^{٢}\text{س})$

(٢) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (\text{حا}^{٢}\text{س} + \text{حتا}^{٢}\text{س}) = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (\text{قا}^{٢}\text{س} - \text{ظا}^{٢}\text{س})$

(٣) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \left(\frac{١}{٢} \text{ظاس} + \text{حا ٢س}\right) = \text{حا ٢س}$

٢٠ أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ فى كل مما يأتى :

(١) $\text{ص} = \text{ع} - \text{حا ع}$ ، $\text{ع} = ٥\text{س} + \pi$ عند $\text{س} = ٠$ «١٠»

(٢) $\text{ص} = (٣\text{ع} + ١)^{٥}$ ، $\text{ع} = \frac{١}{٣} \text{حتا ٢س}$ عند $\text{س} = \frac{\pi}{٤}$ «-١٠»

(٣) $\text{ص} = \sqrt{٤ - ٢\text{ع}}$ ، $\text{ع} = \text{ظا ٢س}$ عند $\text{س} = \frac{\pi}{٨}$ «$-٢\sqrt{٢}$»

(٤) $\text{ص} = \text{ظتا} \frac{\pi}{٦} \text{ع}$ ، $\text{ع} = ٣\sqrt{\text{س}}$ عند $\text{س} = ١$ «$-\frac{\pi}{٤}$»

٢١ إذا كانت : ص = $\sqrt{\text{٥ − ٢ ع}}$ ، ع = قا ٢ س

أثبت أن : $\sqrt{٣}\ \dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ + ١٢ = ٠ عند س = $\dfrac{\pi}{٦}$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

① إذا كان : حا س حتا ص − حا ص حتا س = $\dfrac{١}{٢}$ فإن : $\dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ...

(أ) صفر (ب) حا (س + ص) (جـ) حتا (س + ص) (د) ١

② إذا كان : ص = $\dfrac{\text{٢ طا س}}{\text{١ − طا}^{٢}\text{ س}}$ فإن : $\dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ...

(أ) ٢ طا ٢ س (ب) ٢ قا^{٢} ٢ س (جـ) ١ (د) صفر

③ $\dfrac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ [س^{٢} + $\dfrac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ (س + حا س)] = ...

(أ) حتا ٢ س − حا س (ب) ٢ س − حا س

(جـ) ٢ س + ١ + حتا س (د) ٢ س + حا س

④ نهـــا$_{\text{س} \leftarrow \text{أ}}$ $\dfrac{\text{حا س − حا أ}}{\text{س − أ}}$ = ...

(أ) حتا س (ب) ١ (جـ) حتا أ (د) حا (س − أ)

⑤ نهـــا$_{\text{هـ} \leftarrow ٠}$ $\dfrac{\text{حا}\left(\frac{\pi}{٤} + \text{هـ}\right) - \text{حا}\left(\frac{\pi}{٤}\right)}{\text{هـ}}$ = ...

(أ) $\dfrac{\text{حا هـ}}{\text{هـ}}$ (ب) حا هـ (جـ) حتا هـ (د) حتا $\dfrac{\pi}{٤}$

⑥ إذا كانت : ص = حتا $\sqrt{\text{س}}$ فإن : نهـــا$_{\text{س} \leftarrow ٠}$ $\left(\dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right)$ = ...

(أ) − حا $\sqrt{\text{س}}$ (ب) حتا $\sqrt{\text{س}}$ (جـ) $\dfrac{-١}{٢}$ (د) $\dfrac{١}{٢}$

---

٢ إذا كانت : ص = ع^{٤} − ٢ ع^{٢} + ١ ، ع = حا ٤ س **أثبت أن :** $\dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ + ١٦ ص طا ٤ س = ٠

---

٣ أوجد $\dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ إذا كان ص = حا س حيث س مقيسة بالتقدير الستينى.

الدرس 6

تطبيقات على المشتقة

تذكر أن :

أولًا ميل الخط المستقيم

[١] ميل الخط المستقيم الذى معادلته : $\text{أ}\text{س} + \text{ب}\text{ص} + \text{حـ} = ٠$ هو $\boxed{\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-\text{أ}}{\text{ب}}}$

فمثلًا : ميل المستقيم الذى معادلته : $٥\text{ س} + ٢\text{ ص} + ٧ = ٠$ هو $\frac{-٥}{٢}$

[٢] ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين : $(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)$ ، $(\text{س}_٢ ، \text{ص}_٢)$ يساوى $\boxed{\frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}}$

فمثلًا : ميل المستقيم المار بالنقطتين $(٢ ، -٣)$ ، $(٤ ، ١)$ هو $\frac{١ + ٣}{٤ - ٢} = ٢$

[٣] ميل المستقيم = ظا هـ

حيث (هـ) قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

فمثلًا : ميل المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هو ظا $١٣٥^\circ = -١$

[٤] إذا كان : $\overrightarrow{\text{ى}} = (\text{أ} ، \text{ب})$ متجه اتجاه لمستقيم فإن ميل هذا المستقيم = $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

فمثلًا : إذا كان $(٢ ، ٣)$ متجه اتجاه لمستقيم فإن ميل هذا المستقيم = $\frac{٣}{٢}$

[٥] ميل المستقيم يكون موجبًا إذا كان يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

[٦] ميل المستقيم يكون سالبًا إذا كان يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

[٧] ميل محور السينات = ميل أى مستقيم أفقى (موازى لمحور السينات) = صفر

[٨] ميل كل من محور الصادات وأى مستقيم رأسى (موازى لمحور الصادات) يكون غير معرف لأن المقام = صفر

ثانيًا العلاقة بين المستقيمين المتوازيين والمستقيمين المتعامدين

إذا كان : $ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمين ميلاهما $م_١$ ، $م_٢$ على الترتيب فإن :

١ $ل_١ // ل_٢ \Longleftrightarrow م_١ = م_٢$

٢ $ل_١ \perp ل_٢ \Longleftrightarrow م_١ \times م_٢ = -١$ (ما لم يوازى أحدهما أحد المحورين)

فمثلًا : إذا كان ميل المستقيم = $\frac{٣}{٢}$ فإن : ميل المستقيم الذى يوازيه = $\frac{٣}{٢}$

وميل المستقيم العمودى عليه = $\frac{-٢}{٣}$

ثالثًا معادلة الخط المستقيم

١ بدلالة نقطة عليه ($س_١$ ، $ص_١$) والميل (م) هى $(ص - ص_١) = م (س - س_١)$

٢ بدلالة الميل (م) وطول الجزء المقطوع من محور الصادات هى $ص = م س + ج$

٣ بدلالة الجزءين المقطوعين من محورى الإحداثيات هى $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$

ملاحظـات

١ معادلة المستقيم الذى يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (ل ، ك) هى $ص = ك$

٢ معادلة المستقيم الذى يوازى محور الصادات ويمر بالنقطة (ل ، ك) هى $س = ل$

٣ معادلة محور السينات هى $ص = ٠$

٤ معادلة محور الصادات هى $س = ٠$

٥ معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل هى $ص = م س$

٦ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات نضع ص = ٠ ونوجد قيم س

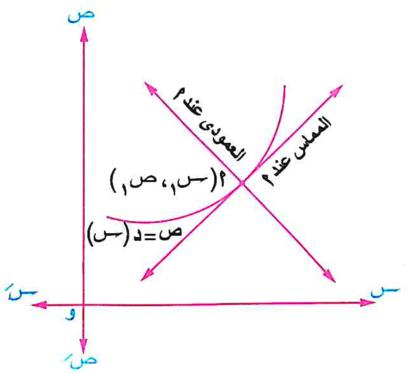
٧ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات نضع س = ٠ ونوجد قيم ص

٨ لإيجاد نقط تقاطع منحنيين نحل معادلتيهما آنيًا.

استخدام المشتقة الأولى لإيجاد ميلى المماس والعمودى عليه لمنحنى

نعلم مما سبق دراسته أن المشتقة الأولى للدالة د حيث ص = د (س) تعنى ميل المماس لمنحنى هذه الدالة عند أى نقطة (س ، ص) واقعة عليه

ففى الشكل المقابل :



* ميل المماس لمنحنى الدالة [ص = د (س)]
عند النقطة أ ($س_١$ ، $ص_١$) الواقعة عليه هو $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(س_١ ، ص_١)}$

* ميل العمودى على منحنى الدالة [ص = د (س)]
عند النقطة أ ($س_١$ ، $ص_١$) الواقعة عليه هو $\frac{-١}{\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(س_١ ، ص_١)}}$

معادلتا المماس والعمودى عليه لمنحنى

إذا كانت ($س_١$ ، $ص_١$) نقطة تقع على منحنى الدالة د حيث : ص = د (س)، م ميل المماس عند هذه النقطة أى م = $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(س_١ ، ص_١)}$ فإن :

* معادلة المماس للمنحنى عند النقطة ($س_١$ ، $ص_١$) هى $\boxed{ص - ص_١ = م (س - س_١)}$

* معادلة العمودى للمنحنى عند النقطة ($س_١$ ، $ص_١$) هى $\boxed{ص - ص_١ = \frac{-١}{م} (س - س_١)}$

مثال ١

أوجد ميل المماس والعمودى عليه للمنحنى : ص = ظا $(\pi - \frac{٣}{٤}$ س$)$ عند النقطة $(\pi$ ، ١$)$

الحـــل

$\because \frac{ءص}{ءس} = -\frac{٣}{٤}$ قا$^٢ (\pi - \frac{٣}{٤}$ س$)$

$\therefore$ ميل المماس للمنحنى عند النقطة $(\pi$ ، ١$) = -\frac{٣}{٤}$ قا$^٢ (\pi - \frac{٣}{٤} \pi) = -\frac{٣}{٤}$ قا$^٢ \frac{\pi}{٤} = \frac{-٣}{٤} \times (\sqrt{٢})^٢ = \frac{-٣}{٢}$

، ميل العمودى على المنحنى عند النقطة $(\pi$ ، ١$) = \frac{٢}{٣}$

مثال ٢

أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = س^٢ − ٤ س + ٣ والتى يكون عندها المماس للمنحنى موازيًا محور السينات.

الحـــل

$\because$ ص = س^٢ − ٤ س + ٣ $\qquad \therefore \frac{ءص}{ءس} = ٢$ س − ٤

، $\because$ المماس يوازى محور السينات. $\qquad \therefore \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\therefore$ ٢ س − ٤ = ٠ $\qquad \therefore$ س = ٢ ومنها ص = −١ $\qquad \therefore$ النقطة هى (٢ ، −١)

مثال ٣

أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى :

د (س) = (س^{٣} − ١) (س + ٢) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (−١ ، −٢) الواقعة على المنحنى.

الحل

∵ دَ (س) = (س^{٣} − ١) + ٣ س^{٢} (س + ٢)

، ∵ دَ (−١) = ١ ∴ ميل المماس للمنحنى عند النقطة (−١ ، −٢) = ١

∴ ظا هـ = ١ ∴ هـ = ٤٥°

∴ قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى عند النقطة (−١ ، −٢) = ٤٥°

مثال ٤

أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = ٣ س^{٣} − ١١ س + ٥ والتى عندها يكون المماس للمنحنى :

١ موازيًا للمستقيم ٢ س + ص − ٥ = ٠ ٢ عموديًا على المستقيم ٢٥ ص + س = ٦

الحل

∵ ص = ٣ س^{٣} − ١١ س + ٥ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٩ س^{٢} − ١١

١ ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{-٢}{١}$ = −٢ ∴ ميل المماس = −٢

∴ ٩ س^{٢} − ١١ = −٢ ∴ س^{٢} = ١ ∴ س = ± ١

∴ عند س = ١ فإن : ص = −٣

، عند س = −١ فإن : ص = ١٣

∴ النقط هى (١ ، −٣) ، (−١ ، ١٣)

٢ ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{-١}{٢٥}$ ∴ ميل المماس = ٢٥

∴ ٩ س^{٢} − ١١ = ٢٥ ∴ س^{٢} = ٤ ∴ س = ± ٢

∴ عند س = ٢ فإن : ص = ٧

، عند س = −٢ فإن : ص = ٣

∴ النقط هى (٢ ، ٧) ، (−٢ ، ٣)

مثال ٥

أوجد معادلتى المماس والعمودى عليه للمنحنى : ص = ٥ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٤ عند النقطة (−١ ، ٢) الواقعة عليه.

الحل

∵ ص = ٥ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٤ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ١٥ س^{٢} + ٦ س

$\therefore \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = -1} = 9$ $\therefore$ ميل المماس $= 9$

$\therefore$ معادلة المماس هى $(ص - 2) = 9\,(س + 1)$ أى $ص - 9\,س - 11 = 0$

، $\because$ ميل العمودى $= \frac{-1}{9}$

$\therefore$ معادلة العمودى هى $(ص - 2) = \frac{-1}{9}\,(س + 1)$ أى $س + 9\,ص - 17 = 0$

مثال ٦

أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى : $ص = (س - 2)\,(س^3 - 4)$ عند النقطة $(2 ، 0)$ الواقعة على المنحنى.

الحل

$\because ص = (س - 2)\,(س^3 - 4)$ $\therefore \frac{ءص}{ءس} = (س - 2)\,(3\,س^2) + (س^3 - 4)$

$\therefore \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = 2} = 4$ $\therefore$ ميل المماس $= 4$

$\therefore$ معادلة المماس هى $(ص - 0) = 4\,(س - 2)$ أى $4\,س - ص - 8 = 0$

، ميل العمودى $= \frac{-1}{4}$

$\therefore$ معادلة العمودى هى $(ص - س) = \frac{-1}{4}\,(س - 2)$ أى $4\,ص + س - 2 = 0$

مثال ٧

أوجد معادلة العمودى لمنحنى الدالة $ص = س^2 + 2\,س - 3$ عند كل نقطة من نقط تقاطعه مع

[١] محور السينات. [٢] محور الصادات.

الحل

[١] نوجد نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات بوضع $ص = 0$

$\therefore س^2 + 2\,س - 3 = 0$ $\therefore (س + 3)\,(س - 1) = 0$

$\therefore س = -3$ أ، $س = 1$ $\therefore$ نقط التقاطع هى $(-3 ، 0)$ ، $(1 ، 0)$

، $\because$ ميل المماس للمنحنى عند أى نقطة $(س ، ص)$ عليه $= \frac{ءص}{ءس} = 2\,س + 2$

- عند النقطة $(-3 ، 0)$ $\therefore$ ميل المماس $= -4$ وميل العمودى $= \frac{1}{4}$

$\therefore$ معادلة العمودى هى : $(ص - 0) = \frac{1}{4}\,(س + 3)$ أى $4\,ص - س - 3 = 0$

- عند النقطة $(1 ، 0)$ $\therefore$ ميل المماس $= 4$ $\therefore$ ميل العمودى $= -\frac{1}{4}$

$\therefore$ معادلة العمودى هى : $(ص - 0) = -\frac{1}{4}(س - 1)$ أى $س + 4\,ص - 1 = 0$

٢ نوجد نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات بوضع س = ٠

∴ ص = −٣ ∴ نقطة التقاطع هى (٠ ، −٣)

∴ ميل المماس = ٢ وميل العمودى = $\frac{-١}{٢}$

∴ معادلة العمودى هى (ص + ٣) = $\frac{-١}{٢}$ (س − ٠) أى س + ٢ ص + ٦ = ٠

مثال ٨

إذا كانت : ص = ظا س حيث س ∈]٠ ، ٢ π[− {$\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$}

فأوجد النقط الواقعة على منحنى هذه الدالة والتى عندها يكون المماس موازيًا للمستقيم :

٢ ص − ٨ س + ٧ = ٠

الحل

∵ ص = ظا س ∴ صَ = قا٢ س

، ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{-(-٨)}{٢}$ = ٤ ∴ قا٢ س = ٤ ∴ قا س = ± ٢

∴ حتا س = ± $\frac{١}{٢}$ ∴ س = $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{٢\pi}{٣}$ ، $\frac{٤\pi}{٣}$ ، $\frac{٥\pi}{٣}$

ومنها ص = $\sqrt{٣}$ ، −$\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٣}$ ، −$\sqrt{٣}$ على الترتيب.

∴ النقط هى : ($\frac{\pi}{٣}$ ، $\sqrt{٣}$) ، ($\frac{٢\pi}{٣}$ ، −$\sqrt{٣}$) ، ($\frac{٤\pi}{٣}$ ، $\sqrt{٣}$) ، ($\frac{٥\pi}{٣}$ ، −$\sqrt{٣}$)

مثال ٩

إذا كانت : س ∈ [٠ ، π] فأوجد نقطة على المنحنى ص = حا ٢ س − حتا س يكون المماس عندها مائلًا بزاوية قياسها $\frac{٣\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وأوجد معادلة هذا المماس.

الحل

∵ ص = حا ٢ س − حتا س

∴ صَ = ٢ حتا ٢ س + حا س ، عندما ميل المماس = ظا $\frac{٣\pi}{٤}$ = −١

∴ ٢ حتا ٢ س + حا س = −١ (لكن حتا ٢ س = ١ − ٢ حا٢ س)

∴ ٢ − ٤ حا٢ س + حا س = −١ ∴ ٤ حا٢ س − حا س − ٣ = ٠

∴ (٤ حا س + ٣) (حا س − ١) = ٠

∴ حا س = $\frac{-٣}{٤}$ (مرفوض لأن س ∈ [٠ ، π])

أ، حا س = ١ ومنها س = $\frac{\pi}{٢}$ ومنها ص = ٠ ∴ نقطة التماس هى ($\frac{\pi}{٢}$ ، ٠)

∴ معادلة المماس هى : (ص − ٠) = −١ (س − $\frac{\pi}{٢}$) أى س + ص − $\frac{\pi}{٢}$ = صفر

مثال ١٠

إذا كان المنحنى : $ص = \frac{أ}{س + ب}$ يمر بالنقطة (–١ ، ٢) والمماس للمنحنى عند هذه النقطة يوازى المستقيم $س + ص - ٣ = ٠$ **فأوجد قيمتى : أ ، ب**

الحل

$\because$ المنحنى $ص = \frac{أ}{س + ب}$ يمر بالنقطة (–١ ، ٢)

$\therefore ٢ = \frac{أ}{-١ + ب}$ $\therefore أ = ٢ \, (-١ + ب)$ (١)

، $\because \frac{ءص}{ءس} = \frac{-أ}{(س + ب)^٢}$ $\therefore \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = -١} = \frac{-أ}{(-١ + ب)^٢}$

، $\because$ المماس يوازى المستقيم $س + ص - ٣ = ٠$ $\therefore$ ميل المماس = –١

$\therefore \frac{-أ}{(-١ + ب)^٢} = -١$ $\therefore \frac{أ}{(-١ + ب)^٢} = ١$ بشرط $ب \neq ١$ (٢)

بالتعويض عن قيمة أ من (١) فى (٢) :

$\therefore \frac{٢ \, (-١ + ب)}{(-١ + ب)^٢} = ١$ $\therefore \frac{٢}{(-١ + ب)} = ١$

$\therefore -١ + ب = ٢$ $\therefore ب = ٣$

وبالتعويض فى (١) : $\therefore أ = ٢ \, (-١ + ٣) = ٤$

مثال ١١

أثبت أن مساحة المثلث المحصور بين المماس للمنحنى $ص = \frac{٢}{س}$ حيث $س > ٠$ عند أى نقطة عليه ومحورى الإحداثيات تساوى ٤ وحدة مربعة.

الحل

$\because ص = \frac{٢}{س} = ٢ \, س^{-١}$ $\therefore صَ = \frac{-٢}{س^٢}$ وبفرض أن نقطة التماس هى $\left(أ ، \frac{٢}{أ}\right)$

$\therefore صَ = \frac{-٢}{أ^٢}$ $\therefore$ معادلة المماس هى $\left(ص - \frac{٢}{أ}\right) = \frac{-٢}{أ^٢} \, (س - أ)$

أى $٢ \, س + أ^٢ \, ص - ٤ \, أ = ٠$ ، بوضع $ص = ٠$

$\therefore س = ٢ \, أ$ $\therefore$ المماس يقطع محور السينات عند (٢ أ ، ٠)

، بوضع $س = ٠$ $\therefore ص = \frac{٤}{أ}$

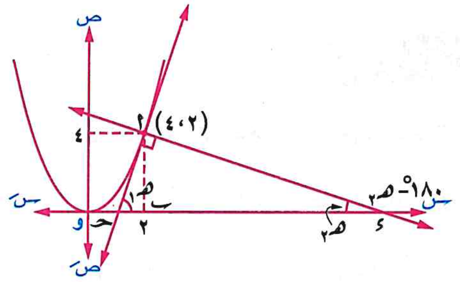
$\therefore$ المماس يقطع محور الصادات عند $\left(٠ ، \frac{٤}{أ}\right)$

$\therefore$ مساحة المثلث المطلوب $= \frac{١}{٢} \times ٢ \, أ \times \frac{٤}{أ} = ٤$ وحدة مربعة.

مثال ١٢

أوجد مساحة المثلث المحدد بمحور السينات والمماس والعمودى لمنحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} عند النقطة (٢ ، ٤) الواقعة عليه.

الحل



د' (س) = ٢ س ، عند النقطة (٢ ، ٤)

∴ د' (س) = ٤

∵ ميل المماس = ظا هـ$_{١}$

∴ ظا هـ$_{١}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب ح}}$

∴ ٤ = $\frac{٤}{\text{ب ح}}$ ∴ ب ح = ١ وحدة.

، ∵ ميل العمودى = $\frac{-١}{٤}$ ∴ ظا (١٨٠° − هـ$_{٢}$) = $-\frac{١}{٤}$

∴ − ظا هـ$_{٢}$ = $\frac{-١}{٤}$ ∴ ظا هـ$_{٢}$ = $\frac{١}{٤}$

، ∵ ظا هـ$_{٢}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ء ب}}$ ∴ $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٤}{\text{ء ب}}$

∴ ء ب = ١٦ وحدة. ∴ ء ح = ١٦ + ١ = ١٧ وحدة.

∴ مساحة △ أ ء ح = $\frac{١}{٢}$ × ء ح × أ ب = $\frac{١}{٢}$ × ١٧ × ٤ = ٣٤ وحدة مربعة.

حل آخر :

∵ المماس للمنحنى عند النقطة (٢ ، ٤) ميله = ٤

∴ معادلة المماس هى (ص − ٤) = ٤ (س − ٢) أى ص − ٤ س + ٤ = ٠

لإيجاد نقط تقاطع المماس مع محور السينات نضع ص = ٠

∴ س = ١ ∴ ح = (١ ، ٠)

، ∵ العمودى للمنحنى عند النقطة (٢ ، ٤) ميله = $\frac{-١}{٤}$

∴ معادلة العمودى هى (ص − ٤) = $\frac{-١}{٤}$ (س − ٢) أى ٤ ص + س − ١٨ = ٠

لإيجاد نقط تقاطع العمودى مع محور السينات نضع ص = ٠

∴ س = ١٨ ∴ ء = (١٨ ، ٠)

∴ طول $\overline{\text{ح ء}}$ = ١٨ − ١ = ١٧ وحدة طولية.

∴ مساحة △ أ ح ء = $\frac{١}{٢}$ ح ء × أ ب = $\frac{١}{٢}$ × ١٧ × ٤ = ٣٤ وحدة مربعة.

تمارين 14 على تطبيقات على المشتقة

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) ميل المماس لمنحنى الدالة ص = (٢ س − ٣)^{٥} عند س = ٢ يساوى ....

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{١٢}$ (جـ) ٥ (د) ١٠

(٢) ميل المماس لمنحنى الدالة ص = جاس جتاس يساوى ....

(أ) جتاس جاس (ب) جتا^{٢}س − جا^{٢}س

(جـ) جاس − جتاس (د) جا^{٢}س + جتا^{٢}س

(٣) ميل المماس للمنحنى ص = $\sqrt{\text{س + ظاس}}$ عند س = صفر يساوى ....

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

(٤) ميل العمودى على المنحنى ص = جا ٢ س عند النقطة التى تقع على المنحنى وإحداثيها السينى = $\frac{\pi}{٦}$ يساوى ....

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ٣ (د) ١

(٥) إذا كان المستقيم : ص + س − ١ = ٠ يمس منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} − ٣ س + أ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٦) النقطة الواقعة على منحنى الدالة د : د (س) = (س − ٣)^{٢} − ١ والتى عندها المماس يوازى المستقيم ٢ س + ص − ٣ = ٠ هى ....

(أ) (٠ ، ٢) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (٣ ، −١) (د) (١ ، ٣)

(٧) النقطة الواقعة على منحنى الدالة ص = $\frac{١}{\text{س} - ٣}$ والتى عندها المماس يوازى المستقيم س + ص = ٠ من النقط التالية هى ....

(أ) $\left(-٢ ، -\frac{١}{٥}\right)$ (ب) (٤ ، −٤) (جـ) (٤ ، ١) (د) (٢ ، −٢)

(٨) إذا كانت : د دالة خطية وكان د̅ (−١١) = ١٧ فإن : د̅ (١١) = ...

(أ) −١١ (ب) −١٧ (جـ) ١٧ (د) ١١

(٩) إذا كان المماس لمنحنى الدالة ص = د (س) عند النقطة (٣ ، ٥) يمر بالنقطة (٦ ، −١)

فإن : دَ (٣) = ...

(أ) −٢ (ب) $\frac{-1}{2}$ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) ٢

(١٠) معادلة المماس لمنحنى الدالة د : د (س) = $\frac{1}{س + 1}$ عند س = صفر هى ....

(أ) ص = ١ − س (ب) ص = س − ١ (جـ) ص = س + ١ (د) ص = − س − ١

(١١) معادلة المماس للمنحنى ص = ظا س + جا ٢ س عندما س = $\frac{\pi}{4}$ هى ....

(أ) ٢ ص − ٤ س − π = ٠ (ب) ٢ س − ٤ ص + π = ٤

(جـ) ص − ٢ س = ٢ (د) ٢ ص − ٤ س + π = ٤

(١٢) منحنى الدالة د : د (س) = $\frac{1}{3}$ س^{3} − س^{2} + ٣ له مماس أفقى عند س = ...

(أ) صفر (ب) صفر أ، ٣ (جـ) ٢ (د) صفر أ، ٢

(١٣) المماس لمنحنى الدالة ص = $\sqrt[3]{س}$ عند س = ٠ هو ....

(أ) محور السينات. (ب) محور الصادات.

(جـ) المستقيم ص = س (د) المستقيم س + ص = ٠

(١٤) إذا كانت معادلة العمودى للمنحنى د (س) عند النقطة (٢ ، −١) هى س − ٢ ص = ٤

فإن : دَ (٢) = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ١ (د) −١

(١٥) إذا كان المماس لمنحنى الدالة د حيث د (س) = أ س^{2} + ب س + ٥ عند النقطة (−١ ، ٣) الواقعة عليه يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° فإن : أ + ب = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٦) إذا كان ميل المماس للمنحنى : ص = أ س^{2} + ٢ ب س عند نقطة الأصل يساوى ٦ والنقطة (−١ ، −٣) تقع على المنحنى فإن : أ + ب = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(١٧) إذا كان : ص = $\frac{1}{أ + ب س}$ هى معادلة منحنى يمر بالنقطة (١ ، −١) وميل المماس له عند هذه النقطة يساوى ٢ فإن : ب − أ = ...

(أ) −١ (ب) −٣ (جـ) ٣ (د) ١

(١٨) قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى : ص + جا ٢ س = ٠ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة $\left(\frac{\pi}{3} ، \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ تساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٧٥°

(١٩) ميل المماس للمنحنى ص = $\sqrt[3]{س^{2} + س + 2}$ عند النقطة (٢ ، ٢) يساوى ....

(أ) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{12}{5}$ (جـ) $\frac{3}{2}$ (د) $\frac{5}{12}$

(٢٠) ميل العمودى للمنحنى ص = (س − ١) (س^{٣} + ٢) عند س = ١ يساوى ....

(أ) $-\frac{١}{٣}$ (ب) −٣ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) ٣

(٢١) قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى ص = $\sqrt{٢س^{٢} + ٧}$ عند النقطة (−٣ ، ٥) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ≃ ....

(أ) ٣٩° ٤٨َ (ب) ٥٠° ١٢َ (جـ) ١٢٩° ٤٨َ (د) ١٤٠° ١٢َ

(٢٢) معادلة العمودى على المنحنى ص = ظا س عند النقطة $(\frac{\pi}{٤} ، ١)$ الواقعة عليه هى ....

(أ) ص − ٢ س = ١ − $\frac{\pi}{٢}$ (ب) ٨ ص + ٤ س = π + ٨

(جـ) ٤ ص − ٤ س = π + ٤ (د) ٤ ص + ٢ س = π + ٤

(٢٣) النقطة الواقعة على المنحنى ص = س^{٢} والتى عندها ميل المماس يساوى الإحداثى السينى للنقطة هى ....

(أ) (٢ ، ٠) (ب) (٠ ، ٢) (جـ) $(-\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢})$ (د) (٠ ، ٠)

(٢٤) النقطة الواقعة على المنحنى ص = س^{٣} − ٢ س + ١ والتى عندها المماس للمنحنى تصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هى ....

(أ) (١ ، ٠) ، (١ ، ٢) (ب) (٠ ، ١) ، (٢ ، −١)

(جـ) (١ ، ٠) ، (−١ ، ٢) (د) (١ ، ٢) ، (−١ ، ٢)

(٢٥) النقطة الواقعة على المنحنى ص = ٢ س^{٣} − س + ٣ والتى عندها المماس يكون عموديًا على المستقيم س = ١ − ٥ ص هى ....

(أ) (١ ، −٤) (ب) (١ ، ٢)

(جـ) (١ ، −٤) ، (١ ، ٢) (د) (١ ، ٤) ، (−١ ، ٢)

(٢٦) النقط التى تقع على المنحنى ص^{٢} = ٨ س والتى عندها $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءس}{ءص}$ هى ....

(أ) (٢ ، ٤) ، (٤ ، −٢) (ب) (٢ ، ٤) ، (٢ ، −٤)

(جـ) (−٢ ، ٤) ، (٢ ، ٤) (د) (٤ ، ٢) ، (٤ ، −٢)

(٢٧) إذا كان المستقيم : ٢ ص − ٤ س + أ = ٠ يمس منحنى الدالة : ص = س^{٢} + ١ عند النقطة (ب ، حـ) فإن : أ + ب + حـ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٦

(٢٨) إذا كان المماس للمنحنى : ص = س^{٣} − ٣ س^{٢} يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن : س ∋ ....

(أ) [٠ ، ٢] (ب)]٠ ، ٢[(جـ) ح − [٠ ، ٢] (د) ح −]٠ ، ٢[

(٢٩) إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = س^{٢} + أ س + ب يساوى −١ عند النقطة (٢ ، −٢) فإن : أ × ب = ...

(أ) −١٥ (ب) −٢٠ (جـ) −١ (د) ١٠

(٣٠) المماس للمنحنى ص = جتا س عند س = $\frac{\pi}{٢}$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ....

(أ) $\frac{\pi}{٦}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٣}$ (د) $\frac{٣\pi}{٤}$

(٣١) المماس للمنحنى ص = $(٣س - ٥)^٣$ عند النقطة (٢ ، ١) يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة ظلها يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٧ (د) ٩

(٣٢) إذا كان : ص = $\frac{٢ \text{ طا س}}{١ - \text{طا}^٢ \text{س}}$ فإن : ميل المماس للمنحنى ص عند س = $\frac{\pi}{٨}$ يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٣٣) إذا كان العمودى على منحنى الدالة : ص = د (س) عند النقطة (٣ ، ٤) يصنع زاوية قياسها $\frac{٣\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن : دَ (٣) = ...

(أ) -١ (ب) $\frac{-٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ١

(٣٤) إذا كان المستقيم ص = ٨ - ٣ س مماسًا لمنحنى الدالة د عند النقطة (٣ ، -١)
فإن : دَ (٣) = ...

(أ) -١ (ب) -٣ (جـ) ٣ (د) ٨

(٣٥) ميل العمودى لمنحنى الدالة : ص = $|س^٣|$ عند النقطة (-٢ ، ٨) هو ....

(أ) ١٢ (ب) -١٢ (جـ) $\frac{١}{١٢}$ (د) $\frac{-١}{١٢}$

(٣٦) إذا كانت د دالة زوجية وقابلة للاشتقاق على ح وكان : دَ (٢) = ٣
فإن ميل المماس للدالة د عند س = -٢ هو ....

(أ) ٣ (ب) -٣ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{-١}{٣}$

(٣٧) إذا كانت د دالة فردية قابلة للاشتقاق على ح وكان : دَ (٣) = ٥
فإن ميل المماس للدالة د عند س = -٣ هو ....

(أ) ٥ (ب) -٥ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) $\frac{-١}{٥}$

(٣٨) المماس لمنحنى يكون عمودى على محور السينات إذا كان ....

(أ) $\frac{ءص}{ءس} = ٠$ (ب) $\frac{ءص}{ءس} = ١$ (جـ) $\frac{ءس}{ءص} = ٠$ (د) $\frac{ءس}{ءص} = -١$

(٣٩) المماسان للمنحنى ص = $س^٣$ عند $س_١ = -١$ ، $س_٢ = ١$ يكونان ....

(أ) متعامدان. (ب) متوازيان.

(جـ) متقاطعان وغير متعامدان. (د) منطبقان.

(٤٠) إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث د (س) = أ $\text{جا}^٢$ س + ب $\text{جتا}^٢$ س عند النقطة $(\frac{\pi}{٣} ، ١)$ يساوى ٦ $\sqrt{٣}$ فإن : أ + ب = ...

(أ) -١٢ (ب) -٤ (جـ) ٨ (د) ١٢

(٤١) إذا كان المنحنيان : ص = س^٣ ، أ ص + س^٢ = ب يتقاطعان على التعامد عند (١ ، ١)

إذا كان : أ = ...

(أ) −٢ (ب) صفر (جـ) ٣ (د) ٦

(٤٢) إذا كان منحنى الدالة د يمر بالنقطة (٣ ، ٧) وكان ميل المماس عندها يساوى −٢

وكان : ر (س) = (س + ٢) د (س) + ٢ س − ٣ فإن قياس الزاوية التى يصنعها المماس لمنحنى الدالة ر عند س = ٣ يساوى .... مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) $\frac{٣\pi}{٤}$

(٤٣) إذا كانت د : ح ⟵ ح حيث د (س) = س^٣ − أ س^٢ + ب س − ١ والمماس عند س = ١ يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، بينما المماس عند س = ٢ يوازى محور السينات فإن ٣ أ − ب = ...

(أ) −٨ (ب) −٤ (جـ) صفر (د) ٨

(٤٤) مساحة المثلث المحصور بين المماس للمنحنى ص = $\frac{٤}{س}$ حيث س > ٠ عند أى نقطة عليه ومحورى الإحداثيات تساوى .... وحدة مربعة.

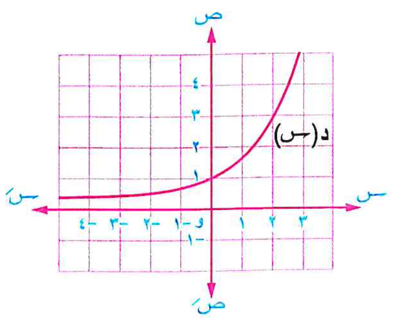
(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

(٤٥) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن دَ (٢) تكون ....

(أ) موجبة. (ب) سالبة.

(جـ) صفر. (د) غير معرفة.

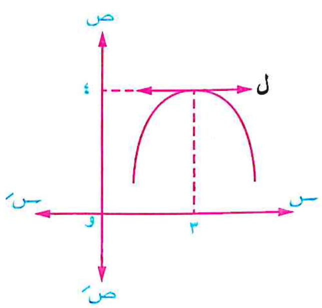


(٤٦) الشكل المقابل يمثل جزء من منحنى الدالة د والمستقيم ل مماس لمنحنى الدالة عند النقطة (٣ ، ٤) ويوازى محور السينات

فإن : دَ (٣) = ...

(أ) ٤ (ب) صفر

(جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

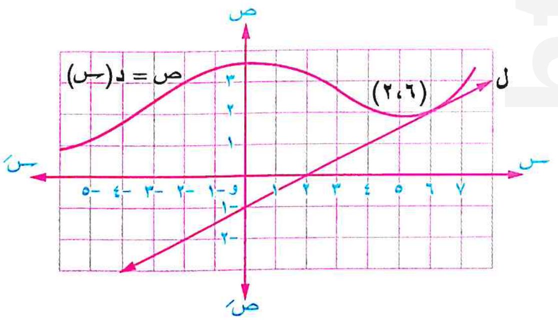


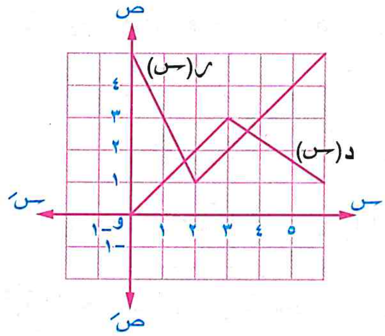
(٤٧) الشكل المقابل يمثل المنحنى ص = د (س) والمستقيم ل يمس المنحنى عند النقطة (٦ ، ٢)

فإن دَ (٦) = ...

(أ) −$\frac{١}{٢}$ (ب) صفر

(جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١



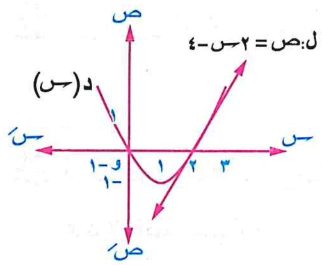


(٤٨) فى الشكل المقابل :

دَ (١) + رَ (١) = ...

(أ) -٢ (ب) -١

(جـ) ١ (د) ٢



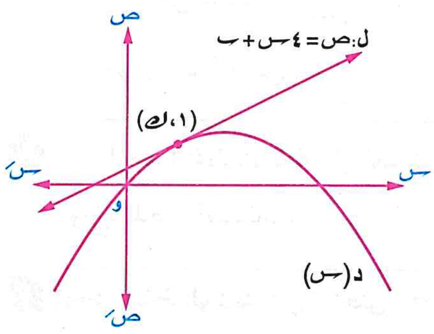
(٤٩) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

، المستقيم ل يمس المنحنى عند

النقطة (٢ ، ٠) فإن : دَ (٢) = ...

(أ) صفر (ب) ١

(جـ) ٢ (د) ٣



(٥٠) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة

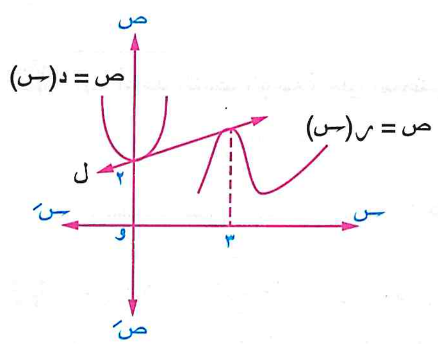
د : د (س) = أ س - س^{٢} والمستقيم ل

يمس المنحنى عند النقطة (١ ، ك)

فإن : أ = ...

(أ) -٣ (ب) صفر

(جـ) ٦ (د) ٨



(٥١) فى الشكل المقابل :

إذا كان المستقيم ل يمس المنحنى ص = د (س)

عند النقطة (٠ ، ٢) ويمس المنحنى ص = ر (س)

عند س = ٣ وكان ٤ دَ (٠) + ٥ رَ (٣) = ٣

فإن : ر (٣) = ...

(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ٤ (د) ٥

ثانيًا الأسئلة المقالية

(١) أوجد ميل المماس لكل من المنحنيات الآتية :

(١) ص = $\frac{١ - ٢ س}{س - ٢}$ عند النقطة (١ ، ١) « ٣ »

(٢) ص = ٥ - جا س عند س = $\frac{\pi}{٤}$ « $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$ »

(٣) ص = س $\sqrt{\text{جا س}}$ عند س = $\frac{\pi}{٢}$ « ١ »

(٤) ص = قا س + ظا س عند النقطة (٠ ، ١) « ١ »

٢ أوجد ميل العمودى على كل من المنحنيات الآتية :

(١) ص = ٢ $س^{٣}$ − ٣ $س^{٢}$ − ١٢ س + ٥ عند النقطة (−٢ ، ١) « $\frac{-١}{٢٤}$ »

(٢) ص = طا $(\pi - \frac{٢}{٣}$ س$)$ عند النقطة $(\pi$ ، $\sqrt{٣})$ « $\frac{٣}{٨}$ »

(٣) ص = $س^{٢}$ $(س - \frac{٢}{س})(س + \frac{٢}{س})$ عند س = ٢ « $\frac{-١}{٣٢}$ »

---

٣ أوجد ميل المماس للمنحنى : ص = (س + ٢) ($س^{٢}$ + ١) عند نقط تقاطعه مع محور السينات. « −٧ ، ٣ »

---

٤ أوجد ميل المماس للمنحنى : د (س) = $س^{٣}$ − ٢ $س^{٢}$ + ٣ س − ١ عند نقطة تقاطعه مع محور الصادات.

« ٣ »

---

٥ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس لكل من المنحنيات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة المبينة :

(١) ص = $س^{٢}$ + $\frac{١}{س}$ − ١ عند س = ١ « ٤٥° »

(٢) ص = $س^{٢}$ |س| − ٢ عند س = −٢ « ٤٩ً ٤٥َ ٩٤° »

---

٦ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = $س^{٣}$ − ٦ $س^{٢}$ − ١٥ س + ٢٠ والتى يكون عندها المماس موازيًا لمحور السينات. « (٥ ، −٨٠) ، (−١ ، ٢٨) »

---

٧ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = (س − ٣) ($س^{٢}$ + ٢) والتى عندها ميل المماس يساوى ١١

« (٣ ، ٠) ، (−١ ، −١٢) »

---

٨ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = $س^{٢}$ − ٢ س + ٣ والتى عندها يكون المماس للمنحنى :

(١) موازيًا محور السينات.

(٢) عموديًا على المستقيم س − ٤ ص + ١ = ٠ . « (١ ، ٢) ، (−١ ، ٦) »

---

٩ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = $س^{٣}$ − ٣ $س^{٢}$ − ٥ س + ١٢ والتى يكون عندها المماس للمنحنى موازيًا المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٥ ، ٩) « (٣ ، −٣) ، (−١ ، ١٣) »

---

١٠ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = $\frac{س - ٢}{س + ٢}$ والتى يصنع المماس عندها زاوية موجبة قياسها $\frac{\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. « (٠ ، −١) ، (−٤ ، ٣) »

---

١١ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = ٣ $س^{٣}$ − ١١ س + ٥ والتى يكون عندها المماس :

(١) موازيًا المستقيم ٢ س + ص − ٥ = ٠ .   (٢) عموديًا على المستقيم ٢٥ ص + س = ٦

(٣) يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ظلها = −١١

١٢ **أوجد معادلة المماس لكل من المنحنيات الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها :**

(١) ص = ٣ س^{٣} − ٧ س^{٢} + س − ٢ عند النقطة (١ ، −٥)

(٢) ص = $\sqrt{س}$ + $\frac{٤}{\sqrt{س}}$ عند النقطة (٤ ، ٤)

(٣) ص = (س^{٢} + س) (س^{٣} + ٥) عند النقطة (−٢ ، −٦)

(٤) ص = ٢ جا س + جتا س عند النقطة (٠ ، ١)

(٥) ص = ٢ س جا س جتا س عند س = π

(٦) د (س) = ٤ س − ظا س عند النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، د ($\frac{\pi}{٤}$))

(٧) ص = $\frac{١ + جا س}{١ - جا س}$ عند النقطة (π ، ١)

١٣ **أوجد معادلة العمودى على كل من المنحنيات الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها :**

(١) ص = س^{٥} − ٤ س^{٣} + ٢ عند س = −١

(٢) ص = $\frac{س + ٢}{س - ٢}$ عند النقطة (٣ ، ٥)

(٣) ص = $\frac{س^{٢} - ١}{٢ - س^{٢}}$ عند س = ٠

(٤) ص = ٤ + ظتا س − قا^{٢} س عند س = $\frac{\pi}{٤}$

١٤ **أوجد معادلة كل من المماس والعمودى عليه لكل من المنحنيات الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها :**

(١) ص = جا س ظا ٦ س عند س = $\frac{\pi}{٦}$

(٢) ص = س جا ٢ س عند النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٤}$)

(٣) ص = $\sqrt{جا س + جتا س}$ عند س = $\frac{\pi}{٢}$

(٤) ص = ٣ + قا س عند س = $\frac{٢\pi}{٣}$

١٥ **أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى :** ص = $\frac{س + ٣}{س + ١}$ عند النقطة الواقعة على المنحنى والتى إحداثيها السينى = ١ هل النقطة أ (−٣ ، ٤) تقع على المماس ؟ **فسر إجابتك.**

١٦ **أوجد معادلة المماس للمنحنى :** ص = ٢ س^{٣} + ٦ س^{٢} + ٥ س الذى يصنع زاوية موجبة قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

« ص + س + ٢ = ٠ »

١٧ **أوجد معادلة المماس للمنحنى :** ص^{٢} = س − ١ إذا كان ميل المماس = $\frac{-١}{٢}$

« ٢ ص + س = ٠ »

● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

١٨ أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة : ص = (س − ٢) (س + ١) عند كل من نقطتى تقاطعه مع محور السينات. « ص − ٣ س + ٦ = ٠ ، ص + ٣ س + ٣ = ٠ »

١٩ إذا كان المنحنى ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} يمس المستقيم ص = ٨ س + ٥ عند النقطة (−١ ، −٣) فأوجد قيمتى : أ ، ب « ٢ ، −١ »

٢٠ إذا كان المنحنى ص = (س^{٢} − ٢ س) (أ س + ب) يمس محور السينات عند النقطة (٢ ، ٠)، ويمس المستقيم ص = ٢ س عند نقطة الأصل فأوجد قيمتى : أ ، ب « $\frac{١}{٢}$ ، −١ »

٢١ إذا كانت : س ∈ [٠ ، π] فأوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = جا ٢ س وعندها يكون المماس موازيًا المستقيم : ص = ٨ + س « $\left(\frac{\pi}{٦} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$ ، $\left(\frac{٥\pi}{٦} ، \frac{-\sqrt{٣}}{٢}\right)$ »

٢٢ أثبت أن المماس للمنحنى : ص = س^{٣} + ٣ س − ٢ عند أى نقطة عليه يميل بزاوية حادة على محور السينات ثم أوجد معادلة العمودى للمنحنى عند النقطة (١ ، ٢) الواقعة على المنحنى. « س + ٦ ص − ١٣ = ٠ »

٢٣ أثبت أن المماس المرسوم للمنحنى : ص = س^{٢} + س − ١ عند النقطة (١ ، ١) يكون عموديًا على المماس المرسوم للمنحنى ص = ٢ − $\sqrt[٣]{س}$ عند نفس النقطة.

٢٤ أوجد ميل المماس للمنحنى : ٤ ص = ١٢ س − ٤ − س^{٢} عندما س = ٢ وأثبت أنه ضعف ميل المماس للمنحنى عندما س = ٤
أوجد أيضًا النقطة الواقعة على المنحنى ويكون ميل المماس للمنحنى عندها = −١ « (٨ ، ٧) »

٢٥ أثبت أن المماس للمنحنى : ص = ٣ س^{٢} − ٥ س + ٢ عند النقطة (١ ، ٠) يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها $\frac{\pi}{٤}$ ثم أوجد معادلة هذا المماس. « ص = س − ١ »

٢٦ أثبت أن المماس لمنحنى الدالة : ص = جا س + جتا س عند النقطة $\left(\frac{\pi}{٤} ، \sqrt{٢}\right)$ يوازى محور السينات ثم أوجد معادلته. « ص = $\sqrt{٢}$ »

٢٧ أوجد معادلتى المماسين للمنحنى : ص = س^{٣} − ٣ س + ٥ العموديين على المستقيم : س + ٩ ص = ١ « ص − ٩ س + ١١ = ٠ ، ص − ٩ س − ٢١ = ٠ »

٢٨ أوجد معادلة المماس للمنحنى : ص = س^{٢} − ٢ س + ٣ عند النقطة (س ، ٣) الواقعة عليه (وضح وجود إجابتين) « ص + ٢ س − ٣ = ٠ ، ص − ٢ س + ١ = ٠ »

٢٩ أوجد معادلة المماس للمنحنى : ص = ٥ س − ٢ س^{٢} − ٤ عند النقطة (١ ، −١) الواقعة عليه وإذا قطع هذا المماس محور الصادات فى النقطة أ وقطع محور السينات فى النقطة ب أوجد مساحة Δ و أ ب حيث و (٠ ، ٠) « ص = س − ٢ ، ٢ وحدة مربعة »

٣٠ **أوجد معادلة المماس للمنحنى :** ص = $\sqrt{٢٥ - س^{٢}}$ عند النقطة أ (٣ ، ٤) الواقعة عليه وإذا قطع هذا المماس محور السينات عند النقطة ب أوجد مساحة Δ أ ب و حيث و هى نقطة الأصل.

« ٤ ص + ٣ س = ٢٥ ، $\frac{٥}{٣}$ وحدة مربعة »

---

٣١ أثبت أن مساحة المثلث المحصور بين المماس للمنحنى ص = $\frac{١}{س}$ حيث س > صفر عند أى نقطة عليه ومحورى الإحداثيات تساوى ٢ وحدة مربعة.

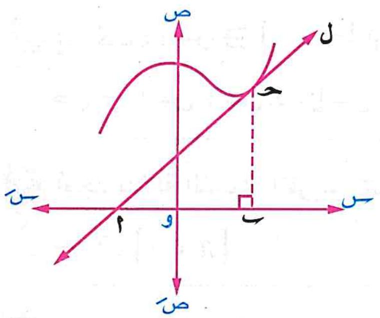
ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) معدل تغير ميل المماس للدالة د : د (س) = ٢ $س^{٣}$ عند س = ٣ يساوى ....

(أ) ٣٠ (ب) ٣٢ (جـ) ٣٤ (د) ٣٦

(٢) فى الشكل المقابل :



إذا كان المستقيم ل مماسًا لمنحنى الدالة د عند النقطة جـ

، يقطع محور السينات فى النقطة أ (−٤ ، ٠) وكانت ب (٤ ، ٠)

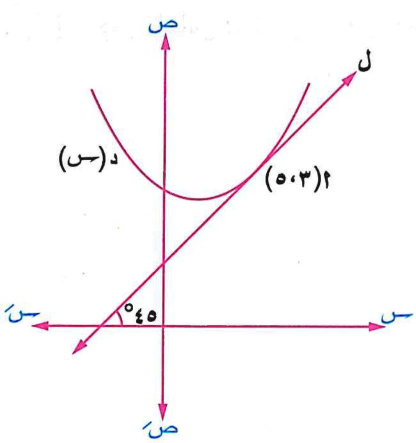
وكان د (٤) + د َ (٤) = ٩

فإن مساحة Δ أ ب جـ = ... وحدة مربعة.

(أ) ٣٠ (ب) ٣٢

(جـ) ٣٦ (د) ٤٢

(٣) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



والمستقيم ل يمس منحنى الدالة عند النقطة

أ (٣ ، ٥) وكان هـ (س) = س . د (س)

فإن : هـ َ (٣) = ...

(أ) ٣ (ب) ١

(جـ) ٥ (د) ٨

(٤) إذا كان منحنيا الدالتين د ، م متماسان عند النقطة (٢ ، ٣)

وكانت ع (س) = س د (س) − ٢ م (س) فإن : ع َ (٢) = ...

(أ) −٣ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ٣

٢ أوجد مساحة سطح المثلث المكون من محور السينات والمماس والعمودى عليه للمنحنى

ص = $س^٢$ − ٦ س + ١٣ عند النقطة (٤ ، ٥) الواقعة عليه. « ٣١,٢٥ وحدة مربعة »

٣ **أوجد معادلة المماس للمنحنى :** ص + $\sqrt{س}$ = ١٢ عند نقطة تقاطع المنحنى مع المستقيم ص = س

« س + ٦ ص − ٦٣ = ٠ »

٤ إذا كان المماس للمنحنى : ص = $\frac{-س}{أ + ب س}$ المرسوم عند النقطة (−١ ، ١) الواقعة على المنحنى يصنع

مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها هـ حيث : جتا هـ = $\frac{-١}{\sqrt{١٠}}$

فأوجد قيمتى : أ ، ب « ٣ ، ٢ »

٥ **أثبت أن المنحنيين :** ص = ٣ $س^٢$ − ٥ س − ٢ ، ص = $س^٢$ − ٣ س − ٢ يتقاطعان على التعامد عند

النقطة (١ ، −٤)

٦ إذا كانت : س ∈ [٠ ، π] أوجد قياس الزاوية الحادة بين المماسين للمنحنيين :

ص = جا س ، ص = جتا س عند نقطة تقاطعهما. « ٤٤ َ ٣١ ً ٧٠° »

٧ أوجد بدلالة النسبة التقريبية π معادلة المماس للمنحنى : ص = جتا (س + ص) والذى ميله = −$\frac{١}{٢}$ حيث

س ∈ [٠ ، π] « ٢ س + ٤ ص − π = ٠ »

٨ أوجد النقط الواقعة على منحنى الدالة : ص = $\frac{١}{٣}$ $س^٣$ − $\frac{٣}{٢}$ $س^٢$ + س + ١ والتى يصنع المماس والعمودى

على المماس عندها مع محور السينات مثلثًا متساوى الساقين.

٩ إذا كان المماس للمنحنى : ص = $س^٢$ يمر بالنقطة (٣ ، ٥) فأوجد معادلة هذا المماس.

« ص − ٢ س + ١ = ٠ ، أ ص − ١٠ س + ٢٥ = ٠ »

الدرس 7

التكامل

درسنا فيما سبق كيفية الحصول على الدالة المشتقة دَ من الدالة الأصلية د وهو ما يسمى بالتفاضل أو الاشتقاق ولكن قد يكون المطلوب فى بعض التطبيقات الحصول على الدالة د إذا علمت الدالة المشتقة دَ ولذلك نلجأ لإجراء عملية عكسية لعملية التفاضل تسمى عملية التكامل

الدالة د		الدالة دَ
	عملية تفاضل ←	
	عملية تكامل →	

وتسمى الدالة الناتجة بالمشتقة العكسية أو الدالة الأصلية المقابلة للدالة.

تعريف

يقال إن الدالة ت مشتقة عكسية للدالة د إذا كانت تَ (س) = د (س) لكل س فى مجال د

فمثلاً : إذا كانت : د (س) = س^{٢} فإن : دَ (س) = ٢ س

وحسب التعريف السابق تكون س^{٢} هى مشتقة عكسية أو دالة أصلية مقابلة للدالة ٢ س إلا أننا نلاحظ أن الدوال س^{٢} ، س^{٢} + ٣ ، س^{٢} − ٥ ، .... ، س^{٢} + ث (حيث ث ثابت) جميعها لها نفس المشتقة ٢ س وهذا معناه أن المشتقة العكسية أو الدالة الأصلية المقابلة للدالة ٢ س ليست وحيدة.

ملاحظة

إذا كان : كل من د$_{١}$ ، د$_{٢}$ مشتقة عكسية للدالة د فإن : د$_{١}$ (س) = د$_{٢}$ (س) + ث

التكامل غير المحدد

مجموعة المشتقات العكسية للدالة د تسمى التكامل غير المحدد لهذه الدالة ويرمز لها بالرمز [∫ د (س) ء س]

ويقرأ [تكامل دالة س بالنسبة إلى س]

تعريف

إذا كان : $\text{تَ}(س) = \text{د}(س)$ فإن : $\int \text{د}(س)\,ءس = \text{ت}(س) + \text{ث}$

حيث ث ثابت اختيارى (ثابت التكامل)

فمثلًا : إذا كان : $\frac{ء}{ءس}(س^{٣}) = ٣س^{٢}$ $\therefore \int ٣س^{٢}\,ءس = س^{٣} + \text{ث}$

، إذا كان : $\frac{ء}{ءس}(٣س^{٥} + ١) = ١٥س^{٤}$ $\therefore \int ١٥س^{٤}\,ءس = ٣س^{٥} + \text{ث}$

* لتعيين قيمة الثابت ث يلزم معرفة قيمة التكامل عند قيمة معينة للمتغير المستقل س وهذا خارج نطاق دراستك.

مثال ١

أثبت أن : ١ الدالة ت : $\text{ت}(س) = \frac{١}{٢}س^{٨}$ هى مشتقة عكسية للدالة د : $\text{د}(س) = ٤س^{٧}$

٢ $\int \frac{س}{\sqrt{١ + س^{٢}}}\,ءس = \sqrt{١ + س^{٢}} + \text{ث}$

الحل

١ $\because \text{ت}(س) = \frac{١}{٢}س^{٨}$ $\therefore \text{تَ}(س) = \frac{١}{٢} \times ٨س^{٧} = ٤س^{٧}$

$\therefore \text{تَ}(س) = \text{د}(س)$ $\therefore$ الدالة ت مشتقة عكسية للدالة د

٢ $\because \frac{ء}{ءس}\left[\sqrt{١ + س^{٢}} + \text{ث}\right] = \frac{١ \times ٢س}{٢\sqrt{١ + س^{٢}}} + \text{صفر} = \frac{س}{\sqrt{١ + س^{٢}}}$

$\therefore \int \frac{س}{\sqrt{١ + س^{٢}}}\,ءس = \sqrt{١ + س^{٢}} + \text{ث}$

قاعدة

$\int س^{ن}\,ءس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + \text{ث}$ حيث ث ثابت ، $ن \neq -١$

فمثلًا :

* $\int س^{٥}\,ءس = \frac{س^{٦}}{٦} + \text{ث} = \frac{١}{٦}س^{٦} + \text{ث}$

* $\int س^{\frac{٣}{٤}}\,ءس = \frac{س^{\frac{٧}{٤}}}{\frac{٧}{٤}} + \text{ث} = \frac{٤}{٧}س^{\frac{٧}{٤}} + \text{ث}$

* $\int \frac{١}{ص^{٤}}\,ءص = \int ص^{-٤}\,ءص = \frac{ص^{-٣}}{-٣} + \text{ث} = \frac{-١}{٣ص^{٣}} + \text{ث}$

* $\int \frac{١}{\sqrt[٣]{ن}}\,ءن = \int ن^{-\frac{١}{٣}}\,ءن = \frac{ن^{\frac{٢}{٣}}}{\frac{٢}{٣}} + \text{ث} = \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{ن^{٢}} + \text{ث}$

لاحظ أن :
القاعدة السابقة تعنى أنه عند إيجاد التكامل نقوم بزيادة الأس واحد ونقسم على الأس الجديد.

* لاحظ أن برهان القاعدة السابقة ينتج مباشرة بمفاضلة الطرف الأيسر كما يلى :

$\frac{ء}{ءس}\left(\frac{س^{ن+١}}{ن+١} + \text{ث}\right) = \frac{(ن+١)س^{ن}}{(ن+١)} + \text{صفر} = س^{ن}$ $\therefore \int س^{ن}\,ءس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + \text{ث}$

خواص التكامل

إذا كانت د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق على فترة ما فإن :

١ $\int أ\,د(س)\,ءس = أ\int د(س)\,ءس$ حيث : أ ثابت $\neq$ صفر

فمثلًا : $\int ٦س^{٢}\,ءس = ٦\int س^{٢}\,ءس = ٦ \times \frac{س^{٣}}{٣} + ث = ٢س^{٣} + ث$

٢ $\int [د(س) \pm ر(س)]\,ءس = \int د(س)\,ءس \pm \int ر(س)\,ءس$

فمثلًا : $\int (٢س^{٣} + ٤س)\,ءس = \int ٢س^{٣}\,ءس + \int ٤س\,ءس$

$= \left(\frac{٢س^{٤}}{٤} + ث_{١}\right) + \left(\frac{٤س^{٢}}{٢} + ث_{٢}\right)$

$= \frac{١}{٢}س^{٤} + ٢س^{٢} + ث_{١} + ث_{٢}$

$= \frac{١}{٢}س^{٤} + ٢س^{٢} + ث$ (حيث $ث = ث_{١} + ث_{٢}$)

* لا داعى لإضافة ثابت لكل مشتقة عكسية ونكتفى بإضافة ثابت واحد يساوى مجموع الثوابت الناتجة كما يلى :

$\int (٢س^{٣} + ٤س)\,ءس = \frac{١}{٢}س^{٤} + ٢س^{٢} + ث$

ملاحظتان

* يمكن تعميم الخاصية **٢** السابقة على أى عدد محدود من الدوال أى أن :

$\int \left(د_{١}(س) \pm د_{٢}(س) \pm \cdots \pm د_{ن}(س)\right)ءس$

$= \int د_{١}(س)\,ءس \pm \int د_{٢}(س)\,ءس \pm \cdots \pm \int د_{ن}(س)\,ءس$

* $\int أ\,ءس = أس + ث$ حيث أ ثابت ومنها نجد أن : $\int ءس = س + ث$ ، $\int$ صفر $ءس = ث$

مثال ٢

أوجد :

١ $\int \frac{٣}{٢س^{٢}}\,ءس$

٢ $\int ٥ف\sqrt{ف}\,ءف$

٣ $\int \frac{٤}{\sqrt[٥]{س^{٣}}}\,ءس$

٤ $\int \frac{١}{س^{٣}\sqrt[٣]{س}}\,ءس$

الحل

١ $\int \frac{٣}{٢س^{٢}}\,ءس = \int \frac{٣}{٢}س^{-٢}\,ءس = \frac{٣}{٢}\int س^{-٢}\,ءس = \frac{٣}{٢} \times \frac{س^{-١}}{-١} + ث = \frac{-٣}{٢س} + ث$

٢ $\int ٥ف\sqrt{ف}\,ءف = \int ٥ف \times ف^{\frac{١}{٢}}\,ءف = ٥\int ف^{\frac{٣}{٢}}\,ءف = \frac{٥ \times ٢ف^{\frac{٥}{٢}}}{٥} + ث = ٢\sqrt{ف^{٥}} + ث$

٣ $\int \frac{٤}{\sqrt[٥]{س^{٣}}}\,ءس = \int ٤س^{-\frac{٣}{٥}}\,ءس = \frac{٤س^{\frac{٢}{٥}}}{\frac{٢}{٥}} + ث = ١٠س^{\frac{٢}{٥}} + ث$

٤ $\int \frac{١}{س^{٣}\sqrt[٣]{س}}\,ءس = \int س^{-٣} \times س^{-\frac{١}{٣}}\,ءس = \int س^{\frac{-١٠}{٣}}\,ءس = \frac{س^{\frac{-٧}{٣}}}{\frac{-٧}{٣}} + ث = \frac{-٣}{٧\sqrt[٣]{س^{٧}}} + ث$

مثال ③

أوجد : ① $\int (٣س^{٢} - ٤س + ٥)\, ءس$ | ② $\int \left(٨ + \sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}}\right) ءس$

③ $\int \left(٢س\sqrt{س} - \frac{٤}{٣\sqrt{س}} + ٨س^{-\frac{٧}{٤}} - ١\right) ءس$

الحل

① $\int (٣س^{٢} - ٤س + ٥)\, ءس = \frac{٣س^{٣}}{٣} - \frac{٤س^{٢}}{٢} + ٥س + ث = س^{٣} - ٢س^{٢} + ٥س + ث$

② $\int \left(٨ + \sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}}\right) ءس = \int \left(٨ + س^{\frac{١}{٢}} + س^{-\frac{١}{٢}}\right) ءس = ٨س + \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \frac{س^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + ث$

$= ٨س + \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + ٢س^{\frac{١}{٢}} + ث$

③ $\int \left(٢س\sqrt{س} - \frac{٤}{٣\sqrt{س}} + ٨س^{-\frac{٧}{٤}} - ١\right) ءس = \int \left(٢س^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٤}{٣}س^{-\frac{١}{٢}} + ٨س^{-\frac{٧}{٤}} - ١\right) ءس$

$= \frac{٢س^{\frac{٥}{٢}}}{\frac{٥}{٢}} - \frac{٤س^{\frac{١}{٢}}}{٣ \times \frac{١}{٢}} + \frac{٨س^{-\frac{٧}{٤}+١}}{-\frac{٧}{٤}+١} - س + ث$

$= \frac{٤}{٥}س^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٨}{٣}س^{\frac{١}{٢}} - \frac{٣٢}{٣}س^{\frac{-٣}{٤}} - س + ث$

مثال ④

أوجد : ① $\int (س - ٢)(س + ١)\, ءس$ | ② $\int س(٢س - ٣)^{٢}\, ءس$ | ③ $\int \left(س - \frac{١}{س}\right)^{٢} ءس$

④ $\int \frac{س^{٤} - ٢س^{٢} + ٦}{س^{٢}}\, ءس$ | ⑤ $\int \frac{س^{٢} - ٥س - ٦}{س + ١}\, ءس$ | ⑥ $\int \frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢}\, ءس$

الحل

① $\int (س - ٢)(س + ١)\, ءس = \int (س^{٢} - س - ٢)\, ءس = \frac{١}{٣}س^{٣} - \frac{١}{٢}س^{٢} - ٢س + ث$

② $\int س(٢س - ٣)^{٢}\, ءس = \int س(٤س^{٢} - ١٢س + ٩)\, ءس = \int (٤س^{٣} - ١٢س^{٢} + ٩س)\, ءس$

$= س^{٤} - ٤س^{٣} + \frac{٩}{٢}س^{٢} + ث$

③ $\int \left(س - \frac{١}{س}\right)^{٢} ءس = \int \left(س^{٢} - ٢ + \frac{١}{س^{٢}}\right) ءس$

$= \int (س^{٢} - ٢ + س^{-٢})\, ءس$

$= \frac{١}{٣}س^{٣} - ٢س - \frac{١}{س} + ث$

④ $\int \frac{س^{٤} - ٢س^{٢} + ٦}{س^{٢}}\, ءس = \int (س^{٢} - ٢ + ٦س^{-٢})\, ءس$

$= \frac{١}{٣}س^{٣} - ٢س + \frac{٦س^{-١}}{-١} + ث$

$= \frac{١}{٣}س^{٣} - ٢س - \frac{٦}{س} + ث$

لاحظ أنه :

لا توجد قاعدة عامة لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين أو خارج قسمتهما لذلك نلجأ إلى إجراء عملية الضرب أو القسمة أولاً قبل إجراء عملية التكامل.

٥ $\int \frac{س^{٢} - ٥س - ٦}{س + ١}\,ءس = \int \frac{(س + ١)(س - ٦)}{(س + ١)}\,ءس = \int (س - ٦)\,ءس = \frac{س^{٢}}{٢} - ٦س + ث$

٦ $\int \frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢}\,ءس = \int \frac{(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)}{(س - ٢)}\,ءس$

$= \int (س^{٢} + ٢س + ٤)\,ءس = \frac{س^{٣}}{٣} + \frac{٢س^{٢}}{٢} + ٤س + ث$

$= \frac{١}{٣}س^{٣} + س^{٢} + ٤س + ث$

بعض قواعد التكامل

١ $\int (أس + ب)^{ن}\,ءس = \frac{١}{أ} \times \frac{(أس + ب)^{ن+١}}{ن + ١} + ث$

٢ $\int (د(س))^{ن}\,دَ(س)\,ءس = \frac{(د(س))^{ن+١}}{ن + ١} + ث$ حيث ث ثابت ، $ن \neq -١$

مثال ٥

أوجد :

١ $\int (٢س + ٥)^{٣}\,ءس$

٢ $\int [(٧ - ٣س)^{٦} + ٩]\,ءس$

٣ $\int \frac{٨}{(٣ - ٢س)^{٥}}\,ءس$

٤ $\int \sqrt{٤س + ١}\,ءس$

٥ $\int \frac{ءس}{\sqrt{٤س + ١}}$

٦ $\int \sqrt{س - ٤}\,(س - ٤)^{٧}\,ءس$

الحل

١ $\int (٢س + ٥)^{٣}\,ءس = \frac{(٢س + ٥)^{٤}}{٤ \times ٢} + ث = \frac{١}{٨}(٢س + ٥)^{٤} + ث$

٢ $\int [(٧ - ٣س)^{٦} + ٩]\,ءس = \frac{(٧ - ٣س)^{٧}}{٧ \times -٣} + ٩س + ث = \frac{-١}{٢١}(٧ - ٣س)^{٧} + ٩س + ث$

٣ $\int \frac{٨}{(٣ - ٢س)^{٥}}\,ءس = \int ٨(٣ - ٢س)^{-٥}\,ءس = \frac{٨(٣ - ٢س)^{-٤}}{-٤ \times -٢} + ث = (٣ - ٢س)^{-٤} + ث$

٤ $\int \sqrt{٤س + ١}\,ءس = \int (٤س + ١)^{\frac{١}{٢}}\,ءس = \frac{(٤س + ١)^{\frac{٣}{٢}}}{٤ \times \frac{٣}{٢}} + ث = \frac{١}{٦}(٤س + ١)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

٥ $\int \frac{ءس}{\sqrt{٤س + ١}} = \int (٤س + ١)^{-\frac{١}{٢}}\,ءس = \frac{(٤س + ١)^{\frac{١}{٢}}}{٤ \times \frac{١}{٢}} + ث = \frac{١}{٢}(٤س + ١)^{\frac{١}{٢}} + ث$

٦ $\int \sqrt{س - ٤}\,(س - ٤)^{٧}\,ءس = \int (س - ٤)^{\frac{١}{٢}}(س - ٤)^{٧}\,ءس = \int (س - ٤)^{٧,٥}\,ءس$

$= \frac{(س - ٤)^{٨,٥}}{٨,٥} + ث$

مثال ٦

أوجد:

١ $\int \text{س}\,(\text{س}^{٢}+٥)^{٧}\,\text{ءس}$

٢ $\int (٢\text{س}^{٣}-١٠\text{س}+١)^{٩}\,(٣\text{س}^{٢}-٥)\,\text{ءس}$

٣ $\int \frac{\text{س}^{٤}}{(\text{س}^{٥}+١)^{٧}}\,\text{ءس}$

٤ $\int \frac{\text{س}^{٢}+١}{(\text{س}^{٣}+٣\text{س})^{٦}}\,\text{ءس}$

٥ $\int \text{س}\,(٦\text{س}^{٣}-٣\text{س}^{٢}+٧)^{٧}\,(٣\text{س}-١)\,\text{ءس}$

الحل

١ بفرض أن : $\text{د}(\text{س})=\text{س}^{٢}+٥$ $\quad\therefore\ \text{دَ}(\text{س})=٢\text{س}$

$$\therefore \int \text{س}\,(\text{س}^{٢}+٥)^{٧}\,\text{ءس}=\frac{١}{٢}\int (٢\text{س})\,(\text{س}^{٢}+٥)^{٧}\,\text{ءس}=\frac{١}{٢}\times\frac{(\text{س}^{٢}+٥)^{٨}}{٨}+\text{ث}$$

$$=\frac{١}{١٦}(\text{س}^{٢}+٥)^{٨}+\text{ث}$$

٢ بفرض أن $\text{د}(\text{س})=٢\text{س}^{٣}-١٠\text{س}+١$ $\quad\therefore\ \text{دَ}(\text{س})=٦\text{س}^{٢}-١٠=٢(٣\text{س}^{٢}-٥)$

$$\therefore \int (٢\text{س}^{٣}-١٠\text{س}+١)^{٩}\,(٣\text{س}^{٢}-٥)\,\text{ءس}$$

$$=\frac{١}{٢}\int (٢\text{س}^{٣}-١٠\text{س}+١)^{٩}\times ٢\,(٣\text{س}^{٢}-٥)\,\text{ءس}$$

$$=\frac{١}{٢}\times\frac{(٢\text{س}^{٣}-١٠\text{س}+١)^{١٠}}{١٠}+\text{ث}=\frac{١}{٢٠}(٢\text{س}^{٣}-١٠\text{س}+١)^{١٠}+\text{ث}$$

٣ بفرض أن : $\text{د}(\text{س})=\text{س}^{٥}+١$ $\quad\therefore\ \text{دَ}(\text{س})=٥\text{س}^{٤}$

$$\therefore \int \frac{\text{س}^{٤}}{(\text{س}^{٥}+١)^{٧}}\,\text{ءس}=\int \text{س}^{٤}\,(\text{س}^{٥}+١)^{-٧}\,\text{ءس}=\frac{١}{٥}\int ٥\text{س}^{٤}\,(\text{س}^{٥}+١)^{-٧}\,\text{ءس}$$

$$=\frac{١}{٥}\times\frac{(\text{س}^{٥}+١)^{-٦}}{-٦}+\text{ث}$$

$$=\frac{-١}{٣٠}(\text{س}^{٥}+١)^{-٦}+\text{ث}$$

٤ بفرض أن : $\text{د}(\text{س})=\text{س}^{٣}+٣\text{س}$ $\quad\therefore\ \text{دَ}(\text{س})=٣\text{س}^{٢}+٣=٣(\text{س}^{٢}+١)$

$$\therefore \int \frac{\text{س}^{٢}+١}{(\text{س}^{٣}+٣\text{س})^{٦}}\,\text{ءس}=\int (\text{س}^{٢}+١)\,(\text{س}^{٣}+٣\text{س})^{-٦}\,\text{ءس}$$

$$=\frac{١}{٣}\int ٣\,(\text{س}^{٢}+١)\,(\text{س}^{٣}+٣\text{س})^{-٦}\,\text{ءس}$$

$$=\frac{١}{٣}\times\frac{(\text{س}^{٣}+٣\text{س})^{-٥}}{-٥}+\text{ث}=\frac{-١}{١٥}(\text{س}^{٣}+٣\text{س})^{-٥}+\text{ث}$$

٥ بفرض أن : $\text{د}(\text{س})=٦\text{س}^{٣}-٣\text{س}^{٢}+٧$ $\quad\therefore\ \text{دَ}(\text{س})=١٨\text{س}^{٢}-٦\text{س}=٦\text{س}\,(٣\text{س}-١)$

$$\therefore \int \text{س}\,(٦\text{س}^{٣}-٣\text{س}^{٢}+٧)^{٧}\,(٣\text{س}-١)\,\text{ءس}$$

$$=\frac{١}{٦}\int (٦\text{س}^{٣}-٣\text{س}^{٢}+٧)^{٧}\times ٦\text{س}\,(٣\text{س}-١)\,\text{ءس}$$

$$=\frac{١}{٦}\times\frac{(٦\text{س}^{٣}-٣\text{س}^{٢}+٧)^{٨}}{٨}+\text{ث}=\frac{١}{٤٨}(٦\text{س}^{٣}-٣\text{س}^{٢}+٧)^{٨}+\text{ث}$$

مثال ٧

أوجد :

١ $\int \text{س}^{6}\left(3-\frac{2}{\text{س}}\right)^{6}\,\text{ءس}$

٢ $\int \left(\text{س}\sqrt{\frac{3}{\text{س}}-\frac{2}{\text{س}^{2}}}\right)\text{ءس}$

٣ $\int \text{س}\,(\text{س}+4)^{8}\,\text{ءس}$

٤ $\int \text{س}^{15}\left(\frac{1}{\text{س}}+\frac{1}{\text{س}^{2}}\right)^{7}\text{ءس}$

٥ $\int \frac{\text{س}+3}{\sqrt{\text{س}-1}}\,\text{ءس}$

٦ $\int \frac{2\text{س}-1}{(2\text{س}+3)^{4}}\,\text{ءس}$

الحل

١ $\int \text{س}^{6}\left(3-\frac{2}{\text{س}}\right)^{6}\text{ءس} = \int \left(\text{س}\left(3-\frac{2}{\text{س}}\right)\right)^{6}\text{ءس} = \int (3\text{س}-2)^{6}\,\text{ءس}$

$= \frac{(3\text{س}-2)^{7}}{7\times 3} + \text{ث}$

$= \frac{1}{21}(3\text{س}-2)^{7} + \text{ث}$

٢ $\int \left(\text{س}\sqrt{\frac{3}{\text{س}}-\frac{2}{\text{س}^{2}}}\right)\text{ءس} = \int \sqrt{\text{س}^{2}\left(\frac{3}{\text{س}}-\frac{2}{\text{س}^{2}}\right)}\,\text{ءس} = \int \sqrt{3\text{س}-2}\,\text{ءس}$

$= \int (3\text{س}-2)^{\frac{1}{2}}\,\text{ءس} = \frac{(3\text{س}-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\times 3} + \text{ث}$

$= \frac{2}{9}(3\text{س}-2)^{\frac{3}{2}} + \text{ث}$

٣ $\int \text{س}(\text{س}+4)^{8}\,\text{ءس} = \int (\text{س}+4-4)(\text{س}+4)^{8}\,\text{ءس}$

$= \int (\text{س}+4)^{9}\,\text{ءس} - 4\int (\text{س}+4)^{8}\,\text{ءس}$

$= \frac{(\text{س}+4)^{10}}{10} - 4\times\frac{(\text{س}+4)^{9}}{9} + \text{ث}$

$= \frac{1}{10}(\text{س}+4)^{10} - \frac{4}{9}(\text{س}+4)^{9} + \text{ث}$

٤ $\int \text{س}^{15}\left(\frac{1}{\text{س}}+\frac{1}{\text{س}^{2}}\right)^{7}\text{ءس} = \int \text{س}\times\text{س}^{14}\left(\frac{1}{\text{س}}+\frac{1}{\text{س}^{2}}\right)^{7}\text{ءس}$

$= \int \text{س}\left[\text{س}^{2}\left(\frac{1}{\text{س}}+\frac{1}{\text{س}^{2}}\right)\right]^{7}\text{ءس}$

$= \int \text{س}(\text{س}+1)^{7}\,\text{ءس}$

$= \int (\text{س}+1-1)(\text{س}+1)^{7}\,\text{ءس}$

$= \int (\text{س}+1)^{8}\,\text{ءس} - \int (\text{س}+1)^{7}\,\text{ءس}$

$= \frac{1}{9}(\text{س}+1)^{9} - \frac{1}{8}(\text{س}+1)^{8} + \text{ث}$

٥ $\int \frac{\text{س} + 3}{\sqrt{\text{س} - 1}}\, \text{ءس} = \int (\text{س} + 3)(\text{س} - 1)^{-\frac{1}{2}}\, \text{ءس}$

$= \int (\text{س} - 1 + 4)(\text{س} - 1)^{-\frac{1}{2}}\, \text{ءس}$

$= \int (\text{س} - 1)^{\frac{1}{2}}\, \text{ءس} + 4 \int (\text{س} - 1)^{-\frac{1}{2}}\, \text{ءس}$

$= \frac{(\text{س} - 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 4 \times \frac{(\text{س} - 1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \text{ث}$

$= \frac{2}{3}(\text{س} - 1)^{\frac{3}{2}} + 8(\text{س} - 1)^{\frac{1}{2}} + \text{ث}$

٦ $\int \frac{2\text{س} - 1}{(2\text{س} + 3)^4}\, \text{ءس} = \int (2\text{س} - 1)(2\text{س} + 3)^{-4}\, \text{ءس}$

$= \int (2\text{س} + 3 - 4)(2\text{س} + 3)^{-4}\, \text{ءس}$

$= \int (2\text{س} + 3)^{-3}\, \text{ءس} - 4 \int (2\text{س} + 3)^{-4}\, \text{ءس}$

$= \frac{(2\text{س} + 3)^{-2}}{-2 \times 2} - 4 \times \frac{(2\text{س} + 3)^{-3}}{-3 \times 2} + \text{ث}$

$= -\frac{1}{4}(2\text{س} + 3)^{-2} + \frac{2}{3}(2\text{س} + 3)^{-3} + \text{ث}$

ملاحظة

* $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \int \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} = \text{د}(\text{س})$ بينما $\int \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} [\text{د}(\text{س})]\, \text{ءس} = \text{د}(\text{س}) + \text{ث}$

فمثلاً : $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \int \text{س}^5\, \text{ءس} = \text{س}^5$ بينما $\int \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (\text{س}^5)\, \text{ءس} = \text{س}^5 + \text{ث}$

تكامل بعض الدوال المثلثية

علمنا من دراستنا السابقة لاشتقاق الدوال المثلثية أنه :

١ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (\text{جا س}) = \text{جتا س}$

٢ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (\text{جتا س}) = -\text{ جا س}$

٣ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (\text{ظا س}) = \text{قا}^2\text{ س}$

٤ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (\text{ظتا س}) = -\text{ قتا}^2\text{ س}$

٥ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (\text{قا س}) = \text{قا س ظا س}$

٦ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (\text{قتا س}) = -\text{ قتا س ظتا س}$

وحيث إن عملية التكامل هى عملية الحصول على الدالة الأصلية من مشتقتها فإنه يمكن استنتاج التكاملات الآتية :

١ $\int \text{جتا س ءس} = \text{جا س} + \text{ث}$

٢ $\int \text{جا س ءس} = -\text{ جتا س} + \text{ث}$

٣ $\int \text{قا}^2\text{ س ءس} = \text{ظا س} + \text{ث}$

٤ $\int \text{قتا}^2\text{ س ءس} = -\text{ ظتا س} + \text{ث}$

٥ $\int \text{قا س ظا س ءس} = \text{قا س} + \text{ث}$

٦ $\int \text{قتا س ظتا س ءس} = -\text{ قتا س} + \text{ث}$

حيث ث ثابت اختيارى

نتائج هامة

١ $\int$ حا (أ س + ب) ء س = − $\frac{١}{أ}$ حتا (أ س + ب) + ث

٢ $\int$ حتا (أ س + ب) ء س = $\frac{١}{أ}$ حا (أ س + ب) + ث

٣ $\int$ قا^{٢} (أ س + ب) ء س = $\frac{١}{أ}$ طا (أ س + ب) + ث

٤ $\int$ قتا^{٢} (أ س + ب) ء س = − $\frac{١}{أ}$ طتا (أ س + ب) + ث

٥ $\int$ قا (أ س + ب) طا (أ س + ب) ء س = $\frac{١}{أ}$ قا (أ س + ب) + ث

٦ $\int$ قتا (أ س + ب) طتا (أ س + ب) ء س = − $\frac{١}{أ}$ قتا (أ س + ب) + ث

وبرهان كل من الحالات السابقة ينتج مباشرة بمفاضلة الطرف الأيسر.

مثال ٨

أوجد :

١ $\int$ حتا (٥ س + ٦) ء س

٢ $\int$ حا ($\frac{س}{٢}$ + ٣) ء س

٣ $\int$ (٥ حتا س − ٧ حا $\frac{س}{٢}$) ء س

٤ $\int$ (٣ − س + قا^{٢} $\frac{١}{٤}$ س) ء س

٥ $\int$ (٣ س^{٢} + $\frac{١}{حتا^{٢} س}$ + حا $\frac{\pi}{٦}$) ء س

٦ $\int$ (١ + قا س) (١ − قا س) ء س

٧ $\int$ قا س (قا س + طا س) ء س

٨ $\int$ قتا س (طتا س + قتا س) ء س

الحل

١ $\int$ حتا (٥ س + ٦) ء س = $\frac{١}{٥}$ حا (٥ س + ٦) + ث

٢ $\int$ حا ($\frac{س}{٢}$ + ٣) ء س = − $\frac{١}{\frac{١}{٢}}$ حتا ($\frac{س}{٢}$ + ٣) + ث = −٢ حتا ($\frac{س}{٢}$ + ٣) + ث

٣ $\int$ (٥ حتا س − ٧ حا $\frac{س}{٢}$) ء س = ٥ حا س + ١٤ حتا $\frac{س}{٢}$ + ث

٤ $\int$ (٣ − س + قا^{٢} $\frac{١}{٤}$ س) ء س = ٣ س − $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٤ طا $\frac{١}{٤}$ س + ث

٥ $\int$ (٣ س^{٢} + $\frac{١}{حتا^{٢} س}$ + حا $\frac{\pi}{٦}$) ء س

= $\int$ (٣ س^{٢} + قا^{٢} س + $\frac{١}{٢}$) ء س

= س^{٣} + طا س + $\frac{١}{٢}$ س + ث

لاحظ أن :
حا $\frac{\pi}{٦}$ = حا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ (مقدار ثابت)

٦ $\int$ (١ + قا س) (١ − قا س) ء س = $\int$ (١ − قا^{٢} س) ء س = س − طا س + ث

٧ $\int$ قا س (قا س + طا س) ء س = $\int$ (قا^{٢} س + قا س طا س) ء س = طا س + قا س + ث

٨ $\int$ قتا س (طتا س + قتا س) ء س = $\int$ (قتا س طتا س + قتا^{٢} س) ء س = − قتا س − طتا س + ث

مثال ٩

أوجد :

١ $\int \left(\text{قا}^2 \frac{\text{س}}{4} + \text{قا}^2 \frac{\pi}{4}\right) \text{ء س}$

٢ $\int \left[١ + \text{طا}^2 (٢\text{س} - ٥) \right] \text{ء س}$

٣ $\int (٥ + \text{طا}^2 \text{س}) \text{ء س}$

٤ $\int (\text{حا س} + \text{حتا س})^2 \text{ء س}$

٥ $\int \text{حا}^2 \text{س ء س}$

٦ $\int (١ + \text{حتا س})^2 \text{ء س}$

٧ $\int \left(\text{حتا س حتا} \frac{\pi}{3} + \text{حا س حا} \frac{\pi}{3}\right) \text{ء س}$

الحل

١ $\int \left(\text{قا}^2 \frac{\text{س}}{4} + \text{قا}^2 \frac{\pi}{4}\right) \text{ء س}$

$= \frac{1}{\frac{1}{4}} \text{طا} \frac{\text{س}}{4} + \text{س قا}^2 \frac{\pi}{4} + \text{ث}$

$= ٤ \text{طا} \frac{\text{س}}{4} + ٢\text{س} + \text{ث}$

لاحظ أن :

$\text{قا}^2 \frac{\pi}{4} = \text{قا}^2 ٤٥^\circ = \left(\sqrt{2}\right)^2 = ٢$ (مقدار ثابت)

٢ $\int \left[١ + \text{طا}^2 (٢\text{س} - ٥) \right] \text{ء س} = \int \text{قا}^2 (٢\text{س} - ٥) \text{ء س}$

$= \frac{1}{2} \text{طا} (٢\text{س} - ٥) + \text{ث}$

تذكر أن

* $١ + \text{طا}^2 \text{س} = \text{قا}^2 \text{س}$
* $١ + \text{ظتا}^2 \text{س} = \text{قتا}^2 \text{س}$

٣ $\int (٥ + \text{طا}^2 \text{س}) \text{ء س} = \int \left[٤ + (١ + \text{طا}^2 \text{س}) \right] \text{ء س}$

$= \int (٤ + \text{قا}^2 \text{س}) \text{ء س} \quad = ٤\text{س} + \text{طا س} + \text{ث}$

٤ $\int (\text{حا س} + \text{حتا س})^2 \text{ء س} = \int (\text{حا}^2 \text{س} + \text{حتا}^2 \text{س} + ٢ \text{حا س حتا س}) \text{ء س}$

$= \int (١ + \text{حا} ٢\text{س}) \text{ء س}$

$= \text{س} - \frac{1}{2} \text{حتا} ٢\text{س} + \text{ث}$

تذكر أن

* $\text{حا}^2 \text{س} + \text{حتا}^2 \text{س} = ١$
* $\text{حا} ٢\text{س} = ٢ \text{حا س حتا س}$

٥ $\int \text{حا}^2 \text{س ء س} = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{حتا} ٢\text{س}\right) \text{ء س}$

$= \frac{1}{2} \text{س} - \frac{1}{4} \text{حا} ٢\text{س} + \text{ث}$

تذكر أن

$\text{حتا} ٢\text{س} = ١ - ٢ \text{حا}^2 \text{س}$

ومنها

$\boxed{\text{حا}^2 \text{س} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{حتا} ٢\text{س}}$

، $\text{حتا} ٢\text{س} = ٢ \text{حتا}^2 \text{س} - ١$

ومنها

$\boxed{\text{حتا}^2 \text{س} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{حتا} ٢\text{س}}$

٦ $\int (١ + \text{حتا س})^2 \text{ء س} = \int (١ + ٢ \text{حتا س} + \text{حتا}^2 \text{س}) \text{ء س}$

$= \int (١ + ٢ \text{حتا س} + \frac{1}{2}$

$+ \frac{1}{2} \text{حتا} ٢\text{س}) \text{ء س}$

$= \int \left(\frac{3}{2} + ٢ \text{حتا س} + \frac{1}{2} \text{حتا} ٢\text{س}\right) \text{ء س}$

$= \frac{3}{2} \text{س} + ٢ \text{حا س} + \frac{1}{4} \text{حا} ٢\text{س} + \text{ث}$

٧ $\int \left(\text{حتا س حتا} \frac{\pi}{3} + \text{حا س حا} \frac{\pi}{3}\right) \text{ء س}$

$= \int \text{حتا} \left(\text{س} - \frac{\pi}{3}\right) \text{ء س}$

$= \text{حا} \left(\text{س} - \frac{\pi}{3}\right) + \text{ث}$

تذكر أن

* $\text{حتا} (\text{س} \pm \text{ص}) = \text{حتا س حتا ص} \mp \text{حا س حا ص}$
* $\text{حا} (\text{س} \pm \text{ص}) = \text{حا س حتا ص} \pm \text{حتا س حا ص}$

مثال ١٠

أوجد :

١ $\int (1 + \text{ظا}^2\text{س})\ \text{جتا}^2\text{س}\ \text{ءس}$

٢ $\int \text{جتا}^5\text{س}\ \text{جاس}\ \text{ءس}$

٣ $\int 4\ \text{ظاس}\ \text{قا}^2\text{س}\ \text{ءس}$

٤ $\int (\text{جاس} + \text{ظاس})^8\ (\text{جتاس} + \text{قا}^2\text{س})\ \text{ءس}$

٥ $\int \frac{1}{1 - \text{جتا}^2\text{س}}\ \text{ءس}$

٦ $\int \frac{\text{جتاس}}{1 - \text{جتا}^2\text{س}}\ \text{ءس}$

الحل

١ $\int (1 + \text{ظا}^2\text{س})\ \text{جتا}^2\text{س}\ \text{ءس} = \int \text{قا}^2\text{س}\ \text{جتا}^2\text{س}\ \text{ءس}$

$= \int (\text{قاس}\ \text{جتاس})^2\ \text{ءس}$

$= \int 1\ \text{ءس} = \text{س} + \text{ث}$

٢ بوضع $\text{د}(\text{س}) = \text{جتاس}$ $\therefore \text{د}'(\text{س}) = -\text{جاس}$

$\therefore \int \text{جتا}^5\text{س}\ \text{جاس}\ \text{ءس}$

$= -\int (\text{جتاس})^5\ (-\text{جاس})\ \text{ءس}$

$= -\frac{(\text{جتاس})^6}{6} + \text{ث}$

$= -\frac{1}{6}\ \text{جتا}^6\text{س} + \text{ث}$

تذكر أن

$\int [\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}} \times \text{د}'(\text{س})\ \text{ءس}$
$= \frac{[\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$

٣ بوضع $\text{د}(\text{س}) = \text{ظاس}$ $\therefore \text{د}'(\text{س}) = \text{قا}^2\text{س}$

$\therefore \int 4\ \text{ظاس}\ \text{قا}^2\text{س}\ \text{ءس} = 4 \int (\text{ظاس}) \times \text{قا}^2\text{س}\ \text{ءس}$

$= 4 \times \frac{\text{ظا}^2\text{س}}{2} + \text{ث} = 2\ \text{ظا}^2\text{س} + \text{ث}$

٤ بوضع $\text{د}(\text{س}) = \text{جاس} + \text{ظاس}$ $\therefore \text{د}'(\text{س}) = \text{جتاس} + \text{قا}^2\text{س}$

$\therefore \int (\text{جاس} + \text{ظاس})^8\ (\text{جتاس} + \text{قا}^2\text{س})\ \text{ءس} = \frac{1}{9}\ (\text{جاس} + \text{ظاس})^9 + \text{ث}$

٥ $\int \frac{1}{1 - \text{جتا}^2\text{س}}\ \text{ءس} = \int \frac{1}{\text{جا}^2\text{س}}\ \text{ءس} = \int \text{قتا}^2\text{س}\ \text{ءس} = -\text{ظتاس} + \text{ث}$

٦ $\int \frac{\text{جتاس}}{1 - \text{جتا}^2\text{س}}\ \text{ءس} = \int \frac{\text{جتاس}}{\text{جا}^2\text{س}}\ \text{ءس} = \int \left(\frac{1}{\text{جاس}} \times \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}\right) \text{ءس}$

$= \int (\text{قتاس}\ \text{ظتاس})\ \text{ءس} = -\text{قتاس} + \text{ث}$

تمارين 15

على التكامل

من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

• اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

تكامل بعض الدوال الجبرية

(١) $\int س \, ء س = \dots\dots\dots\dots + ث$

(أ) $س^{٢}$ (ب) $\frac{١}{٢} س$ (جـ) $\frac{١}{٢} س^{٢}$ (د) ١

(٢) $\int ص^{٨} \, ء ص = \dots\dots\dots\dots + ث$

(أ) $٨ ص^{٧}$ (ب) $\frac{١}{٩} ص^{٩}$ (جـ) صفر (د) $ص^{٩}$

(٣) $\int (س + ٢) \, ء س = \dots\dots\dots\dots + ث$

(أ) $٢ س^{٢} + ٢ س$ (ب) $س^{٢} + ٢ س$ (جـ) $\frac{١}{٢} س^{٢} + ٢ س$ (د) $(س + ٢)^{٢}$

(٤) $\int (-٣) \, ء س = \dots\dots\dots\dots + ث$

(أ) $-٣ س$ (ب) $س$ (جـ) $\frac{(-٣)^{٢}}{٢}$ (د) $\frac{-٣}{٢} س$

(٥) المشتقة العكسية للدالة د : د $(س) = ٣ س^{٢} - ٢ س + ٥$ هي $\dots\dots\dots\dots$

(أ) $٦ س - ٢$ (ب) $٣ س^{٢} - ٢ س + ٥$

(جـ) $س^{٣} - س^{٢} + ٥ س + ث$ (د) $\frac{١}{٣} س^{٣} - \frac{١}{٢} س^{٢} + ٥ س + ث$

(٦) $\int ٦ س^{-٣} \, ء س = \dots\dots\dots\dots + ث$

(أ) $-٣ س$ (ب) $-٣ س^{-١}$ (جـ) $-٣ س^{-٢}$ (د) $-١٨ س^{-٤}$

(٧) $\int س^{\frac{٢}{٣}} \, ء س = \dots\dots\dots\dots + ث$

(أ) $\frac{٣}{٥} س^{\frac{٥}{٣}}$ (ب) $\frac{٥}{٣} س^{\frac{٥}{٣}}$ (جـ) $\frac{٢}{٣} س^{-\frac{١}{٣}}$ (د) $س^{\frac{٥}{٣}}$

(٨) $\int \frac{ء س}{٥ س^{٤}} = \dots\dots\dots\dots + ث$

(أ) $\frac{٥}{س^{٥}}$ (ب) $\frac{-١}{٥ س^{٣}}$ (جـ) $\frac{-١}{١٥ س^{٣}}$ (د) $٥ س^{٣}$

(٩) $\int \sqrt[٧]{س^{٥}} \, ء س = \dots\dots\dots\dots + ث$

(أ) $\frac{١٢}{٧} س^{\frac{١٢}{٧}}$ (ب) $\sqrt[٧]{\frac{س^{٦}}{٦}}$ (جـ) $\frac{١}{٦} س^{٦}$ (د) $\frac{٧}{١٢} س^{\frac{١٢}{٧}}$

(١٠) ∫ ٥ $\sqrt{\text{س}^{٣}}$ ؤ س = ...

(أ) ٢ $\sqrt{\text{س}^{٥}}$ (ب) $\frac{٥}{٢}$ $\sqrt{\text{س}^{٤}}$ (جـ) ٥ س$^{\frac{٥}{٢}}$ (د) $\frac{٥}{٢}$ س^{٢}

(١١) ∫ $\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}}}$ ؤ س = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٢}$ س$^{\frac{١}{٢}}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ س$^{\frac{٣}{٢}}$ (جـ) ٢ س$^{-\frac{١}{٢}}$ (د) $\frac{٢}{٣}$ س$^{-\frac{٣}{٤}}$

(١٢) ∫ $\left(\frac{٢}{\text{ص}^{٣}} - \frac{٤}{\text{ص}^{٥}}\right)$ ؤ ص = ... + ث

(أ) − ص^{٢} + ص^{٤} (ب) − ص$^{-٢}$ + ص$^{-٤}$

(جـ) $\frac{٢}{٣}$ ص$^{-٣}$ − $\frac{٤}{٥}$ ص$^{-٥}$ (د) −٢ ص$^{-٢}$ + ٤ ص$^{-٤}$

(١٣) ∫ (س^{٢} − ٣ س −١) ؤ س = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + ٣ س − س (ب) $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} − س

(جـ) س^{٣} − ٣ س^{٢} − س (د) $\frac{١}{٢}$ (س^{٢} − ٣ س −١)^{٢}

(١٤) ∫ ٢ (٣ ع^{٢} − ٥) ؤ ع = ... + ث

(أ) (٣ ع^{٢} − ٥)^{٢} (ب) ٦ ع^{٢} − ١٠ (جـ) ٢ ع^{٣} − ١٠ع (د) ع^{٢} − ٥ ع

(١٥) ∫ (٢ $\sqrt{\text{س}}$ − ٦ س^{٢}) ؤ س = ... + ث

(أ) $\frac{٤}{٣}$ س$^{\frac{٣}{٢}}$ − ٢ س^{٣} (ب) $\frac{٤}{٣}$ س$^{٣\frac{١}{٢}}$ − ٢ س^{٣}

(جـ) س$^{\frac{٢}{٣}}$ − ٣ س (د) س$^{-\frac{١}{٢}}$ − ١٢ س

(١٦) ∫ $\left(٣ - \frac{١}{\sqrt{\text{س}}}\right)$ ؤ س = ... + ث

(أ) ٣ س − $\frac{١}{٢}$ س$^{\frac{١}{٢}}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} − $\frac{١}{\text{س}}$

(جـ) ٣ س − $\frac{١}{٢\ \text{س}}$ (د) ٣ س − ٢ س$^{\frac{١}{٢}}$

(١٧) ∫ س (س + ٣) ؤ س = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٢}$ (س + ٣)^{٢} (ب) $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + $\frac{٣}{٢}$ س^{٢}

(جـ) س^{٢} + ٣ س (د) س^{٣} + ٣ س

(١٨) ∫ (س − ٥) (س + ١) ؤ س = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − ٢ س^{٢} − ٥ س (ب) س^{٣} − ٢ س^{٢} − ٥ س

(جـ) $\frac{٢}{٣}$ س^{٣} − ٢ س^{٢} + ٥ س (د) $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − ٢ س^{٢} + ٥ س

(١٩) ∫ (س + ٢) (س − ٢) ؤ س = ...

(أ) س + ٤ + ث (ب) $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − ٤ س + ث

(جـ) س^{٣} − ٤ س + ث (د) (س^{٢} − ٤)^{٢} + ث

(٢٠) $\int \frac{س^{٢} + ٣س}{س} \, ءس = ...$

(أ) $س + ٣$ (ب) $\frac{١}{٢} س^{٢} + ٣س + ث$

(جـ) $س^{٢} + ٣س + ث$ (د) $\frac{س^{٣} + ٣س^{٢}}{س^{٢}}$

(٢١) $\int (س^{٢} - ٢)^{٢} \, ءس = ... + ث$

(أ) $\frac{١}{٣} (س^{٢} - ٢)^{٣}$ (ب) $٢ (س^{٢} - ٢) (٢س)$

(جـ) $\frac{١}{٥} س^{٥} - \frac{٤}{٣} س^{٣} + ٤س$ (د) $س^{٤} - ٤س^{٢} + ٤$

(٢٢) $\int (\sqrt{س} - ١)^{٢} \, ءس = ... + ث$

(أ) $\frac{١}{٣} (\sqrt{س} - ١)$ (ب) $\frac{١}{٢} س^{٢} - \frac{٤}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + س$

(جـ) $\frac{١}{٣} (\sqrt{س} - ١)^{٣}$ (د) $\frac{١}{٢} س^{٢} + \frac{٤}{٣} س^{\frac{٣}{٢}}$

(٢٣) $\int (س - \frac{١}{س}) (س + \frac{١}{س}) (س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}}) \, ءس = ... + ث$

(أ) $س^{٥} + س^{-٣}$ (ب) $س^{٤} - \frac{١}{س^{٤}}$

(جـ) $\frac{١}{٥} س^{٥} + \frac{١}{٣} س^{-٣}$ (د) $س^{٥} + \frac{١}{٣} س^{-٣}$

(٢٤) $\int \frac{٢س^{٢} + ٣}{س^{٢}} \, ءس = ... + ث$

(أ) $٢س - ٣$ (ب) $\frac{١}{٢} س^{٢} - ٣س^{-١}$

(جـ) $س^{٢} - ٣س$ (د) $٢س - ٣س^{-١}$

(٢٥) $\int \frac{س^{٢} - ١}{س - ١} \, ءس = ... + ث$

(أ) $س + ١$ (ب) $\frac{١}{٢} س^{٢} + س$ (جـ) $س^{٢} + س$ (د) $س^{٢} + ٢س$

(٢٦) $\int \frac{س^{٣} - س}{س^{٢} + س} \, ءس = ... + ث$

(أ) $\frac{١}{٢} س^{٢} - س$ (ب) $س^{٢} - س$ (جـ) $\frac{٣}{٢} س^{٢} - \frac{١}{٢} س$ (د) $٢س^{٢} + ١$

(٢٧) $\int \frac{س^{٣} + ٨}{س^{٢} - ٢س + ٤} \, ءس = ... + ث$

(أ) $\frac{١}{٤} (س + ٢)^{٤}$ (ب) $س + ٢$ (جـ) $\frac{١}{٢} س^{٢} + ٢س$ (د) $\frac{١}{٣} (س + ٢)^{٣}$

(٢٨) $\int (٨ - ٣س)^{٤} \, ءس = ... + ث$

(أ) $\frac{١}{١٥} (٨ - ٣س)^{٥}$ (ب) $\frac{١}{٥} (٨ - ٣س)^{٥}$

(جـ) $-\frac{١}{٥} (٨ - ٣س)^{٥}$ (د) $-\frac{١}{١٥} (٨ - ٣س)^{٥}$

(٢٩) $\int (٢س + ١)^٥ \, ءس = \dots\dots\dots\dots + ث$

(أ) $(٢س + ١)^٦$ (ب) $\frac{١}{٢}(٢س + ١)^٦$

(جـ) $\frac{١}{١٢}(٢س + ١)^٦$ (د) $\frac{١}{٦}(٢س + ١)^٦$

(٣٠) $\int د(س) \,.\, دَ(س) \, ءس = \dots\dots\dots\dots + ث$

(أ) $د(س)$ (ب) $\frac{١}{٢}[د(س)]^٢$ (جـ) $\frac{١}{٢} د(س)$ (د) $(د(س))^٢$

(٣١) $\int (س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤) \, ءس = \dots\dots\dots\dots + ث$

(أ) $\frac{١}{٤}س^٤ - ٤س^٣ - ٨س$ (ب) $\frac{١}{٣}س^٣ + س^٢ + ٤س$

(جـ) $\frac{١}{٤}س^٤ - ٨س$ (د) $س^٣ - ٨$

(٣٢) $\int (س - ١)(س^٢ - ٢س + ١) \, ءس = \dots\dots\dots\dots + ث$

(أ) $\frac{١}{٤}(س - ١)^٤$ (ب) $\frac{١}{٣}س^٣ - س^٢ + س$

(جـ) $\frac{١}{٤}س^٤ - س$ (د) $س^٤ - ٤س$

(٣٣) $\int \frac{١٢}{(٢س - ٥)^٤} \, ءس = \dots\dots\dots\dots + ث$

(أ) $\frac{-١}{(٢س - ٥)^٣}$ (ب) $\frac{٦}{(٢س - ٥)^٣}$ (جـ) $\frac{٢}{(٢س - ٥)^٣}$ (د) $\frac{-٢}{(٢س - ٥)^٣}$

(٣٤) $\int س^٥ \left(١ + \frac{٣}{س}\right)^٥ ءس = \dots\dots\dots\dots + ث$

(أ) $(س + ٣)^٥$ (ب) $\frac{١}{٦}(س + ٣)^٦$

(جـ) $\frac{١}{٦}\left(١ + \frac{٣}{س}\right)^٦$ (د) $\frac{١}{٣٦} س^٦ \left(١ + \frac{٣}{س}\right)^٦$

(٣٥) $\int س \sqrt[٥]{\frac{٦}{س^٤} + \frac{٣}{س^٥}} \, ءس = \dots\dots\dots\dots + ث$

(أ) $\frac{٥}{٣٦}(٦س + ٣)^{\frac{٦}{٥}}$ (ب) $\sqrt{٦س + ٣}$

(جـ) $٤(٦س + ٣)^{\frac{٣}{٢}}$ (د) $\frac{٧}{٣٦}(٦س + ٣)^{\frac{٥}{٦}}$

(٣٦) $\int ٤س (٢س^٢ - ١)^٣ \, ءس = \dots\dots\dots\dots + ث$

(أ) $\frac{١}{٢}س^٢ (٢س^٢ - ١)^٤$ (ب) $\frac{١}{٤}(٢س^٢ - ١)^٤$

(جـ) $س^٢(٢س^٢ - ١)^٤$ (د) $\frac{١}{٤}(٢س - ١)^٤$

(٣٧) $\int (٣س^٢ + ١)(س^٣ + س + ٨)^٥ \, ءس = \dots\dots\dots\dots + ث$

(أ) $\frac{١}{٣}(س^٣ + س + ٨)^٦$ (ب) $(٣س^٢ + ١)^٢(س^٣ + س + ٨)^٦$

(جـ) $\frac{١}{٦}(س^٣ + س + ٨)^٦$ (د) $\frac{١}{٥}(س^٣ + س + ٨)^٦$

● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

(٣٨) $\int س^{٢}(٢س^{٣}+٨)^{٤}\,ءس =$ .... + ث

(أ) $\frac{١}{٣٠}(٢س^{٣}+٨)^{٥}$ (ب) $\frac{١}{٦}(٢س^{٣}+٨)^{٥}$

(جـ) $(٢س^{٣}+٨)^{٥}$ (د) $\frac{١}{٢٠}س^{٤}(٢س^{٣}+٨)^{٥}$

(٣٩) $\int \frac{س-\frac{١}{٢}}{\sqrt{٢س-١}}\,ءس =$ .... + ث

(أ) $\frac{١}{٦}\sqrt{٢س-١}$ (ب) $\frac{١}{٦}\sqrt{(٢س-١)^{٣}}$

(جـ) $\frac{١}{٦\sqrt{٢س-١}}$ (د) $\frac{١}{٢}\sqrt{(٢س-١)^{٣}}$

(٤٠) $\int \frac{ء}{ءس}[د(س)]\,ءس =$ ....

(أ) $د(س)$ (ب) $د(س)+ث$

(جـ) $\frac{ء}{ءس}[د(س)]$ (د) $\int د(س)\,ءس$

(٤١) إذا كان : $\int س^{ك}\,ءس = \frac{١}{٣}س^{٣}+ث$ فإن : ك = ...

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٤٢) إذا كان : $\int س^{٣}\,ءس = أ\,س^{٤}+ث$ فإن : أ = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(٤٣) إذا كان : $\int س\sqrt{س^{٢}-١٥}\,ءس = أ\sqrt{(س^{٢}-١٥)^{٣}}+ث$ فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) ٣ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{١}{٢}$

(٤٤) $\int (س^{٢}+٤س+٤)^{٥}\,ءس =$ .... + ث

(أ) $\frac{١}{٦}(س^{٢}+٤س+٤)^{٦}$ (ب) $٦(س^{٢}+٤س+٤)^{٥}$

(جـ) $\frac{١}{١١}(س+٢)^{١١}$ (د) $١١(س+٢)^{١١}$

(٤٥) $\int س(س+٣)^{٥}\,ءس =$ .... + ث

(أ) $\frac{١}{٦}(س+٣)^{٦}$ (ب) $\frac{١}{١٨}(س+٣)^{٦}$

(جـ) $\frac{١}{٧}(س+٣)^{٧}-\frac{١}{٢}(س+٣)^{٦}$ (د) $\frac{١}{٦}(س+٣)^{٦}-\frac{١}{٥}(س+٣)^{٥}$

(٤٦) $\int (س-١)(س+٤)^{٨}\,ءس =$ .... + ث

(أ) $\frac{١}{١٠}(س+٤)^{١٠}-\frac{٥}{٩}(س+٤)^{٩}$ (ب) $-\frac{١}{١٠}(س+٤)^{٩}-\frac{٣}{٤}(س+٤)^{٨}$

(جـ) $\frac{١}{٢}(س-١)^{٢}+\frac{١}{٩}(س+٤)^{٩}$ (د) $(س+٤)^{٩}-٥(س+٤)^{٣}$

(٤٧) $\int س\sqrt{س-٢}\,ءس =$ .... + ث

(أ) $\frac{٣}{٢}س^{٢}(س-٢)^{\frac{٣}{٢}}$ (ب) $\frac{٢}{٥}(س-٢)^{\frac{٥}{٢}}+\frac{٤}{٣}(س-٢)^{\frac{٣}{٢}}$

(جـ) $\frac{٥}{٢}(س-٢)^{\frac{٥}{٢}}+\frac{٣}{٤}(س-٢)^{\frac{٣}{٢}}$ (د) $\frac{٢}{٣}س^{٢}(س-٢)^{\frac{٣}{٢}}$

(٤٨) $\int \frac{س + ٣}{\sqrt{س - ١}}$ ءس = ... + ث

(أ) $\frac{٢}{٣}(س - ١)^{\frac{٣}{٢}} + ٨(س - ١)^{\frac{١}{٢}}$
(ب) $\frac{١}{٢}(س + ٣)^{٢} - \frac{٣}{٢}(س - ١)^{-\frac{٣}{٢}}$
(جـ) $\frac{-٢}{٣}(س - ١)^{\frac{٣}{٢}} + ٨(س - ١)^{\frac{١}{٢}}$
(د) $\frac{٣}{٢}(س - ١)^{\frac{٣}{٢}} + ٨(س - ١)^{\frac{١}{٢}}$

تكامل بعض الدوال المثلثية

(٤٩) $\int$ حتا ٤س ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٤}$ حا ٤س (ب) $\frac{١}{٢}$ حتا ٢س (جـ) $\frac{١}{٤}$ حتا^{٢} ٤س (د) ٤ حا ٤س

(٥٠) $\int$ حا ٣س ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٣}$ قا^{٢} ٣س (ب) $\frac{-١}{٣}$ حتا ٣س (جـ) $\frac{١}{٣}$ حتا ٣س (د) $\frac{١}{٣}$ حا ٣س

(٥١) $\int$ قا^{٢} (٥س) ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{١٥}$ قا^{٣} ٥س (ب) $\frac{١}{٢}$ طا^{٢} ٢س (جـ) $\frac{١}{٥}$ طا ٥س (د) $\frac{١}{٥}$ ظتا ٥س

(٥٢) $\int$ قتا^{٢} (٣س) ءس = ... + ث

(أ) − ظتا (٣س) (ب) $\frac{١}{٣}$ ظتا (٣س) (جـ) −٣ ظتا ٣س (د) $\frac{-١}{٣}$ ظتا (٣س)

(٥٣) $\int$ قا ص طا ص ءص = ... + ث

(أ) قا ص (ب) قتا ص (جـ) طا ص (د) ظتا ص

(٥٤) $\int$ (٤ − قتا س ظتا س) ءس = ... + ث

(أ) ٤س − قتا س (ب) ٤س + قتا س (جـ) ٤س − ظتا س (د) ٤س + ظتا س

(٥٥) $\int$ (حا^{٢} س + حتا^{٢} س)^{٧} ءس = ... + ث

(أ) س
(ب) ٢ حا ٢س
(جـ) $\frac{١}{٨}$ س^{٨}
(د) $\frac{١}{٣}$ حا^{٣} س + $\frac{١}{٣}$ حتا^{٣} س

(٥٦) $\int$ حا (٣س − ٥) ءس = ... + ث

(أ) − حتا (٣س − ٥)
(ب) −٣ حتا (٣س − ٥)
(جـ) −$\frac{١}{٣}$ حتا (٣س − ٥)
(د) −$\frac{٢}{٣}$ حتا (٣س − ٥)

(٥٧) $\int$ (س − حا س) ءس = ... + ث

(أ) ٣ حا $\left(\frac{س}{٢} - ٢\right)$ (ب) $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + حتا س (جـ) $\frac{١}{٢}$ س^{٢} − حتا س (د) ١ + حتا س

(٥٨) $\int$ حا $\left(\frac{س}{٤} + \frac{\pi}{٣}\right)$ ءس = ... + ث

(أ) −٤ حتا $\left(\frac{س}{٤} + \frac{\pi}{٣}\right)$
(ب) حتا $\left(\frac{س}{٤} + \frac{\pi}{٣}\right)$
(جـ) $\frac{١}{٢}$ حتا $\left(\frac{س}{٤} + \frac{\pi}{٣}\right)$
(د) −٤ حتا $\left(\frac{س}{٢} + \frac{\pi}{٣}\right)$

(٥٩) $\int$ حتا $\left(\frac{\pi}{٢} + س\right)$ ءس = ... + ث

(أ) حا س (ب) حتا س (جـ) − حا س (د) − حتا س

(٦٠) $\int$ ٢ جاس جتاس ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٢}$ جا ٢س (ب) $\frac{-١}{٢}$ جتا ٢س (جـ) − جتا ٢س (د) جا ٢س

(٦١) $\int$ (قا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$) ءس = ... + ث

(أ) س (ب) ٢س (جـ) طاس (د) طا $\frac{\pi}{٤}$

(٦٢) $\int$ (جاس قتاس + جتاس قاس + طاس طتاس) ءس = ... + ث

(أ) ٣ (ب) ٣س

(جـ) جتاس − جاس + قا^{٢}س (د) $\frac{١}{٢}$ جا^{٢}س + $\frac{١}{٢}$ جتا^{٢}س + $\frac{١}{٢}$ قا^{٢}س

(٦٣) إذا كان : $\int$ جاس ءس = د (س) فإن : دَ (س) = ...

(أ) جاس (ب) − جاس (جـ) جتاس (د) − جتاس

(٦٤) 📖 $\int$ (جتا^{٢}س − جا^{٢}س) ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٣}$ جتا^{٣}س − $\frac{١}{٣}$ جا^{٣}س (ب) جتا ٢س

(جـ) $\frac{١}{٢}$ جا ٢س (د) ٢ جا ٢س

(٦٥) $\int$ جا ٣س جتا ٣س ءس = ... + ث

(أ) جا ٣س (ب) $\frac{١}{٣}$ جا ٦س (جـ) $\frac{١}{٢}$ جا^{٢} ٣س (د) − $\frac{١}{١٢}$ جتا ٦س

(٦٦) إذا كان : $\int$ جتا (٣س + ١) ءس = أ جا (٣س + ١) + ث فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ١ (د) $\frac{١}{٩}$

(٦٧) $\int$ ($\frac{\text{طاس}}{\text{طتاس}}$ + ١) ءس = ... + ث

(أ) طتاس (ب) − طاس (جـ) طاس (د) − طتاس

(٦٨) $\int$ (١ + طتا^{٢}س) ءس = ... + ث

(أ) طتاس (ب) − طتاس (جـ) طا^{٢}س (د) − طتا^{٢}س

(٦٩) $\int$ (٢ + طا^{٢}س) ءس = ... + ث

(أ) س − طاس (ب) س + طتاس (جـ) −س + طاس (د) س + طاس

(٧٠) $\int$ طتاس جاس ءس = ... + ث

(أ) − جاس (ب) جاس (جـ) جتاس (د) − جتاس

(٧١) 📖 $\int$ (جاس + جتاس)^{٢} ءس = ... + ث

(أ) س − $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س (ب) س + $\frac{١}{٢}$ جتا^{٢}س − $\frac{١}{٢}$ جا^{٢}س

(جـ) س + جا^{٢}س (د) س − جتا^{٢}س

(٧٢) $\int$ (جا^{٢} ٥س + جتا^{٢} ٥س + طا^{٢} ٥س) ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٥}$ قا^{٢} ٥س (ب) س + $\frac{١}{٥}$ طا ٥س (جـ) ١ + $\frac{١}{٥}$ قا^{٢} ٥س (د) $\frac{١}{٥}$ طا ٥س

٧٣ $\int$ (١ + ظا^{٢} س) حتا^{٣} س ء س = ... + ث

(أ) حتا س (ب) حا س (جـ) − حتا س (د) − حا س

٧٤ $\int \frac{\text{حا س + حتا س}}{\text{١ + ظتا س}}$ ء س = ... + ث

(أ) حتا س (ب) − حتا س (جـ) حا س (د) − حا س

٧٥ $\int \frac{\text{١ − حتا}^{٢}\text{ س}}{\text{حا س}}$ ء س = ... + ث

(أ) حا س (ب) − حا س (جـ) حتا س (د) − حتا س

٧٦ $\int \frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ (٥ + حا س) ء س = ...

(أ) ٥ س − حتا س (ب) ٥ س + حا س + ث

(جـ) حا س + ث (د) ٥ س − حتا س + ث

٧٧ $\int \frac{\text{٥ + قا س}}{\text{قا س}}$ ء س = ... + ث

(أ) ٥ حا س − س (ب) −٥ حا س − س (جـ) ٢ حا س − س (د) ٥ حا س + س

٧٨ $\int \frac{\text{حتا}^{٢}\text{ س + ٢}}{\text{حتا}^{٢}\text{ س}}$ ء س = ... + ث

(أ) س + ظا س (ب) ٢ س + ظا س (جـ) س + ٢ ظا س (د) س − ٢ ظتا س

٧٩ $\int$ ظا^{٩} س ظتا^{٩} س ء س = ... + ث

(أ) − س + ظا س (ب) س + ظا س (جـ) س (د) − س + ظتا س

٨٠ $\int \frac{\text{١}}{\text{حتا}^{٢}\text{ س}}$ ء س = ... + ث

(أ) ظتا س (ب) ظا س (جـ) قا^{٢} س (د) قتا^{٢} س

٨١ $\int$ حا^{٢} س ء س = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{١}{٤}$ حا ٢ س (ب) س − $\frac{١}{٢}$ حا ٢ س

(جـ) $\frac{١}{٤}$ حتا ٢ س + $\frac{١}{٢}$ س (د) $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{١}{٢}$ حا ٢ س

٨٢ $\int \frac{\text{١ + حتا}^{٢}\text{ س}}{\text{١ − حا}^{٢}\text{ س}}$ ء س = ... + ث

(أ) س + حتا س (ب) ظا س + س (جـ) قا^{٢} س + س (د) س − قا^{٢} س

٨٣ $\int \frac{\text{حتا ٢ س}}{\text{حتا س + حا س}}$ ء س = ... + ث

(أ) حا ٢ س + حتا ٢ س (ب) ٢ حا س حتا س

(جـ) حتا س − حا س (د) حتا س + حا س

(٨٤) $\int \frac{\text{ءس}}{١ + \text{طا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس} = \dots\dots\dots + \text{ث}$

(أ) $\text{حتا}^{٢}\text{س}$ (ب) $\frac{١}{٤}\ \text{حا ٢س} + \frac{١}{٢}\ \text{س}$

(جـ) $\text{طا س} + ١$ (د) $\frac{١}{٢}\ \text{حتا}^{٢}\text{س}$

(٨٥) $\int \frac{٤}{١ + \text{حتا ٤س}}\ \text{ءس} = \dots\dots\dots + \text{ث}$

(أ) حا ٢س (ب) حتا ٢س (جـ) طا ٢س (د) طا س

(٨٦) $\int \frac{\text{طا}^{٣}\text{س}}{\text{حتا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس} = \dots\dots\dots + \text{ث}$

(أ) $\frac{١}{٣}\ \text{طا}^{٣}\text{س}$ (ب) $\frac{١}{٤}\ \text{طا}^{٤}\text{س}$ (جـ) $\frac{١}{٣}\ \text{حتا}^{٣}\text{س}$ (د) $\frac{١}{٤}\ \text{حا}^{٤}\text{س}$

(٨٧) $\int \frac{\text{حاس}\ (١ + \text{حتا ٢س})}{\text{حا ٢س}}\ \text{ءس} = \dots\dots\dots + \text{ث}$

(أ) حاس (ب) حتاس (جـ) حا ٢س (د) حتا ٢س

(٨٨) $\int \frac{\text{ءس}}{(\text{حتا}^{٢}\text{س} - \text{حا}^{٢}\text{س})^{٢}} = \dots\dots\dots + \text{ث}$

(أ) $-(\text{حتا}^{٢}\text{س} - \text{حا}^{٢}\text{س})^{-١}$ (ب) $\text{قا}^{٢}\ \text{٢س}$

(جـ) $\frac{١}{٢}\ \text{طا ٢س}$ (د) $\frac{١}{٢}\ \text{قا}^{٢}\ \text{٢س}$

(٨٩) $\int \text{حاس حتاس حتا ٢س ءس} = \dots\dots\dots + \text{ث}$

(أ) $-\frac{١}{١٦}\ \text{حا ٤س}$ (ب) $-\frac{١}{٤}\ \text{حتا ٤س}$ (جـ) $-\frac{١}{١٦}\ \text{حتا ٤س}$ (د) $\frac{-١}{٤}\ \text{حا ٤س}$

(٩٠) $\int (١ + \text{قتاس})\ (١ - \text{قتاس})\ \text{ءس} = \dots\dots\dots + \text{ث}$

(أ) $\text{س} + \text{ظتاس}$ (ب) $\text{س} - \text{طاس}$ (جـ) س طاس (د) $\text{س} - \text{طاس}$

(٩١) $\int (١ - \text{حتاس})\ (١ + \text{حتاس})\ \text{ءس} = \dots\dots\dots + \text{ث}$

(أ) $\text{حا}^{٢}\text{س}$ (ب) $١ + \text{حتاس}$

(جـ) $\frac{١}{٢}\ \text{س} - \frac{١}{٤}\ \text{حا ٢س}$ (د) $\text{س} + \frac{١}{٢}\ \text{حا ٢س}$

(٩٢) $\int \text{حا}^{١٠٠}\text{س} \times \text{قتا}^{٩٩}\text{س ءس} = \dots\dots\dots + \text{ث}$

(أ) حاس (ب) $-\text{حتاس}$ (جـ) حاس طاس (د) $\frac{١}{١٠١}\ \text{حتا}^{١٠١}\text{س}$

(٩٣) $\int \frac{\text{حتاس}}{\text{قتاس}}\ \text{ءس} = \dots\dots\dots + \text{ث}$

(أ) $\frac{١}{٢}\ \text{حا ٢س}$ (ب) $-\frac{١}{٤}\ \text{حتا ٢س}$ (جـ) ٢ حا ٢س (د) س

(٩٤) $\int \sqrt{١ - \text{حتا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس} = \dots\dots\dots + \text{ث}$ حيث $\text{س} \in]٠ ، \pi[$

(أ) حاس (ب) حتاس (جـ) $\text{س} - \text{حتاس}$ (د) $-\text{حتاس}$

(٩٥) $\int \left(\text{حتا}^{٤}\frac{\text{س}}{٢} - \text{حا}^{٤}\frac{\text{س}}{٢}\right)\text{ءس} = \dots\dots\dots + \text{ث}$

(أ) حتاس (ب) حتا ٢س (جـ) حاس (د) حا ٢س

(٩٦) ∫ حا^{٣} س ء س = ... + ث

(أ) حتا^{٣} س − $\frac{١}{٣}$ حتا^{٣} س (ب) حتا س + $\frac{١}{٣}$ حتا^{٣} س

(جـ) − حتا س + $\frac{١}{٣}$ حتا^{٣} س (د) − حا س − $\frac{١}{٣}$ حا^{٣} س

(٩٧) ∫ قا^{٤} س طا س ء س = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٥}$ قا^{٥} س (ب) $\frac{١}{٤}$ قا^{٤} س (جـ) $\frac{١}{٣}$ طا^{٣} س (د) − $\frac{١}{٣}$ طا^{٣} س

(٩٨) ∫ قا^{٢} س طا^{٤} س ء س = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٥}$ طا^{٥} س (ب) $\frac{١}{٣}$ قا^{٣} س (جـ) −$\frac{١}{٥}$ طا^{٥} س (د) −$\frac{١}{٣}$ قا^{٣} س

(٩٩) ∫ $\frac{\text{حا}^{٦}\text{ س}}{\text{حتا}^{٨}\text{ س}}$ ء س = ... + ث

(أ) طا^{٧} س (ب) $\frac{١}{٧}$ طا^{٧} س (جـ) $\frac{١}{٧}$ طا ٧ س (د) قا^{٧} س

(١٠٠) ∫ (ظتا^{٤} س + ظتا^{٢} س) ء س = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٣}$ظتا^{٣} س (ب) ظتا س

(جـ) $\frac{١}{٥}$ ظتا^{٥} س + $\frac{١}{٣}$ ظتا^{٣} س (د) − $\frac{١}{٣}$ ظتا^{٣} س

(١٠١) ∫ (حا س + طا س)^{٥} (حتا س + قا^{٢} س) ء س = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٥}$ (حا س + طا س)^{٥} (ب) $\frac{١}{٦}$ (حا س + طا س)^{٦}

(جـ) $\frac{١}{٦}$ (حا^{٦} س + طا^{٦} س) (د) $\frac{١}{٦}$ حتا^{٥} ٢ س + س

(١٠٢) ∫ (حا ٢ س حا س + حتا ٢ س حتا س) ء س = ... + ث

(أ) ٢ حتا س (ب) − حتا س (جـ) − ٢ حا س (د) حا س

ثانيًا الأسئلة المقالية

تكامل بعض الدوال الجبرية

١ أوجد كلًا من التكاملات الآتية :

① ∫ $\frac{\text{ء س}}{٥}$ ② ∫ صفر ء س ③ ∫ $\frac{-٨}{٥}$ ف$^{-٣}$ ء ف

④ ∫ $\frac{١}{\sqrt[٥]{\text{س}^{٣}}}$ ء س ⑤ ∫ $\frac{١٢}{\text{س}\sqrt{\text{س}}}$ ء س ⑥ ∫ $\frac{٦\sqrt{\text{ص}}}{\sqrt[٣]{\text{ص}}}$ ء ص

٢ أوجد كلًا من التكاملات الآتية :

① ∫ (٤ س^{٣} − ٦ س^{٢} + ٨ س − ٥) ء س ② ∫ (س^{٤} − س$^{-٢}$ + ٥) ء س

③ ∫ ($\frac{٣}{\text{س}^{٣}}$ + $\frac{٢}{\text{س}^{٢}}$ + ٥) ء س ④ ∫ (س^{٣} + $\sqrt{\text{س}}$) ء س

⑤ ∫ ($\frac{\sqrt{\text{س}}}{٢}$ + $\frac{٢}{\sqrt{\text{س}}}$) ء س ⑥ ∫ (٣$\sqrt{\text{س}}$ − $\frac{٢}{\text{س}^{٣}}$) ء س

⑦ ∫ (أ س^{٢} + ٥ س + حـ) ء س ⑧ ∫ ($\frac{٥}{٣}$ $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$ + $\frac{٧}{٤}$ $\sqrt[٤]{\text{س}^{٣}}$) ء س

● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

٣ أوجد كلًا من التكاملات الآتية :

(١) $\int س^{٢}(س^{٢}-٣)\,ءس$

(٢) $\int س^{٢}\left(٣س-\frac{٥}{س}\right)ءس$

(٣) $\int (س-٢)(٤س^{٢}+١)\,ءس$

(٤) $\int (س^{٢}+١)^{٢}\,ءس$

(٥) $\int س^{٣}(٢-س)^{٢}\,ءس$

(٦) $\int (١-س^{٢})^{٢}(١+س^{٢})^{٢}\,ءس$

(٧) $\int \left(س+\frac{١}{س}\right)^{٢}ءس$

(٨) $\int \sqrt{س}\,(١+\sqrt{س})\,ءس$

(٩) $\int \sqrt{س}\left(س\sqrt{س}+٢\sqrt{س}-\frac{١}{\sqrt{س}}\right)ءس$

---

٤ أوجد كلًا من التكاملات الآتية :

(١) $\int \frac{س^{٧}-٤س^{٥}+س^{٣}}{س^{٣}}\,ءس$

(٢) $\int \frac{س^{٢}-٥س+٦}{س-٢}\,ءس$

(٣) $\int \frac{س-٤}{\sqrt{س}+٢}\,ءس$

(٤) $\int \frac{س^{٣}-٢٧}{س-٣}\,ءس$

(٥) $\int \frac{٤س^{٣}-١٢س^{٢}}{س-٣}\,ءس$

(٦) $\int \frac{(س^{٢}+٢)^{٢}}{س^{٢}}\,ءس$

(٧) $\int \frac{س^{٣}+س-٢}{س-١}\,ءس$

(٨) $\int \frac{س^{٢}-٤}{\sqrt{س}\,(س-٢)}\,ءس$

---

٥ أوجد كلًا مما يأتي :

(١) $\int ٦(س-٢)^{٥}\,ءس$

(٢) $\int ٣(٣س+١)^{٣}\,ءس$

(٣) $\int (٤-٣س)^{٧}\,ءس$

(٤) $\int (٢ع-٣)^{\frac{٧}{٢}}\,ءع$

(٥) $\int \sqrt{٢س+٧}\,ءس$

(٦) $\int (٣س+٥)^{-٩}\,ءس$

(٧) $\int \left((٣-٢س)^{٥}+٣\right)ءس$

(٨) $\int \frac{ءس}{\sqrt[٥]{٢س+٩}}$

(٩) $\int \sqrt[٣]{(٤-٣س)^{٢}}\,ءس$

---

٦ أوجد كلًا من التكاملات الآتية :

(١) $\int س^{٦}\left(١-\frac{٢}{س}\right)^{٦}ءس$

(٢) $\int س\sqrt[٣]{\frac{٢}{س^{٣}}-\frac{١}{س^{٢}}}\,ءس$

(٣) $\int س^{١٠}\left(\frac{٢}{س}+\frac{٣}{س^{٢}}\right)^{٥}ءس$

(٤) $\int (٤س^{٢}-١٢س+٩)^{\frac{٧}{٢}}\,ءس$

(٥) $\int (٤س+٦)\sqrt{٢س+٣}\,ءس$

(٦) $\int \sqrt{س-٣}\,(س-٣)^{٤}\,ءس$

(٧) $\int (س+١)\sqrt[٣]{س^{٢}+٢س+١}\,ءس$

(٨) $\int \frac{٨-٢س}{\sqrt{٤-س}}\,ءس$

٧ أوجد كلًا من التكاملات الآتية :

① $\int ٢\text{س}\,(\text{س}^{٢}-٤)^{٣}\,\text{ءس}$

② $\int \text{س}\,(٥\text{س}^{٢}+٢)^{-٧}\,\text{ءس}$

③ $\int (\text{س}^{٢}-٣\text{س}+١)^{٣}\,(٤\text{س}-٦)\,\text{ءس}$

④ $\int (\text{س}^{٢}-٣\text{س}+٥)^{-٧}\,(٢\text{س}-٣)\,\text{ءس}$

⑤ $\int (٣\text{س}^{٢}-٢\text{س}+١)^{١١}\,(٣\text{س}-١)\,\text{ءس}$

⑥ $\int \text{س}\,(٤\text{س}^{٣}-٣\text{س}^{٢}+٤)^{٥}\,(٢\text{س}-١)\,\text{ءس}$

⑦ $\int \text{س}^{٢}\,(\text{س}^{٤}-\text{س}^{٣}+٨)^{٩}\,(٤\text{س}-٣)\,\text{ءس}$

⑧ $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{١+\text{س}^{٢}}}\,\text{ءس}$

⑨ $\int \frac{\text{س}^{٢}+١}{(\text{س}^{٣}+٣\text{س})^{٢}}\,\text{ءس}$

⑩ $\int \frac{\text{س}^{٣}}{(\text{س}^{٤}+١)^{٦}}\,\text{ءس}$

٨ أوجد كلًا من التكاملات الآتية :

① $\int (\text{س}+١)(\text{س}+٣)^{٧}\,\text{ءس}$

② $\int ٣\text{س}\,\sqrt[٣]{٣\text{س}+١}\,\text{ءس}$

③ $\int (\text{س}+٢)\,\sqrt{\text{س}+١}\,\text{ءس}$

④ $\int \text{س}^{١٧}\left(\frac{١}{\text{س}}-\frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)^{٨}\,\text{ءس}$

⑤ $\int \frac{\text{س}+٢}{(٣+\text{س})^{٥}}\,\text{ءس}$

⑥ $\int \frac{\text{س}+٣}{(\text{س}-٢)^{٤}}\,\text{ءس}$

⑦ $\int \frac{\text{س}+١}{(٣\text{س}+١)^{٥}}\,\text{ءس}$

⑧ $\int \frac{٣\text{س}+٢}{\sqrt{\text{س}-٢}}\,\text{ءس}$

⑨ $\int \frac{\text{س}^{٢}+٨\text{س}}{(\text{س}+٤)^{٥}}\,\text{ءس}$

⑩ $\int \frac{\text{س}^{٢}+٣\text{س}+٢}{(\text{س}+٢)^{٥}}\,\text{ءس}$

⑪ $\int \sqrt{\text{س}^{٣}-\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$ حيث $\text{س} > ٠$

تكامل بعض الدوال المثلثية

٩ أوجد كلًا من التكاملات الآتية :

① $\int \text{جتا}\left(\frac{\text{س}}{٣}-٢\right)\text{ءس}$

② $\int \text{قا}^{٢}\left(\frac{\text{س}}{٣}-١\right)\text{ءس}$

③ $\int (٦\text{س}+\text{جتا}\,٤\text{س})\,\text{ءس}$

④ $\int \text{جتا}\,(٢-\text{س})\,\text{ءس}$

⑤ $\int \left(٤\text{س}-\text{جا}\,\frac{\pi}{٣}\right)\text{ءس}$

⑥ $\int (\text{جتا}\,٢\text{س}-\text{س})\,\text{ءس}$

⑦ $\int \left(\frac{\pi}{٢}-٢\,\text{جا}\,\frac{٣\text{س}}{٢}\right)\text{ءس}$

⑧ $\int \text{قا}^{٢}\,(٥-٣\text{س})\,\text{ءس}$

⑨ $\int \text{قا}^{٢}\left(\frac{\text{س}+٣}{٢}\right)\text{ءس}$

⑩ $\int \text{قا}\,٢\text{س}\,\text{ظا}\,٢\text{س}\,\text{ءس}$

⑪ $\int \text{قا}\,٥\text{س}\,\text{ظا}\,٥\text{س}\,\text{ءس}$

⑫ $\int (\text{جتا}\,٣\text{س}-\text{جاس})\,\text{ءس}$

⑬ $\int (٧\,\text{جاس}-٢\,\text{جتاس})\,\text{ءس}$

⑭ $\int ٩\,(\text{جتاس}-\text{قا}^{٢}\,٣\text{س})\,\text{ءس}$

⑮ $\int (٣+٥\,\text{قا}^{٢}\text{س}+٢\,\text{جا}\,٢\text{س})\,\text{ءس}$

⑯ $\int \left(٤\,\text{جتاس}+\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}+١\right)\text{ءس}$

⑰ $\int \left[\text{قا}^{٢}\,\frac{\text{س}}{٢}-\text{جا}\left(\frac{\pi}{٤}-\text{س}\right)\right]\text{ءس}$

١٠ أوجد كلًا من التكاملات الآتية :

(١) $\int (\text{حا}^2 3\text{س} + \text{حتا}^2 3\text{س} + \text{طا}^2 3\text{س})\, \text{ءس}$

(٢) $\int (1 - 2\,\text{حا}^2 3\text{س})\, \text{ءس}$

(٣) $\int \text{حاس}\ \text{حتاس}\, \text{ءس}$

(٤) $\int \left(\text{حتا}\frac{\text{س}}{2} - \text{حا}\frac{\text{س}}{2}\right)^2 \text{ءس}$

(٥) $\int \left(1 + \text{طا}^2 \frac{\text{س}}{2}\right) \text{ءس}$

(٦) $\int [1 + \text{طا}^2 (3\text{س} - 1)]\, \text{ءس}$

(٧) $\int (3 + 4\,\text{طا}^2 \text{س})\, \text{ءس}$

(٨) 📖 $\int \frac{\text{حتا}^2 \text{س}}{1 + \text{حاس}}\, \text{ءس}$

(٩) $\int \frac{1 + \text{حا}^2 \text{س}}{1 - \text{حا}^2 \text{س}}\, \text{ءس}$

(١٠) $\int \frac{\text{حا}^3 \text{س} + \text{حتا}^3 \text{س}}{\text{حاس} + \text{حتاس}}\, \text{ءس}$

(١١) $\int [(1 - \text{طاس})^2 + 2\,\text{طاس}]\, \text{ءس}$

(١٢) $\int \left(\frac{\text{حتا}^2 \text{س} + 1}{\text{حتاس}}\right)^2 \text{ءس}$

(١٣) $\int \frac{3}{\text{حتا}^2 3\text{س}}\, \text{ءس}$

(١٤) $\int \frac{\text{طتا}\ 5\text{س}}{\text{حا}\ 5\text{س}}\, \text{ءس}$

(١٥) $\int \frac{1}{1 - \text{حتا}^2 \text{س}}\, \text{ءس}$

(١٦) $\int \text{قاس}\,(3\,\text{حتاس} - 2\,\text{قاس})\, \text{ءس}$

(١٧) $\int (\text{حا}\ 3\text{س}\ \text{حتاس} - \text{حتا}\ 3\text{س}\ \text{حاس})\, \text{ءس}$

(١٨) 📖 $\int \left(\text{حتاس}\ \text{حتا}\frac{\pi}{4} - \text{حاس}\ \text{حا}\frac{\pi}{4}\right) \text{ءس}$

(١٩) $\int \text{قتاس}\,(\text{طتاس} - \text{قتاس})\, \text{ءس}$

---

١١ أوجد كلًا من التكاملات الآتية :

(١) 📖 $\int 2\,\text{حتا}^2 \text{س}\, \text{ءس}$

(٢) $\int (1 + \text{حتاس})^2\, \text{ءس}$

(٣) $\int (1 - \text{حاس})^2\, \text{ءس}$

(٤) $\int (1 + \text{حا}^2 \text{س})\, \text{ءس}$

(٥) 📖 $\int (4 - \text{حا}^2 \text{س})\, \text{ءس}$

(٦) $\int (2\,\text{حتا}^2 \text{س} + \text{طا}^2 \text{س})\, \text{ءس}$

(٧) $\int (\text{قاس} + \text{حتاس})^2\, \text{ءس}$

(٨) $\int \left(\frac{2}{\text{قتا}^2 \text{س}} - 3\,\text{قا}^2 2\text{س}\right) \text{ءس}$

---

١٢ أوجد كلًا من التكاملات الآتية :

(١) $\int \text{حا}^5 \text{س}\ \text{حتاس}\, \text{ءس}$

(٢) 📖 $\int 2\,\text{طاس}\ \text{قا}^2 \text{س}\, \text{ءس}$

(٣) $\int (2\text{س} - \text{حاس})(\text{س}^2 + \text{حتاس})^7\, \text{ءس}$

(٤) 📖 $\int (\text{حتاس} - \text{حاس})(\text{حاس} + \text{حتاس})^9\, \text{ءس}$

(٥) $\int \text{قا}^5 \text{س}\ \text{طاس}\, \text{ءس}$

(٦) $\int \text{طتاس}\ \text{قتا}^3 \text{س}\, \text{ءس}$

(٧) $\int 13\,\text{طا}^{12} \text{س}\ \text{قا}^2 \text{س}\, \text{ءس}$

(٨) $\int \text{طا}^2 \text{س}\ \text{قتا}^2 \text{س}\, \text{ءس}$

(٩) $\int \text{حاس}\ \text{حتاس}\ \text{حتا}\ 2\text{س}\ \text{حتا}\ 4\text{س}\, \text{ءس}$

(١٠) $\int (1 + \text{طا}^2 \text{ص})\ \text{حتا}^2 \text{ص}\, \text{ءص}$

(١١) $\int \text{حتاس}\,(\text{حاس} + \text{طاس})\, \text{ءس}$

(١٢) $\int \left(\text{قا}^2 \frac{\pi}{4} + \frac{1 - 2\,\text{حا}^2 \text{س}}{\text{طتا}\ 2\text{س}}\right) \text{ءس}$

(١٣) $\int (\text{حا}^2 \text{س} + \text{حا}^2 \text{س}\ \text{طا}^2 \text{س})\, \text{ءس}$

(١٤) $\int \frac{\text{حتا}\ 4\text{س}}{\text{حتا}\ 2\text{س} - \text{حا}\ 2\text{س}}\, \text{ءس}$

(١٥) $\int \frac{٢\, طا^٢ س}{١ + طا^٢ س}\, ءس$

(١٦) $\int \sqrt{١ + جتا ٢θ}\, ءθ$ حيث $θ \in]٠ ، \frac{π}{٤}[$

(١٧) $\int ٨\, جا^٢ \frac{س}{٢}\, جتا^٢ \frac{س}{٢}\, ءس$

(١٨) $\int (جتا^٢ س - جتا^٤ س)\, ءس$

(١٩) $\int (جتا س + طا س)^٢\, ءس$

(٢٠) $\int \frac{(جا س + جتا س)^٢}{قا^٢ س + ٢\, طا س}\, ءس$

(٢١) $\int ٤\, جا^٤ س\, ءس$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

تكامل بعض الدوال الجبرية

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : د (س) = $\int \frac{١}{س}\, ءس$ فإن : دَ (٢) = ...

(أ) غير موجودة. (ب) $\frac{١}{س} +$ ث (جـ) ٢ (د) $\frac{١}{٢}$

(٢) $\int \frac{س^٢}{س + ٢}\, ءس + \int \frac{٤ س + ٤}{س + ٢}\, ءس =$ .... + ث

(أ) $\frac{١}{٢} س^٢ + ٢ س$ (ب) $\frac{-١}{٢} س^٢ + ٢ س$

(جـ) $س^٢ + ٤ س$ (د) $س^٢ + س$

(٣) إذا كان : $\int س\, د (س)\, ءس = س^٤ - ٨ س^٢$ فإن : د (١) = ...

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) −١٢ (د) −٢٤

(٤) $\int [٢ س + ٢ د (س) - ٢]\, [١ + دَ (س)]\, ءس =$ .... + ث

(أ) $س + د (س) - ١$ (ب) $(س + د (س) - ١)^٢$

(جـ) $س^٢ + (د (س))^٢ - س$ (د) $\frac{١}{٢} س^٢ + \frac{١}{٢} (د (س))^٢ - ٢ س$

(٥) إذا كان : $\int د (س)\, ءس = س^٣ - ٥ س^٢ + ٧ س + ٢$ فإن : دَ (١) = ...

(أ) ٥ (ب) صفر (جـ) −٣ (د) −٤

(٦) $\int \sqrt{\left(س^٢ - \frac{١}{س^٢}\right)^٢ + ٤}\, ءس =$ .... + ث

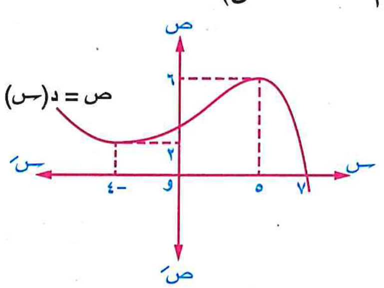
(أ) $\frac{١}{٣} س^٣ - \frac{١}{س}$ (ب) $\frac{١}{٣} \left(س^٣ + \frac{١}{س}\right)^٢$

(جـ) $\frac{١}{٣} س^٣ + \frac{١}{س}$ (د) $\frac{١}{٣} \left(\frac{١}{٣} س^٣ - \frac{١}{س}\right)^٣$

(٧) الشكل المقابل يمثل منحنى ص = د (س)

وكان ر (س) = $\int [د (س) + ١]\, .\, دَ (س)\, ءس$

فإن : ر (٥) − ر (−٤) = ...



(أ) ١٢ (ب) ١٦

(جـ) ١٨ (د) ٢٠

تكامل بعض الدوال المثلثية

(٨) $\int \frac{\text{حا س}}{\text{حتا}^{2}\text{ س}}\ \text{ء س}$ = ... + ث

(أ) $\frac{1}{2}$ ظا^{2} س (ب) قا س (جـ) ٢ قا س (د) $\frac{1}{2}$ ظا س قا س

(٩) $\int \frac{\text{١ + حتا س}}{\text{١ + قا س}}\ \text{ء س}$ = ... + ث

(أ) حا س (ب) − حا س (جـ) حتا س (د) − حتا س

(١٠) $\int \frac{\text{حتا س + حتا}^{3}\text{ س}}{\text{حا}^{2}\text{ س + ٢ حتا}^{2}\text{ س}}\ \text{ء س}$ = ... + ث

(أ) حتا س (ب) حا س (جـ) $\frac{1}{2}$ حتا^{2} س (د) $\frac{1}{2}$ حا^{2} س

(١١) $\int \frac{\text{١ − حتا س}}{\text{١ + حتا س}}\ \text{ء س}$ = ... + ث

(أ) ٢ ظا $\frac{\text{س}}{2}$ − س (ب) ظا س − س (جـ) ٢ ظا^{2} $\frac{\text{س}}{2}$ − س (د) ٢ ظا $\frac{\text{س}}{2}$ − ١

(١٢) إذا كان : أ = $\int$ حتا^{2} س ء س ، ب = $\int$ حا^{2} س ء س فإن : أ + ب = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) س + ث (د) $\frac{1}{2}$ حا ٢ س + ث

(١٣) $\int$ (ظا^{3} س + ظا س) ء س = ... + ث

(أ) $\frac{1}{4}$ ظا^{4} س + $\frac{1}{2}$ ظا^{2} س (ب) $\frac{1}{2}$ ظا^{2} س

(جـ) $\frac{1}{2}$ (ظا^{3} س + ظا س)^{2} (د) ظا س قا^{2} س

(١٤) $\int \frac{\text{(ظتا س − قتا س) (ظتا س + قتا س)}}{\text{(ظا س − قا س) (ظا س + قا س)}}\ \text{ء س}$ = ... + ث

(أ) س (ب) − س (جـ) $\frac{1}{2}$ س (د) ٢ س

(١٥) $\int$ ٣ حا ٢ س حا^{4} س ء س = ...

(أ) حا^{4} س حتا^{2} س + ث (ب) حتا^{4} س حا^{2} س + ث

(جـ) حا^{6} س + ث (د) حتا^{6} س + ث

الوحدة 4

حساب المثلثات

دروس الوحدة

- مراجعة على أهم القوانين التى سبقت دراستها.

الدرس 1 زوايا الارتفاع والانخفاض «تطبيقات على حل المثلث».

الدرس 2 الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين.

الدرس 3 الدوال المثلثية لضعف قياس الزاوية.

مراجعة ؟ على أهم القوانين التى سبقت دراستها

العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية

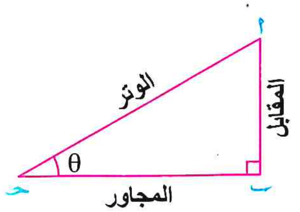
١ $\text{جتا}^2\,\theta + \text{جا}^2\,\theta = ١$

٢ $١ + \text{ظا}^2\,\theta = \text{قا}^2\,\theta$

٣ $١ + \text{ظتا}^2\,\theta = \text{قتا}^2\,\theta$

٤ $\text{جا}\,\theta\ \text{قتا}\,\theta = ١$ ، $\text{جتا}\,\theta\ \text{قا}\,\theta = ١$ ، $\text{ظا}\,\theta\ \text{ظتا}\,\theta = ١$

٥ $\text{ظا}\,\theta = \dfrac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$ ، $\text{ظتا}\,\theta = \dfrac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}$



• ينبغى تذكر العلاقات الآتية :

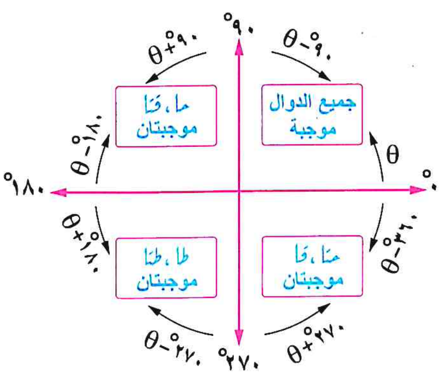
١ $\text{جا}\,\theta = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \dfrac{\text{أب}}{\text{أحـ}}$

٢ $\text{جتا}\,\theta = \dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \dfrac{\text{بحـ}}{\text{أحـ}}$

٣ $\text{ظا}\,\theta = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \dfrac{\text{أب}}{\text{بحـ}}$

٤ العلاقات بين الدوال المثلثية للزوايا المنتسبة هى متطابقات

ويمكن أن نتذكرها من الشكل المقابل :



فمثلاً : $\text{جا}\,(°٩٠ + \theta) = \text{جتا}\,\theta$

، $\text{ظا}\,(°٣٦٠ - \theta) = -\text{ظا}\,\theta$ ، ..... كل منهما متطابقة مثلثية.

قاعدة الجيب

فى أى مثلث أبحـ يكون : $\dfrac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \dfrac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \dfrac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}} = ٢\ \text{نق}$

حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أبحـ

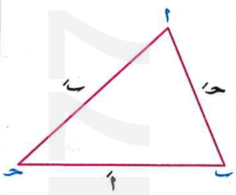
ملاحظتان

* باستخدام خواص التناسب نجد أن : $\dfrac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \dfrac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \dfrac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}} = \dfrac{\text{محيط}\ \Delta\ \text{أبحـ}}{\text{جا أ} + \text{جا ب} + \text{جا حـ}}$

* أكبر أضلاع المثلث طولاً يقابل أكبر زواياه قياسًا ، أصغر أضلاع المثلث طولاً يقابل أصغر زواياه قياسًا.

قاعدة جيب التمام ← في أي مثلث أ ب حـ يكون

• أ^{٢} = ب^{٢} + حـ^{٢} − ٢ ب حـ جتا أ • ب^{٢} = أ^{٢} + حـ^{٢} − ٢ أ حـ جتا ب • حـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} − ٢ أ ب جتا حـ	• جتا أ = $\frac{\text{ب}^{٢} + \text{حـ}^{٢} - \text{أ}^{٢}}{\text{٢ ب حـ}}$ • جتا ب = $\frac{\text{أ}^{٢} + \text{حـ}^{٢} - \text{ب}^{٢}}{\text{٢ أ حـ}}$ • جتا حـ = $\frac{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} - \text{حـ}^{٢}}{\text{٢ أ ب}}$
تستخدم إذا علم طولا ضلعين وقياس زاوية محصورة بينهما.	تستخدم إذا علمت أطوال الأضلاع الثلاثة في المثلث أو النسبة بينها.



ملاحظــات

* لإيجاد قياس إحدى زوايا مثلث يفضل استخدام قانون جيب التمام لأنه يحدد نوع الزاوية إذا كانت حادة أو منفرجة.

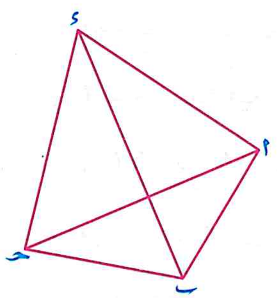
* إذا كان أ : ب : حـ = ٢ : ٣ : ٤

نفرض أن : أ = ٢ ك ، ب = ٣ ك ، حـ = ٤ ك حيث ك $\in$ ح$^{+}$

ثم نعوض في قانون جيب التمام لإيجاد

قياسات زوايا Δ أ ب حـ

* لإثبات أن الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري :



– نثبت أن زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان :

ق (∠ أ) + ق (∠ حـ) = ١٨٠° **أي أن :** جتا أ + جتا حـ = صفر

أ، ق (∠ ب) + ق (∠ ء) = ١٨٠° **أي أن :** جتا ب + جتا ء = صفر

– نثبت أن قياسي زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة فيه وفي جهة واحدة منها متساويان :

كأن نثبت أن : ق (∠ ب أ حـ) = ق (∠ ب ء حـ) **أي أن :** جتا (∠ ب أ حـ) = جتا (∠ ب ء حـ)

تمارين

تراكمية على ما سبقت دراسته

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى Δ س ص ع يكون المقدار : ٢ نق جا س = ...

(أ) عَ (ب) سَ

(جـ) صَ (د) مساحة Δ س ص ع

(٢) إذا كانت ∠ أ تكمل ∠ جـ فإن : جتا أ + جتا جـ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) -١ (د) $\frac{١}{٢}$

(٣) فى أى مثلث س ص ع يكون س ص : ص ع = ...

(أ) جا س : جا ص (ب) جا ص : جا ع

(جـ) جا ع : جا س (د) جا ع : جا ص

(٤) أ ب جـ مثلث فيه : $\frac{\text{جا أ}}{٣} = \frac{\text{٢ جا ب}}{٥} = \frac{\text{جا جـ}}{٤}$ فإن : أَ : بَ : جَ = ...

(أ) ٦ : ٥ : ٨ (ب) ٨ : ٥ : ٦ (جـ) ٧ : ٢ : ٤ (د) ٣ : ٥ : ٤

(٥) فى Δ س ص ع إذا كان : سَ = صَ فإن : جتا س = ...

(أ) $\frac{\text{٢ صَ}^{٢}}{\text{عَ}}$ (ب) $\frac{\text{عَ}}{\text{٢ صَ}}$ (جـ) $\frac{\text{عَ}}{\text{٤ سَ}}$ (د) $\frac{\text{صَ}}{\text{٢ سَ}}$

---

٢ س ص ع مثلث فيه : ق (∠ س) = ٨٠° ، ق (∠ ص) = ٦٠° ، عَ = ١٠ سم

أوجد كلًا من : سَ ، صَ لأقرب سم «١٥ سم ، ١٣ سم»

---

٣ حل المثلث أ ب جـ الذى فيه : ق (∠ أ) = ٥٠° ، أَ = ٤ سم ، بَ = ٣ سم

---

٤ أ ب جـ د شكل رباعى فيه : أ ب = أ د = ٩ سم ، ب جـ = ٥ سم ، جـ د = ٨ سم

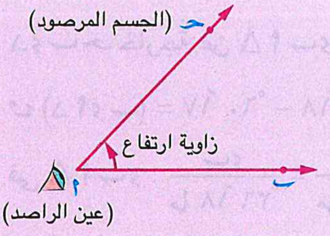
، أ جـ = ١١ سم **أثبت أن :** أ ب جـ د شكل رباعى دائرى.

الدرس 1

زوايا الارتفاع والانخفاض (تطبيقات على حل المثلث)

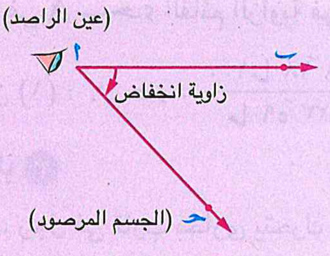
زاوية الارتفاع

إذا فرض أن هناك راصدًا عند نقطة أ ونظر إلى جسم عند نقطة حـ **أعلى مستوى النظر** فإن الزاوية المحصورة بين الشعاع $\overleftarrow{\text{أب}}$ الأفقي والشعاع $\overleftarrow{\text{أحـ}}$ الواصل بين عين الراصد والجسم المرصود تسمى **زاوية ارتفاع الجسم المرصود** حـ بالنسبة لنقطة أ



زاوية الانخفاض

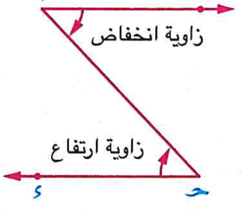
إذا فرض أن هناك راصدًا عند نقطة أ ونظر إلى جسم عند نقطة حـ **أسفل مستوى النظر**
فإن الزاوية المحصورة بين الشعاع $\overleftarrow{\text{أب}}$ الأفقي والشعاع $\overleftarrow{\text{أحـ}}$ الواصل بين عين الراصد والجسم المرصود تسمى **زاوية انخفاض الجسم المرصود** حـ بالنسبة لنقطة أ



ملاحظة

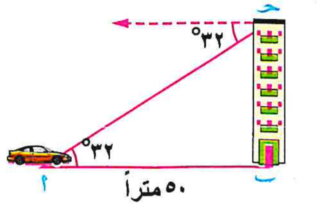
قياس زاوية انخفاض حـ بالنسبة إلى أ يساوي قياس زاوية ارتفاع أ بالنسبة إلى حـ

وذلك لأن : ق (∠ أ) = ق (∠ حـ) (بالتبادل)



مثال ١

من قمة منزل قيست زاوية انخفاض سيارة فوجد أن قياسها ٣٢° ، فإذا كانت السيارة تبعد عن قاعدة المنزل ٥٠ مترًا فأوجد ارتفاع المنزل لأقرب متر.



الحل

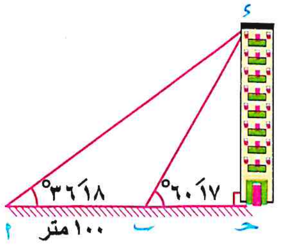
∵ Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ∴ طا أ = $\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ ب}}$

∴ طا ٣٢° = $\frac{\text{ب حـ}}{٥٠}$ ∴ ب حـ = ٥٠ طا ٣٢° ≈ ٣١ مترًا

∴ ارتفاع المنزل ≈ ٣١ مترًا

مثال ٢

رصد رجل زاوية ارتفاع قمة برج من نقطة على سطح الأرض فوجد أن قياسها يساوى ١٨َ ٣٦° ثم سار على طريق أفقى متجهًا نحو قاعدة البرج مسافة ١٠٠ متر ورصد زاوية ارتفاع قمة البرج مرة أخرى فوجد أن قياسها يساوى ١٧َ ٦٠° أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر.



الحل

∵ ∠ ء ب حـ خارجة عن Δ أ ب ء

∴ ق (∠ أ ء ب) = ١٧َ ٦٠° − ١٨َ ٣٦° = ٥٩َ ٢٣°

∴ فى Δ أ ب ء : $\frac{\text{ب ء}}{\text{جا } ١٨َ\ ٣٦°} = \frac{١٠٠}{\text{جا } ٥٩َ\ ٢٣°}$

∴ ب ء = $\frac{١٠٠ \text{ جا } ١٨َ\ ٣٦°}{\text{جا } ٥٩َ\ ٢٣°}$ (١)

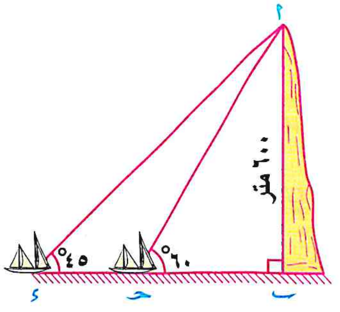
∴ فى Δ ب حـ ء القائم الزاوية فى حـ : $\frac{\text{حـ ء}}{\text{ب ء}}$ = جا ١٧َ ٦٠° ∴ حـ ء = ب ء جا ١٧َ ٦٠°

ومن (١) : ∴ حـ ء = $\frac{١٠٠ \text{ جا } ١٨َ\ ٣٦°}{\text{جا } ٥٩َ\ ٢٣°}$ × جا ١٧َ ٦٠° ≈ ١٢٦ مترًا. ∴ ارتفاع البرج ≈ ١٢٦ مترًا.

مثال ٣

وجد رجل فى قارب بخارى يتحرك فى الماء مبتعدًا عن صخرة ارتفاعها ٦٠٠ متر أن قياس زاوية ارتفاع قمة الصخرة فى لحظة معينة ٦٠° ثم أصبح قياسها بعد ٤ دقائق ٤٥°

احسب السرعة المتوسطة للقارب لأقرب متر/ دقيقة.



الحل

∵ السرعة المتوسطة = $\frac{\text{المسافة المقطوعة}}{\text{الزمن الذى قطعت فيه}}$

لذلك سنوجد أولًا طول $\overline{\text{حـ ء}}$ ثم نقسمه على الزمن (٤ دقائق)

فنحصل على السرعة المطلوبة.

في Δ أ ب حـ :

$\because$ $\frac{\text{٦٠٠}}{\text{ب حـ}}$ = ظا ٦٠° $\therefore$ ب حـ = $\frac{\text{٦٠٠}}{\text{ظا ٦٠°}}$ ≈ ٣٤٦,٤١ متر

في Δ أ ب ء : $\because$ ق(∠ب أ ء) = ١٨٠° − (٩٠° + ٤٥°) = ٤٥°

$\therefore$ Δ أ ب ء متساوى الساقين. $\therefore$ ب ء = أ ب = ٦٠٠ متر.

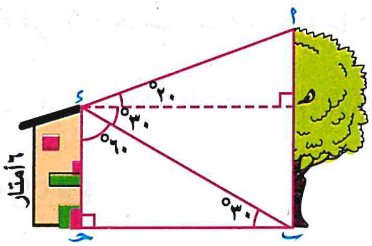
$\therefore$ حـ ء = ب ء − ب حـ = ٦٠٠ − ٣٤٦,٤١ ≈ ٢٥٣,٥٩ متر.

$\therefore$ السرعة = $\frac{\text{٢٥٣,٥٩}}{\text{٤}}$ ≈ ٦٣ متر/ دقيقة.

مثال ٤

من قمة منزل ارتفاعه ٦ أمتار كان قياس زاوية ارتفاع قمة شجرة ٢٠° ، قياس زاوية انخفاض قاعدتها ٣٠° أوجد المسافة بين قاعدتى المنزل والشجرة ، وكذلك أوجد ارتفاع الشجرة علمًا بأن قاعدتى المنزل والشجرة فى مستوى أفقى واحد.

الحل



فى Δ ب حـ ء : $\because$ $\frac{\text{٦}}{\text{حا ٣٠°}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{حا ٦٠°}}$

$\therefore$ ب حـ = $\frac{\text{٦ حا ٦٠°}}{\text{حا ٣٠°}}$ ≈ ١٠,٤ متر.

$\therefore$ المسافة بين قاعدتى الشجرة والمنزل = ١٠,٤ متر.

$\therefore$ فى Δ أ هـ ء : هـ ء = ١٠,٤ متر ، ق(∠أ) = ٧٠°

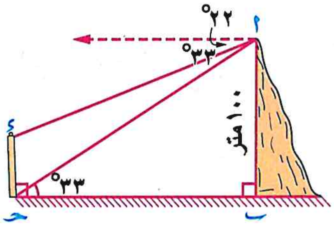
$\therefore$ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{حا ٢٠°}} = \frac{\text{١٠,٤}}{\text{حا ٧٠°}}$ $\therefore$ أ هـ = $\frac{\text{١٠,٤ حا ٢٠°}}{\text{حا ٧٠°}}$ ≈ ٣,٨ متر.

$\therefore$ ارتفاع الشجرة = ٣,٨ + ٦ = ٩,٨ متر.

مثال ٥

من قمة صخرة ارتفاعها ١٠٠ متر قيست زاويتا انخفاض قمة وقاعدة برج فكان قياساهما ٢٢° ، ٣٣° أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر علمًا بأن قاعدتى الصخرة والبرج فى مستوى أفقى واحد.

الحل



فى Δ أ ب حـ القائم الزاوية فى ب :

$\because$ $\frac{\text{١٠٠}}{\text{أ حـ}}$ = حا ٣٣° $\therefore$ أ حـ = $\frac{\text{١٠٠}}{\text{حا ٣٣°}}$ ≈ ١٨٣,٦ متر.

، فى Δ أ حـ ء : $\because$ ق(∠حـ أ ء) = ١١°

، ق(∠أ حـ ء) = ٥٧° (لماذا؟) $\therefore$ ق(∠ء) = ١١٢°

$\therefore$ $\frac{\text{أ حـ}}{\text{حا ١١٢°}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{حا ١١°}}$ $\therefore$ حـ ء = $\frac{\text{١٨٣,٦ × حا ١١°}}{\text{حا ١١٢°}}$ ≈ ٣٨ مترًا.

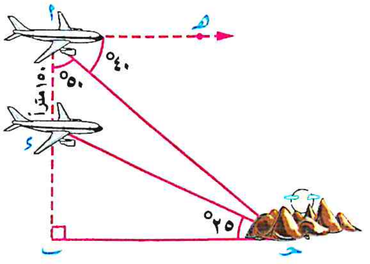
$\therefore$ ارتفاع البرج ≈ ٣٨ مترًا.

مثال ٦

رصد طيار موقعًا حربيًا فوجد أن قياس زاوية انخفاض الموقع ٤٠° ثم هبط رأسيًا لأسفل مسافة ١٥٠ مترًا فتنبه أحد الجند بالموقع الحربى للطائرة فرصد زاوية ارتفاع الطائرة فكان قياسها ٢٥°

أوجد ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض لحظة الرصد الثانية لأقرب متر.

الحل



∵ ق (∠ أ حـ ب) = ق (∠ هـ أ حـ) = ٤٠° (بالتبادل)

∴ ق (∠ أ حـ ء) = ٤٠° − ٢٥° = ١٥°

فى △ أ حـ ء : $\frac{١٥٠}{\text{جا } ١٥°} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{جا } ٥٠°}$

∴ حـ ء = $\frac{١٥٠ \text{ جا } ٥٠°}{\text{جا } ١٥°}$

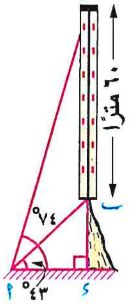
، فى △ ء حـ ب : ب ء = حـ ء جا ٢٥° = $\frac{١٥٠ \text{ جا } ٥٠°}{\text{جا } ١٥°}$ × جا ٢٥° ≈ ١٨٨ مترًا.

∴ ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض لحظة الرصد الثانية ≈ ١٨٨ مترًا.

مثال ٧

برج ارتفاعه ٦٠ مترًا مقام على صخرة ومن نقطة على سطح الأرض قيست زاويتا ارتفاع قمة وقاعدة البرج فوجد قياساهما ٧٤° ، ٤٣° على الترتيب. أوجد ارتفاع الصخرة.

الحل



فى △ أ ب حـ : ∠ أ ب حـ خارجة عن △ أ ب ء

∴ ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠° + ٤٣° = ١٣٣°

، ق (∠ حـ) = ١٨٠° − (٩٠° + ٧٤°) = ١٦°

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{جا } ١٦°} = \frac{٦٠}{\text{جا } ٣١°}$ ∴ أ ب = $\frac{٦٠ \text{ جا } ١٦°}{\text{جا } ٣١°}$

، فى △ أ ب ء : $\frac{\text{ب ء}}{\text{جا } ٤٣°} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جا } ٩٠°}$

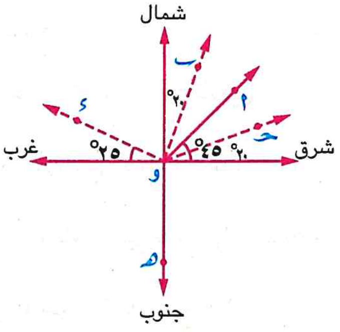
∴ ب ء = أ ب جا ٤٣° = $\frac{٦٠ \text{ جا } ١٦° \text{ جا } ٤٣°}{\text{جا } ٣١°}$ ≈ ٢١,٩ متر.

∴ ارتفاع الصخرة ≈ ٢١,٩ متر.

ملاحظة

لتحديد موضع جسم مرصود بالنسبة لنقطة رصد معلومة مستخدمين الاتجاهات الأصلية نرسم نقطة الأصل لمحاور الاتجاهات الأصلية عند نقطة الرصد ثم نرسم من نقطة الرصد شعاعًا حسب المعطى يحدد موضع الجسم بالنسبة لنقطة الرصد.

فهو مثلًا فى الشكل المقابل :



وأ يحدد موضع الجسم أ إذا كان فى اتجاه الشمال الشرقى من نقطة الرصد.

، وب يحدد موضع الجسم ب إذا كان فى اتجاه ٢٠° شرق الشمال من نقطة الرصد.

، وحـ يحدد موضع الجسم حـ إذا كان فى اتجاه ٢٠° شمال الشرق من نقطة الرصد.

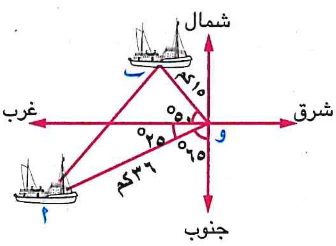
، وء يحدد موضع الجسم ء إذا كان فى اتجاه ٢٥° شمال الغرب من نقطة الرصد.

، وهـ يحدد موضع الجسم هـ إذا كان فى اتجاه الجنوب من نقطة الرصد.

مثال ٨

تحركت سفينة من نقطة معينة فى اتجاه ٦٥° غرب الجنوب بسرعة ١٢ كم / ساعة ، وفى نفس اللحظة تحركت سفينة أخرى من نفس المكان فى اتجاه ٥٠° شمال الغرب بسرعة ٥ كم / ساعة أوجد البعد بين السفينتين بعد ٣ ساعات.

الحل



المسافة التى قطعتها السفينة الأولى فى ٣ ساعات = ٣ × ١٢ = ٣٦ كم.

، المسافة التى قطعتها السفينة الثانية فى ٣ ساعات = ٣ × ٥ = ١٥ كم.

، ق (∠ أ و ب) = ٧٥°

∴ (أ ب)^{٢} = (أ و)^{٢} + (و ب)^{٢} − ٢ أ و × و ب جتا ٧٥° = (٣٦)^{٢} + (١٥)^{٢} − ٢ × ٣٦ × ١٥ جتا ٧٥°

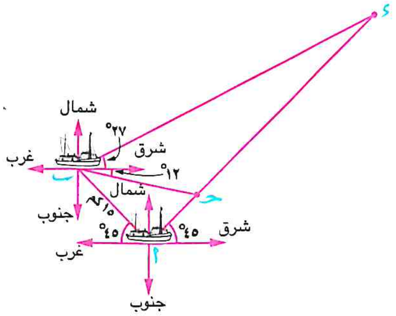
∴ أ ب ≈ ٣٥,٢٣ كم.

∴ البعد بين السفينتين ≈ ٣٥,٢٣ كم.

مثال ٩

سفينة تسير نحو الشمال الغربى بسرعة ٥ كم / ساعة شاهد راكب فيها مكانين ثابتين فى اتجاه الشمال الشرقى وبعد ٣ ساعات وجد الراكب أن أحد المكانين يقع فى اتجاه ١٢° جنوب الشرق ، وأن المكان الآخر يقع فى اتجاه ٢٧° شمال الشرق. أوجد البعد بين المكانين لأقرب كيلو متر مع العلم بأن المكانين والرجل فى مستوى أفقى واحد.

الحــل



نفرض أن المكانين الثابتين هما حـ ، ء

وأن الموضع الأول للسفينة أ والموضع الثانى لها ب

∴ المسافة التى قطعتها السفينة فى ٣ ساعات

هى أ ب = ٣ × ٥ = ١٥ كم.

فى Δ أ ب حـ :

ق (∠ ب أ حـ) = ٩٠° ، ق (∠ حـ ب أ) = ٤٥° − ١٢° = ٣٣°

∴ ق (∠ أ حـ ب) = ٥٧° ∴ $\frac{١٥}{\text{جا } ٥٧°} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{جا } ٩٠°}$

∴ ب حـ = $\frac{١٥}{\text{جا } ٥٧°}$ (١)

، ∵ ∠ أ حـ ب خارجة عن Δ ء حـ ب ∴ ق (∠ ء) = ٥٧° − (١٢° + ٢٧°) = ١٨°

∴ فى Δ ء حـ ب : $\frac{\text{ب حـ}}{\text{جا } ١٨°} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{جا } ٣٩°}$ ∴ حـ ء = $\frac{\text{ب حـ جا } ٣٩°}{\text{جا } ١٨°}$

ومن (١) : ∴ حـ ء = $\frac{١٥ \text{ جا } ٣٩°}{\text{جا } ٥٧° \times \text{جا } ١٨°}$ ≈ ٣٦ كم.

∴ البعد بين المكانين ≈ ٣٦ كم.

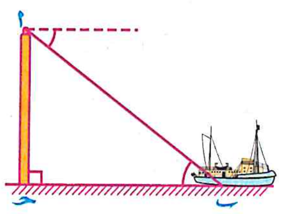
تمارين 16

على زوايا الارتفاع والانخفاض (تطبيقات على حل المثلث)

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



(١) من قمة منارة قيست زاوية انخفاض سفينة فوجد قياسها ٣٨° فإذا كان بعد السفينة عن قاعدة المنارة ٢٢٠ مترًا فإن ارتفاع المنارة عن سطح البحر ≃ .... مترًا.

(أ) ١٦٤ (ب) ١٧٢ (جـ) ١٨٦ (د) ١٩٦

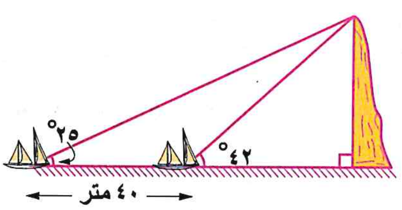
(٢) من نقطة على سطح الأرض رصد رجل زاوية ارتفاع قمة مبنى فوجدها هـ° فإن قياس زاوية انخفاض موضع الرجل فى نفس اللحظة من قمة المبنى هى ....

(أ) هـ° (ب) ٩٠° − هـ° (جـ) هـ° − ٩٠° (د) ١٨٠° − هـ°

(٣) نظر طفل من نقطة على سطح الأرض إلى قمة برج ارتفاعه ٥٠ متر فإذا كان الطفل يبعد ٥٠ $\sqrt{٣}$ متر عن قاعدة البرج فإن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج = ...

(أ) ٤٥° (ب) ١٢٠° (جـ) ٦٠° (د) ٣٠°

(٤) فى الشكل المقابل :



رصد شخص فى قارب زاوية ارتفاع قمة صخرة فوجد أن قياسها ٢٥° ثم تحرك فى طريق أفقى نحو قاعدة الصخرة مسافة ٤٠ متر ورصد زاوية ارتفاع قمة الصخرة مرة أخرى فوجد أن قياسها ٤٢° فإن ارتفاع الصخرة ≃ .... متر.

(أ) ٣٩ (ب) ٤٢ (جـ) ٤٦ (د) ٥١

(٥) من قمة برج ارتفاعه ٦٥ مترًا قيست زاويتا انخفاض النقطتين أ ، ب فى المستوى الأفقى فكان قياساهما ٣٢° ، ٢١° ١٣َ على الترتيب فإذا كانت ء تمثل قاعدة البرج ، أ ∈ $\overline{\text{ب ء}}$

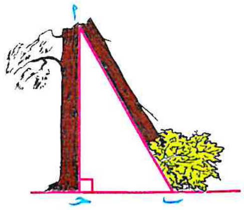
فإن : طول $\overline{\text{أ ب}}$ ≃ .... متر.

(أ) ٥٤ (ب) ٥٨ (جـ) ٦٣ (د) ٦٧

(٦) من شرفة منزل على ارتفاع ٨ أمتار من سطح الأرض قيست زاويتا ارتفاع وانخفاض قمة وقاعدة شجرة مقابلة علمًا بأن قاعدتى المنزل والشجرة فى مستوى أفقى واحد فكانتا متساويتين فى القياس فإن ارتفاع الشجرة = ... متر.

(أ) ٨ (ب) $٨\sqrt{٢}$ (جـ) ١٦ (د) ٢٤

(٧) بسبب الرياح كسر الجزء العلوى لشجرة فصنع مع الأرض زاوية قياسها ٦٠° فإذا كانت نقطة تلاقى قمة الشجرة بالأرض تبعد عن قاعدة الشجرة ١٠ أمتار فإن طول الشجرة ≃ .... مترًا.



(أ) ٣٢ (ب) ٣٥

(جـ) ٣٧ (د) ٤٢

(٨) كلما اقترب رجل من قاعدة برج فإن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج ....

(أ) تتزايد. (ب) تتناقص.

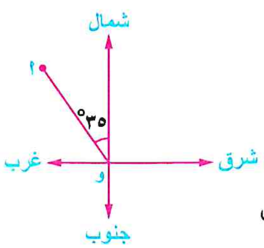
(جـ) ثابت. (د) لا يمكن تحديد التغير.

(٩) إذا رصد رجل زاوية ارتفاع قمة برج من نقطة (أ) فى المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج فوجد قياسها $\theta_{١}$ ثم صعد رأسيًا أعلى (أ) مسافة ف متر ورصد زاوية ارتفاع البرج مرة أخرى فوجد قياسها $\theta_{٢}$ فإن : ....

(أ) $\theta_{١} > \theta_{٢}$ (ب) $\theta_{١} < \theta_{٢}$

(جـ) $\theta_{١} = \theta_{٢}$ (د) $\theta_{١} + \theta_{٢} = ٩٠°$

(١٠) فى الشكل المقابل :

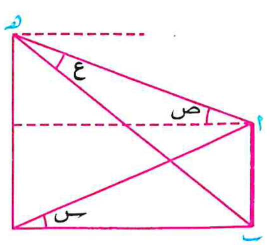


النقطة (أ) تقع .... بالنسبة للنقطة (و).

(أ) شمال (ب) غرب

(جـ) ٣٥° شمال الغرب (د) ٣٥° غرب الشمال

(١١) فى الشكل المقابل :



قياس زاوية ارتفاع النقطة (هـ) عندما يتم رصدها من النقطة (ب) تساوى ....

(أ) ع (ب) ص

(جـ) س (د) ص + ع

(١٢) من قمة جبل رصدت سيارة متحركة بسرعة منتظمة فى اتجاه قاعدة الجبل فكان قياس زاوية انخفاضها ٤٠° وبعد دقيقتين قيست زاوية انخفاض السيارة مرة ثانية فوجد قياسها ٦٧° فإن ارتفاع الجبل = ... متر علمًا بأن سرعة السيارة ٦٠ كم/ س

(أ) ٢٥٠٫٨ (ب) ٢٦٠٫٧ (جـ) ٢٧٠٫٦ (د) ٢٨٠٫٧

(١٣) يقف شخص فى منتصف المسافة بين مبنى وشجرة على نفس المستوى الأفقى فنظر إلى قمتى الشجرة والمبنى فكان قياسا زاويتى ارتفاعهما ٣٠° ، ٦٠° على الترتيب فإذا كان ارتفاع الشجرة ١٥ متر فإن ارتفاع المبنى = ... متر.

(أ) ٤٠ (ب) ١٥ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٣٠ $\sqrt{٣}$ (د) ٤٥

(١٤) رُصدت طائرة حـ من النقطتين أ ، ب على سطح الأرض عند لحظة مرورها بالمستوى الرأسى المار بالمستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ ، حيث أ ب = ٣٠٠٠ متر. فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها من أ هو ٢١َ ٥٣° ، وقياس زاوية ارتفاعها من ب هو ٢٦َ ٣٤° ، والمسقط الرأسى للطائرة ∈ $\overline{أب}$ فإن ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض ≃ .... متر.

(أ) ١١٥٤ (ب) ١٢٦٢ (جـ) ١٣٢٢ (د) ١٣٦٢

(١٥) رصد قائد طائرة هدفًا ثابتًا على الأرض فوجد أن قياس زاوية انخفاضه ٦٠° ولما هبط رأسيًا مسافة ٢٠٠ متر وجد أن قياس زاوية انخفاض الهدف أصبح ٤٥° فإن ارتفاع الطائرة عن الأرض لحظة الرصد الأولى للهدف = ... متر.

(أ) ٤٥٣ (ب) ٤٧٣ (جـ) ٤٩٣ (د) ٥١٢

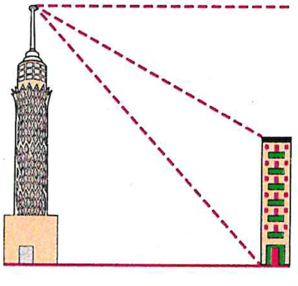
(١٦) (الملاحة البحرية) تحركت سفينة من نقطة معينة فى اتجاه ١٢° جنوب الشرق بسرعة ١١ كيلومتر/ساعة ، وفى نفس اللحظة تحركت سفينة أخرى من نفس النقطة فى اتجاه ٦٨° شمال الشرق بسرعة ٦,٥ كيلومتر/ساعة فإن المسافة بين السفينتين بعد ساعتين من لحظة تحركهما معًا = ... كم.

(أ) ٢٤ (ب) ٢٦ (جـ) ٢٨ (د) ٣٠

(١٧) ثلاث قرى أ ، ب ، حـ تقع القرية أ غرب القرية ب حيث أ ب = ٢٠ كم وتقع القرية حـ فى اتجاه ٤٨° شرق الشمال من القرية أ ، ٦٠° شمال الغرب من القرية ب فإن المسافة بين القريتين ب ، حـ ≃ .... كيلومتر.

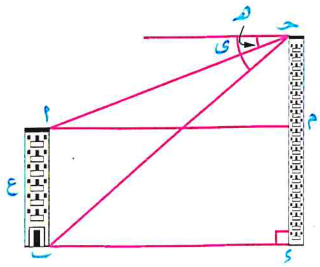
(أ) ١٣ (ب) ١٤ (جـ) ١٥ (د) ١٦

(١٨) من قمة برج القاهرة استخدم شخص المنظار ليرصد زاويتى انخفاض قمة وقاعدة منزله القريب من البرج فكان قياساهما ٤٥° ، ٦٠° على الترتيب فإذا كانت قاعدتا المنزل والبرج على نفس المستوى الأفقى وارتفاع البرج ١٨٧ متر فإن ارتفاع المنزل ≃ .... متر.



(أ) ٩٦ (ب) ٨٧ (جـ) ١٠٨ (د) ٧٩

(١٩) في الشكل المقابل :



$\overline{\text{حـ ء}}$ تمثل برجًا ، $\overline{\text{أ ب}}$ يمثل منزلًا ارتفاعه ع متر

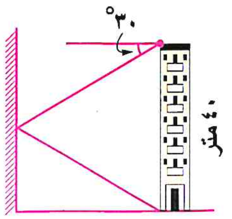
، هـ ، ى هما زاويتى انخفاض أ ، ب من حـ

على الترتيب فإن المسافة بين قمتى البرج

والمنزل = ... متر.

(أ) $\frac{\text{ع جا ى}}{\text{جا هـ}}$ (ب) ع جا ى جتا هـ (ج) $\frac{\text{ع جتا هـ}}{\text{جا (ى − هـ)}}$ (د) $\frac{\text{ع جتا ى}}{\text{جا (ى − هـ)}}$

(٢٠) إذا علمت أنه من قمة مبنى كانت زاوية انخفاض



صورة قاعدة المبنى من خلال مرآه رأسية على برج

مقابل للمبنى هى °٣٠ وكان ارتفاع المبنى = ٤٠ متر

فإن المسافة بين المبنى والبرج هى .... متر.

(أ) ٤٠ (ب) ٣٠ (ج) ٢٠ $\sqrt{3}$ (د) ٢٠

(٢١) إذا كانت نقطة (أ) تقع °٣٠ شمال شرق نقطة (و) وكانت نقطة (ب) تقع °٤٠ شمال غرب نقطة (و)

وكانت و أ = و ب فإن نقطة (أ) تقع .... نقطة (ب)

(أ) °٥ جنوب شرق (ب) °٥ شرق جنوب

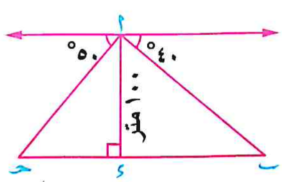
(ج) °٣٥ شمال غرب (د) °٣٥ جنوب شرق

(٢٢) من قمة برج قيست زاويتا انخفاض قمة مئذنة وقاعدتها فكان قياساهما ٢٧َ °٣٢ ، ٥٢َ °٥٧ على الترتيب

فإذا كان ارتفاع المئذنة ٣٧ مترًا فإن ارتفاع البرج ≃ .... متر.

(أ) ٥٧ (ب) ٦٢ (ج) ٦٧ (د) ٧١

(٢٣) في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ ء}}$ يمثل فنار ارتفاعه ١٠٠ متر عن سطح الأرض رصد منه شخص

زاويتى انخفاض قاربين «ب ، حـ» في مستوى أفقى واحد يمر بقاعدة

الفنار وفى جانبين مختلفين من الفنار فكان قياساهما °٤٠ ، °٥٠ على الترتيب

فإن البعد بين القاربين (ب حـ) ≃ .... متر

(أ) ٢٠٣ (ب) ١٥٢ (ج) ٣١٤ (د) ٢٣٢

(٢٤) **(الملاحة البحرية)** قارب بخارى يتحرك فى الماء فى خط مستقيم نحو صخرة بسرعة منتظمة

٣٠٠ متر/ دقيقة وعند لحظة معينة رصدت من القارب زاوية ارتفاع قمة الصخرة فوجد أن قياسها °٣٥

وبعد دقيقتين ومن نفس القارب تم رصد زاوية الارتفاع مرة أخرى فوجد أن قياسها °٦٠ فإن ارتفاع

الصخرة ≃ .... متر.

(أ) ٦٢٠ (ب) ٦٨٥ (ج) ٧٠٥ (د) ٧٣٥

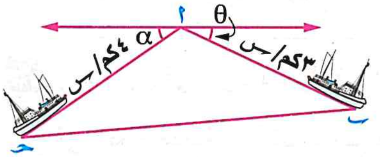
(٢٥) برج خاص بإحدى شركات الهاتف المحمول ارتفاعه ٣٠ مترًا موضوع فوق إحدى المبانى تم رصده من نقطة على سطح الأرض فكانت زاويتا ارتفاع قمة وقاعدة البرج قياساهما ٦٠° ، ٣٠° على الترتيب فإن ارتفاع المبنى = ... متر.

(أ) ٣٠ (ب) ١٥ (جـ) ٢٧,٥ (د) ١٨

(٢٦) من قاعدة منزل ارتفاعه ٢٥ مترًا ثم رصد شخص قمة مئذنة مقابلة فكان قياس زاوية ارتفاعها ٦٠° وعندما صعد إلى قمة المنزل ورصد قمة المئذنة مرة أخرى فكانت ٤٥° فإن ارتفاع المئذنة عن سطح الأرض ≃ .... متر.

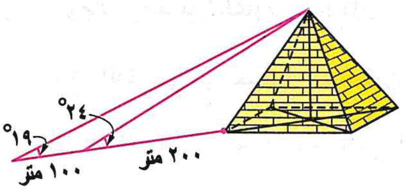
(أ) ٦٠ (ب) ٥٩ (جـ) ٢٥ + ٢٥ $\sqrt{٣}$ (د) ٥٠

(٢٧) أبحرت سفينتان من إحدى الموانئ تحركت السفينة الأولى عند السابعة صباحًا فى اتجاه θ° جنوب الشرق بسرعة ٣ كم/س وعند الثامنة صباحًا أبحرت السفينة الثانية فى اتجاه α° جنوب الغرب والسرعة ٤ كم/س إذا كانت المسافة بين السفينتين عند الساعة الحادية عشر صباحًا هى ١٢ $\sqrt{٣}$ كم فإن : θ° + α° = ...



(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ١٥٠° (د) ٩٠°

(٢٨) إذا قاس رجل زاوية ارتفاع قمة هرم من نقطتين على نفس المستوى المار بقاعدة الهرم وعلى الشعاع الحامل لقطر قاعدته وعلى مسافة ٢٠٠ م ، ٣٠٠ م من رأس القاعدة كما هو موضح بالشكل فوجد أن قياسيهما ٢٤° و ١٩° على الترتيب.
فإن ارتفاع الهرم لأقرب متر هو ....



(أ) ١٢٤ (ب) ١٥٢ (جـ) ١٦٨ (د) ٢١٢

ثانيًا الأسئلة المقالية

(١) رصد شخص زاوية ارتفاع قمة برج من نقطة على سطح الأرض فوجد قياسها ٢٥° ثم سار فى طريق أفقى مار بقاعدة البرج نحو قاعدة البرج مسافة س متر فوجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج ٥٥° فإذا كان ارتفاع البرج ٨٥ مترًا أوجد قيمة س لأقرب متر. «١٢٣ مترًا»

---

(٢) وقف رجل عند نقطة على سطح الأرض ورصد منها زاوية ارتفاع قمة صخرة فوجد قياسها ٧٥° ثم سار على طريق أفقى مبتعدًا عن قاعدة الصخرة مسافة ٨٠ مترًا ثم رصد مرة ثانية زاوية ارتفاع قمة الصخرة فوجد قياسها ٥٢° فإذا كانت نقطتا الرصد وقاعدة الصخرة على استقامة واحدة أوجد ارتفاع الصخرة لأقرب متر. «١٥٦ مترًا»

٣ من قمة صخرة ارتفاعها ٨٠ مترًا قيست زاويتا انخفاض قمة وقاعدة برج فوجد قياساهما °٢٤ ، °٣٥ على الترتيب. أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر علمًا بأن قاعدتى الصخرة والبرج فى مستوى أفقى واحد.

«٢٩ مترًا»

---

٤ من قمة برج قيست زاويتا انخفاض قمة مئذنة وقاعدتها فكان قياساهما °٢٣ ، °٤٧ على الترتيب فإذا كان ارتفاع المئذنة ٤٨ مترًا فأوجد المسافة بين قاعدتى البرج والمئذنة لأقرب متر علمًا بأن القاعدتين فى مستوى أفقى واحد.

«٧٤ مترًا»

---

٥ من شرفة مبنى ترتفع ٦ أمتار كان قياس زاوية ارتفاع قمة شجرة °١٥ وقياس زاوية انخفاض قاعدة الشجرة °٣٠ أوجد ارتفاع الشجرة وبعدها عن المبنى.

«٨,٨ متر ، ١٠,٤ متر»

---

٦ وجد رجل فى قارب يتحرك فى الماء مبتعدًا عن صخرة ارتفاعها ٥٠٠ متر أن قياس زاوية ارتفاع قمة الصخرة فى لحظة معينة °٦٠ ثم أصبح بعد دقيقتين °٤٥ احسب السرعة المتوسطة للقارب.

«١٠٥,٧ متر/دقيقة»

---

٧ من قمة فنار ارتفاعه ٨٠ مترًا عن سطح البحر رصد شخص زاويتى انخفاض قاربين فى مستوى أفقى مار بقاعدة الفنار فوجد أن قياسيهما ١َ٥ °٥٠ ، ٤َ٠ °٣٨

أوجد البعد بين القاربين إذا كان :

(١) القاربان فى جهتين مختلفتين من الفنار.

(٢) القاربان فى جهة واحدة من الفنار.

«١٦٧ مترًا ، ٣٣ مترًا»

---

٨ منارة ارتفاعها ٦٠ مترًا مقامة على تل بالقرب من شاطئ بحر ، قيست زاويتا ارتفاع قمة وقاعدة المنارة من قارب فوق سطح البحر فوجد قياساهما °٧٠ ، ٤٥َ على الترتيب.

أوجد ارتفاع التل عن سطح البحر لأقرب متر.

«٣٤ مترًا»

---

٩ قيست زاوية ارتفاع قمة برج لم يكتمل بناؤه من نقطة على بعد ١٣٠ مترًا من قاعدته فوجد قياسها °٣٥ فكم مترًا يجب أن ترتفعها قمة البرج ليصبح قياس زاوية ارتفاعها من نفس النقطة °٥٥ ؟

«٩٥ مترًا»

---

١٠ من نقطة على سطح أرض أفقية رصد رجل زاوية ارتفاع منطاد يتحرك رأسيًا بسرعة ثابتة مقدارها ٢٠ مترًا/دقيقة فوجد أن قياسها يساوى °٣٥ وبعد ثلاث دقائق أعيد الرصد من نفس النقطة فوجد أن قياس زاوية ارتفاع المنطاد أصبح °١٥ أوجد بُعد الرجل عن مسقط المنطاد على الأرض لأقرب متر.

«١٣٩ مترًا»

---

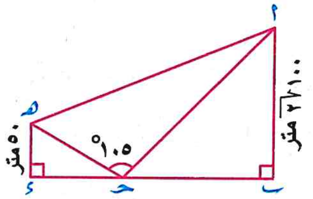
١١ من قاعدة منزل ارتفاعه ٢٠ مترًا رصدت زاوية ارتفاع قمة برج فوجد أن قياسها °٢٥ ثم رصدت قمة البرج مرة ثانية من قمة المنزل فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها °١٨ أوجد ارتفاع البرج.

«٦٦ مترًا»

١٢ من قمة جبل ارتفاعه ١٠٠ متر فوق سطح البحر ، رصد شخص زاوية انخفاض قمة صخرة ، فوجد أن قياسها ٣٧َ ٤٢° ، أوجد ارتفاع الصخرة عن سطح البحر إذا كانت تبعد عن الجبل مسافة ٢٢ مترًا ، علمًا بأنهما مُقامان على أرض أفقية واحدة. «٧٩,٨ مترا»

١٣ برجان البعد الأفقى بينهما ٦٠ مترًا وقياس زاوية انخفاض قمة الأول عندما ترصد من قمة الثانى يساوى ٣٠° أوجد ارتفاع البرج الأول إذا علم أن ارتفاع البرج الثانى ١٥٠ مترًا. «١١٥ مترًا»

١٤ فى الشكل المقابل :



بالونان أ ، هـ ارتفاعهما $100\sqrt{2}$ ، ٥٠ مترًا. رصدا جسمًا على الأرض (حـ) يقع فى المستوى الرأسى المار بالبالونين فإذا كان قياسا زاويتى انخفاض الجسم ٤٥° ، ٣٠° على الترتيب أوجد البعد بين البالونين مقربًا لأقرب متر. «٢٤٦ مترًا»

١٥ بالونان ارتفاعهما ٢٠٠ متر شاهدا جسمًا على الأرض يقع فى المستوى الرأسى المار بالبالونين فإذا كان قياسا زاويتى انخفاض الجسم ٣٦° ، ٥٤° أوجد المسافة بين البالونين إذا علم أن البالونين يرصدان الجسم من اتجاهين متضادين. «٤٢٠,٦ متر»

١٦ من نقطة تقع بين قاعدتى برج ارتفاعه ٧٥ مترًا وصخرة ارتفاعها ٣٥ مترًا ، قاس شخص زاويتى ارتفاع قمة البرج وقمة الصخرة فوجد قياسيهما ٦٣° ، ٤٨° على الترتيب.

أوجد : (١) البعد بين القاعدتين. (٢) البعد بين القمتين. «٧٠ مترًا ، ٨٠ مترًا»

١٧ تحركت سفينة بسرعة ١٢ كم/ ساعة فى اتجاه ٤٠° جنوب الغرب ، وفى نفس اللحظة ومن نفس المكان تحركت سفينة أخرى بسرعة ٢٠ كم/ ساعة فى اتجاه الشمال الغربى. أوجد البعد بين السفينتين بعد ثلاث ساعات من بدء حركتهما. «٦٧ كم»

١٨ يقف رجل عند نقطة ب فشاهد جسمًا عند نقطة حـ التى تبعد ٦٠ مترًا شرق ب وعندما سار من ب إلى أ فى اتجاه ٦٠° شمال الشرق وجد أن النقطة حـ فى اتجاه ١٥° جنوب الشرق من أ

أوجد بعد حـ عن أ «٥٣,٧٩ متر»

١٩ من نقطة أ على شاطئ نهر رصد رجل موقع منزل عند نقطة ب على الضفة الأخرى للنهر فوجدها فى اتجاه ٢٠° شمال الشرق ، ولما سار الرجل بمحاذاة الشاطئ فى اتجاه الشرق مسافة ٣٠٠ متر حتى وصل إلى نقطة حـ وجد أن نقطة ب فى اتجاه ٤٦° شمال الشرق. أوجد عرض النهر لأقرب متر علمًا بأن ضفتى النهر متوازيتان وأن النقط أ ، ب ، حـ فى مستوى أفقى واحد. «١٦٨ مترًا»

٢٠ إذا كان الميناء (أ) يقع شمال الميناء (ب) حيث أ ب = ١٠٠٠ متر ، (حـ) سفينة تقع فى اتجاه ٤٣ َ ٥٣° جنوب شرق الميناء (أ) ، تقع فى اتجاه ٤٤ َ ٤٢° شمال شرق الميناء (ب) أوجد بُعد السفينة عن الميناء (ب) لأقرب متر. «٥٩٦ مترًا»

٢١ تسير سفينة بسرعة ٢٤ كم/ ساعة فى اتجاه الجنوب ، رصد راكب هدفًا ثابتًا فى اتجاه ٦٥° شمال الشرق وبعد ساعة وجد الراكب أن السفينة فى اتجاه ٧٩° جنوب غرب نفس الهدف. أوجد بعد الهدف عن السفينة عندئذ. «٤٢ كم»

٢٢ أ ، ب ، حـ ثلاث مدن فى مستوى أفقى واحد ، ب تقع فى اتجاه الجنوب الغربى من أ وعلى بعد ٤٠ كم منها فإذا علم أن أ تقع شمال شرق حـ بزاوية قياسها ٣٥° ، ب تقع شمال شرق حـ بزاوية قياسها ٥° أوجد طول $\overline{أحـ}$ «٥١ كم»

٢٣ (الملاحة البحرية) سفينة تسير نحـو الشمـال الشـرقى بسرعـة ٢٤ كم/س شـاهـد راكب فيها نقطتين ثابتتين فى اتجاه ٢٥° غرب الشمال وبعد ٤ ساعات وجد هذا الراكب أن إحدى هاتين النقطتين أصبحت فى اتجاه ٢٣° جنوب الغرب بينما أصبحت النقطة الأخرى فى اتجاه ١٧° شمال الغرب. أوجد البعد بين النقطتين لأقرب كيلو متر علمًا بأن النقطتين والراكب فى مستوى أفقى واحد. «٧٨ كم»

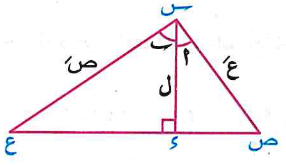
الدرس 2

الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين

١ إذا كان ٩ ، ب قياسى زاويتين فإن :

جا (٩ + ب) = جا ٩ جتا ب + جتا ٩ جا ب ، جا (٩ − ب) = جا ٩ جتا ب − جتا ٩ جا ب

البرهـان (لا يمتحن فيه الطالب)



من هندسة الشكل المقابل :

مساحة (Δ س ص ع) = مساحة (Δ س ص ء) + مساحة (Δ س ع ء)

∴ $\frac{1}{2}$ صَ عَ جا (٩ + ب) = $\frac{1}{2}$ عَ ل جا ٩ + $\frac{1}{2}$ صَ ل جا ب

(بالقسمة على $\frac{1}{2}$ صَ عَ) ∴ جا (٩ + ب) = $\frac{ل}{صَ}$ جا ٩ + $\frac{ل}{عَ}$ جا ب

، ∵ جتا ب = $\frac{ل}{صَ}$ ، جتا ٩ = $\frac{ل}{عَ}$ ∴ جا (٩ + ب) = جا ٩ جتا ب + جتا ٩ جا ب (المطلوب أولاً)

، بوضع (−ب) بدلاً من ب ∴ جا (٩ + (−ب)) = جا ٩ جتا (−ب) + جتا ٩ جا (−ب)

∴ جا (٩ − ب) = جا ٩ جتا ب − جتا ٩ جا ب [لأن جتا (−ب) = جتا ب ، جا (−ب) = − جا ب] (المطلوب ثانيًا)

٢ إذا كان ٩ ، ب قياسى زاويتين فإن :

جتا (٩ + ب) = جتا ٩ جتا ب − جا ٩ جا ب ، جتا (٩ − ب) = جتا ٩ جتا ب + جا ٩ جا ب

البرهـان

نعلم أن : جتا (٩ + ب) = جا $\left(\frac{\pi}{2} - (٩ + ب)\right)$

∴ جتا (٩ + ب) = جا $\left(\left(\frac{\pi}{2} - ٩\right) - ب\right)$ = جا $\left(\frac{\pi}{2} - ٩\right)$ جتا ب − جتا $\left(\frac{\pi}{2} - ٩\right)$ جا ب

$\therefore$ جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب − جا أ جا ب

[لأن جا $\left(\frac{\pi}{2} - \text{أ}\right)$ = جتا أ ، جتا $\left(\frac{\pi}{2} - \text{أ}\right)$ = جا أ] (المطلوب أولاً)

، بوضع (−ب) بدلاً من ب $\therefore$ جتا (أ + (−ب)) = جتا أ جتا (−ب) − جا أ جا (−ب)

$\therefore$ جتا (أ − ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب (المطلوب ثانيًا)

[٣] إذا كان أ ، ب قياسى زاويتين فإن : ظا (أ + ب) = $\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ − ظا أ ظا ب}}$ ، ظا (أ − ب) = $\frac{\text{ظا أ − ظا ب}}{\text{١ + ظا أ ظا ب}}$

حيث أ $\neq \frac{\pi}{2}$ (٢ ن + ١) ، ب $\neq \frac{\pi}{2}$ (٢ ن + ١) ، ظا أ ظا ب $\neq$ ± ١ على الترتيب ، ن $\in$ ص

البرهـان

ظا (أ ± ب) = $\frac{\text{جا (أ ± ب)}}{\text{جتا (أ ± ب)}}$ = $\frac{\text{جا أ جتا ب ± جتا أ جا ب}}{\text{جتا أ جتا ب ∓ جا أ جا ب}}$

وبقسمة كل من البسط والمقام على جتا أ جتا ب حيث جتا أ $\neq$ صفر ، جتا ب $\neq$ صفر

$\therefore$ ظا (أ ± ب) = $\dfrac{\frac{\text{جا أ جتا ب}}{\text{جتا أ جتا ب}} \pm \frac{\text{جتا أ جا ب}}{\text{جتا أ جتا ب}}}{\frac{\text{جتا أ جتا ب}}{\text{جتا أ جتا ب}} \mp \frac{\text{جا أ جا ب}}{\text{جتا أ جتا ب}}}$ = $\dfrac{\frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}} \pm \frac{\text{جا ب}}{\text{جتا ب}}}{\text{١} \mp \frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}} \times \frac{\text{جا ب}}{\text{جتا ب}}}$ = $\frac{\text{ظا أ ± ظا ب}}{\text{١ ∓ ظا أ ظا ب}}$ (وهو المطلوب)

* ونلخص القوانين السابقة للدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين فيما يلى :

[١] جا (أ ± ب) = جا أ جتا ب ± جتا أ جا ب

[٢] جتا (أ ± ب) = جتا أ جتا ب ∓ جا أ جا ب

[٣] ظا (أ ± ب) = $\frac{\text{ظا أ ± ظا ب}}{\text{١ ∓ ظا أ ظا ب}}$

مثال ①

بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة كل مما يأتى :

[١] جا °١٠٥ | [٢] جا °١٥ | [٣] جتا °٧٥

[٤] جتا (−°١٥) | [٥] ظا °١٠٥ | [٦] ظا (−°١٥)

الحـل

[١] جا °١٠٥ = جا (°٦٠ + °٤٥) = جا °٦٠ جتا °٤٥ + جتا °٦٠ جا °٤٥

= $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$

= $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

٢ $\text{جا}\ ١٥^\circ = \text{جا}\ (٦٠^\circ - ٤٥^\circ) = \text{جا}\ ٦٠^\circ\ \text{جتا}\ ٤٥^\circ - \text{جتا}\ ٦٠^\circ\ \text{جا}\ ٤٥^\circ$

$$= \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٣} - ١}{٢\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٤}$$

لاحظ أنه : يمكن اعتبار $\text{جا}\ ١٥^\circ = \text{جا}\ (٤٥^\circ - ٣٠^\circ)$ ويكمل الحل.

٣ $\text{جتا}\ ٧٥^\circ = \text{جتا}\ (٤٥^\circ + ٣٠^\circ) = \text{جتا}\ ٤٥^\circ\ \text{جتا}\ ٣٠^\circ - \text{جا}\ ٤٥^\circ\ \text{جا}\ ٣٠^\circ$

$$= \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢} = \frac{\sqrt{٣} - ١}{٢\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٤}$$

لاحظ أن : $\text{جتا}\ ٧٥^\circ = \text{جا}\ ١٥^\circ$

٤ $\text{جتا}\ (-١٥^\circ) = \text{جتا}\ ١٥^\circ = \text{جتا}\ (٤٥^\circ - ٣٠^\circ) = \text{جتا}\ ٤٥^\circ\ \text{جتا}\ ٣٠^\circ + \text{جا}\ ٤٥^\circ\ \text{جا}\ ٣٠^\circ$

$$= \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢} = \frac{\sqrt{٣} + ١}{٢\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٤}$$

٥ $\text{ظا}\ ١٠٥^\circ = \text{ظا}\ (٦٠^\circ + ٤٥^\circ) = \frac{\text{ظا}\ ٦٠^\circ + \text{ظا}\ ٤٥^\circ}{١ - \text{ظا}\ ٦٠^\circ\ \text{ظا}\ ٤٥^\circ} = \frac{\sqrt{٣} + ١}{١ - \sqrt{٣} \times ١} = \frac{\sqrt{٣} + ١}{١ - \sqrt{٣}} \times \frac{١ + \sqrt{٣}}{١ + \sqrt{٣}}$

$$= \frac{٣ + ٢\sqrt{٣} + ١}{١ - ٣} = \frac{٤ + ٢\sqrt{٣}}{-٢} = -٢ - \sqrt{٣}$$

٦ $\text{ظا}\ (-١٥^\circ) = -\text{ظا}\ ١٥^\circ = -\text{ظا}\ (٦٠^\circ - ٤٥^\circ) = -\left(\frac{\text{ظا}\ ٦٠^\circ - \text{ظا}\ ٤٥^\circ}{١ + \text{ظا}\ ٦٠^\circ\ \text{ظا}\ ٤٥^\circ}\right)$

$$= -\left(\frac{\sqrt{٣} - ١}{١ + \sqrt{٣}} \times \frac{١ - \sqrt{٣}}{١ - \sqrt{٣}}\right) = -\left(\frac{-٤ + ٢\sqrt{٣}}{-٢}\right) = -٢ + \sqrt{٣}$$

مثال ٢

بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة كل مما يأتى :

١ $\text{جا}\ ١٨^\circ\ \text{جتا}\ ١٢^\circ + \text{جتا}\ ١٨^\circ\ \text{جا}\ ١٢^\circ$

٢ $\text{جا}\ (٦٠^\circ + \text{س})\ \text{جتا}\ \text{س} - \text{جتا}\ (٦٠^\circ + \text{س})\ \text{جا}\ \text{س}$

٣ $\text{جتا}\ ٧٨^\circ\ \text{جتا}\ ١٨^\circ + \text{جتا}\ ١٢^\circ\ \text{جا}\ ١٨^\circ$

٤ $\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٤} - \text{س}\right) \text{جتا}\ \text{س} - \text{جا}\left(\frac{\pi}{٤} - \text{س}\right) \text{جا}\ \text{س}$

٥ $\frac{\text{ظا}\ ٢٥^\circ - \text{ظا}\ ١٧٥^\circ}{١ + \text{ظا}\ ٢٥^\circ\ \text{ظا}\ ١٧٥^\circ}$

٦ $\frac{\text{ظا}\ \frac{\pi}{١٢} + \text{ظا}\ \frac{\pi}{٦}}{١ - \text{ظا}\ \frac{\pi}{١٢}\ \text{ظا}\ \frac{\pi}{٦}}$

الحـــل

١ $\text{جا}\ ١٨^\circ\ \text{جتا}\ ١٢^\circ + \text{جتا}\ ١٨^\circ\ \text{جا}\ ١٢^\circ = \text{جا}\ (١٨^\circ + ١٢^\circ) = \text{جا}\ ٣٠^\circ = \frac{١}{٢}$

٢ $\text{جا}\ (٦٠^\circ + \text{س})\ \text{جتا}\ \text{س} - \text{جتا}\ (٦٠^\circ + \text{س})\ \text{جا}\ \text{س} = \text{جا}\left((٦٠^\circ + \text{س}) - \text{س}\right) = \text{جا}\ ٦٠^\circ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٣ $\because$ حتا ١٢° = حا ٧٨°

$\therefore$ حتا ٧٨° حتا ١٨° + حتا ١٢° حا ١٨° = حتا ٧٨° حتا ١٨° + حا ٧٨° حا ١٨°

= حتا (٧٨° − ١٨°) = حتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

٤ حتا $\left(\frac{\pi}{٤} - \text{س}\right)$ حتا س − حا $\left(\frac{\pi}{٤} - \text{س}\right)$ حا س = حتا $\left[\left(\frac{\pi}{٤} - \text{س}\right) + \text{س}\right]$

= حتا $\frac{\pi}{٤}$ = حتا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

٥ $\frac{\text{ظا } ٢٥° - \text{ظا } ١٧٥°}{١ + \text{ظا } ٢٥° \text{ ظا } ١٧٥°}$ = ظا (٢٥° − ١٧٥°) = ظا (−١٥٠°) = − ظا ١٥٠° = − ظا (١٨٠° − ٣٠°)

= − (− ظا ٣٠°) = ظا ٣٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

٦ $\frac{\text{ظا } \frac{\pi}{١٢} + \text{ظا } \frac{\pi}{٦}}{١ - \text{ظا } \frac{\pi}{١٢} \text{ ظا } \frac{\pi}{٦}}$ = ظا $\left(\frac{\pi}{١٢} + \frac{\pi}{٦}\right)$ = ظا $\frac{٣\pi}{١٢}$ = ظا $\frac{١}{٤}\pi$ = ظا ٤٥° = ١

مثال ٣

أثبت أن : ١ ظا ٥٠° = $\frac{١ + \text{ظا } ٥°}{١ - \text{ظا } ٥°}$ | ٢ حا (٣٠° − ٩) + حتا (٩ − ٦٠°) = حا (٩٠° + ٩)

٣ $\frac{\text{حا } ٩ \text{ س حتا } ٤ \text{ س} - \text{حتا } ٩ \text{ س حا } ٤ \text{ س}}{\text{حتا } ٧ \text{ س حتا } ٢ \text{ س} + \text{حا } ٧ \text{ س حا } ٢ \text{ س}}$ = ظا ٥ س

الحل

١ الطرف الأيمن = ظا ٥٠° = ظا (٤٥° + ٥°) = $\frac{\text{ظا } ٤٥° + \text{ظا } ٥°}{١ - \text{ظا } ٤٥° \text{ ظا } ٥°} = \frac{١ + \text{ظا } ٥°}{١ - \text{ظا } ٥°}$ = الطرف الأيسر.

٢ الطرف الأيمن = حا ٣٠° حتا ٩ − حتا ٣٠° حا ٩ + حتا ٩ حتا ٦٠° + حا ٩ حا ٦٠°

= $\frac{١}{٢}$ حتا ٩ − $\frac{\cancel{\sqrt{٣}}}{٢}$ حا ٩ + $\frac{١}{٢}$ حتا ٩ + $\frac{\cancel{\sqrt{٣}}}{٢}$ حا ٩ = حتا ٩

، الطرف الأيسر = حا (٩٠° + ٩) = حتا ٩ $\therefore$ الطرفان متساويان.

٣ الطرف الأيمن = $\frac{\text{حا } (٩ \text{ س} - ٤ \text{ س})}{\text{حتا } (٧ \text{ س} - ٢ \text{ س})} = \frac{\text{حا } ٥ \text{ س}}{\text{حتا } ٥ \text{ س}}$ = ظا ٥ س = الطرف الأيسر.

مثال ٤

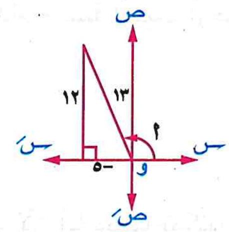
إذا كانت : حا ٩ = $\frac{١٢}{١٣}$ ، ٩ ∋] $\frac{\pi}{٢}$ ، π [، حتا ب = $\frac{٤}{٥}$ ، ٠ < ب < $\frac{\pi}{٢}$

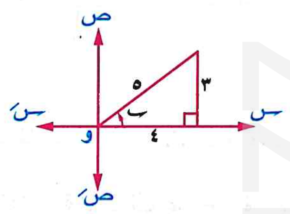
فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من :

١ حا (٩ + ب) ٢ حتا (٩ − ب) ٣ ظا (٩ + ب)

الحل

أ قياس زاوية فى الربع الثانى ، ب قياس زاوية فى الربع الأول





١ جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب = $\frac{١٢}{١٣} \times \frac{٤}{٥} + \frac{-٥}{١٣} \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣٣}{٦٥}$

٢ جتا (أ − ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب = $\frac{-٥}{١٣} \times \frac{٤}{٥} + \frac{١٢}{١٣} \times \frac{٣}{٥} = \frac{١٦}{٦٥}$

٣ ظا (أ + ب) = $\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ − ظا أ ظا ب}} = \frac{-\frac{١٢}{٥} + \frac{٣}{٤}}{١ - \left(\frac{-١٢}{٥}\right)\left(\frac{٣}{٤}\right)} = \frac{-٣٣}{٥٦}$

مثال ٥

إذا كانت : ظا أ = $\frac{٢}{٣}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٥}$ **فأثبت أن :** أ + ب = ٤٥° حيث أ ، ب قياسا زاويتين حادتين.

الحل

ظا (أ + ب) = $\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ − ظا أ ظا ب}} = \frac{\frac{٢}{٣} + \frac{١}{٥}}{١ - \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٥}} = ١$ ∴ أ + ب = ٤٥°

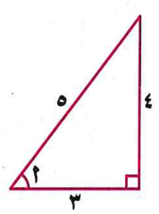
مثال ٦

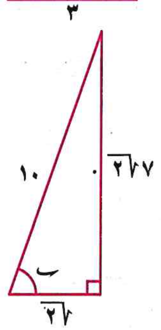
أ ب ح مثلث حاد الزوايا فيه : جا أ = $\frac{٤}{٥}$ ، جتا ب = $\frac{\sqrt{٢}}{١٠}$

بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد : جا ح ثم استنتج ق (∠ ح)

الحل

بفرض أن : أ ، ب ، ح قياسات زوايا المثلث أ ب ح





∴ أ + ب + ح = ١٨٠°

∴ ح = ١٨٠° − (أ + ب)

∴ جا ح = جا [١٨٠° − (أ + ب)] = جا (أ + ب)

= جا أ جتا ب + جتا أ جا ب

= $\frac{٤}{٥} \times \frac{\sqrt{٢}}{١٠} + \frac{٣}{٥} \times \frac{٧\sqrt{٢}}{١٠} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

∴ ق (∠ ح) = ٤٥°

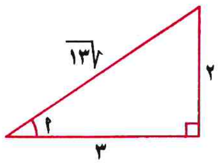
مثال ٧

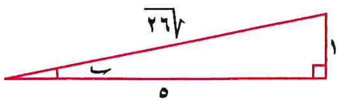
أ ب حـ مثلث فيه : $\text{حتا أ} = \frac{٣}{\sqrt{١٣}}$ ، $\text{حتا ب} = \frac{٥}{\sqrt{٢٦}}$ **بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد :** ق (∠ حـ)

الحل

∵ حتا أ ، حتا ب موجبتان. ∴ ∠ أ ، ∠ ب حادتان.

∴ لإيجاد ق (∠ حـ) فإننا نقوم بذلك عن طريق إيجاد حتا حـ أ ، طا حـ لأن أيًا منهما تمكننا من التفرقة بين الزاوية الحادة والمنفرجة فإذا كان الناتج موجبًا كانت ∠ حـ حادة، وإذا كان سالبًا كانت ∠ حـ منفرجة.





∵ أ + ب + حـ = ١٨٠°

∴ حـ = ١٨٠° − (أ + ب)

∴ طا حـ = طا [١٨٠° − (أ + ب)] = − طا (أ + ب)

$$= - \frac{\text{طا أ} + \text{طا ب}}{١ - \text{طا أ طا ب}} = - \frac{\frac{٢}{٣} + \frac{١}{٥}}{١ - \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٥}} = -١$$

∴ ق (∠ حـ) = ١٣٥°

مثال ٨

إذا كانت شدة التيار الكهربائى (ت) تعطى بالعلاقة : ت = $\frac{٥}{٢}$ جا (١٠٥° ن) حيث ن الزمن بالثانية

أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة شدة التيار الكهربائى بعد ثانية واحدة.

الحل

∵ ت = $\frac{٥}{٢}$ جا (١٠٥° ن) بوضع ن = ١ ∴ ت = $\frac{٥}{٢}$ جا (١٠٥°)

∴ ت = $\frac{٥}{٢}$ جا (٦٠° + ٤٥°) = $\frac{٥}{٢}$ (جا ٦٠° جتا ٤٥° + جتا ٦٠° جا ٤٥°)

$$= \frac{٥}{٢} \left[\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \right] = \frac{٥}{٢} \times \frac{\sqrt{٣} + ١}{٢\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{٥}{٨} \left(\sqrt{٦} + \sqrt{٢} \right)$$

مثال ٩

أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين حيث : ٠° < س < ٣٦٠° :

[١] جتا س جتا ٣٥° − جا س جا ٣٥° = $\frac{١}{٢}$ | [٢] طا س + طا ٤٢° + طا س طا ٤٢° = ١

الحل

[١] ∵ جتا س جتا ٣٥° − جا س جا ٣٥° = $\frac{١}{٢}$ ∴ جتا (س + ٣٥°) = $\frac{١}{٢}$ (موجبة)

∴ (س + ٣٥°) تقع فى الربع الأول أو الرابع

، ∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها يساوى $\frac{١}{٢}$ قياسها ٦٠°

∴ س + ٣٥° = ٦٠° ومنها س = ٢٥°

أ، س + ٣٥° = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠° ومنها س = ٢٦٥° ∴ مجموعة الحل = {٢٥° ، ٢٦٥°}

٢ ∵ ظا س + ظا ٤٢° + ظا س ظا ٤٢° = ١ ∴ ظا س + ظا ٤٢° = ١ − ظا س ظا ٤٢°

∴ $\frac{\text{ظا س + ظا ٤٢°}}{\text{١ − ظا س ظا ٤٢°}}$ = ١ ∴ ظا (س + ٤٢°) = ١ (موجبة)

∴ (س + ٤٢°) تقع فى الربع الأول أو الثالث

، ∵ الزاوية الحادة التى ظلها يساوى ١ قياسها ٤٥° ∴ س + ٤٢° = ٤٥° ومنها س = ٣°

أ، س + ٤٢° = ١٨٠° + ٤٥° = ٢٢٥° ومنها س = ١٨٣° ∴ مجموعة الحل = {٣° ، ١٨٣°}

مثال ١٠

إذا كان أ ، ب قياسى زاويتين حادتين حيث أ + ب = ١٢٠° وكان ٢ حا أ = ($\sqrt{٣}$ + ١) حا ب

فأوجد : أ ، ب

الحل

∵ أ + ب = ١٢٠° ∴ أ = ١٢٠° − ب

، ∵ ٢ حا أ = ($\sqrt{٣}$ + ١) حا ب ∴ ٢ حا (١٢٠° − ب) = ($\sqrt{٣}$ + ١) حا ب

∴ ٢ (حا ١٢٠° جتا ب − جتا ١٢٠° حا ب) = ($\sqrt{٣}$ + ١) حا ب

∴ ٢ ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جتا ب − $\frac{-١}{٢}$ حا ب) = ($\sqrt{٣}$ + ١) حا ب ∴ $\sqrt{٣}$ جتا ب + حا ب = $\sqrt{٣}$ حا ب + حا ب

∴ جتا ب = حا ب ∴ $\frac{\text{حا ب}}{\text{جتا ب}}$ = ١

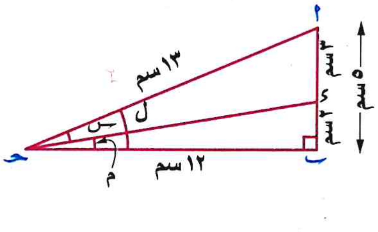
∴ ظا ب = ١ ∴ ب = ٤٥° ، أ = ٧٥°

مثال ١١

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : أ ب = ٥ سم ، أ حـ = ١٣ سم أخذت نقطة ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ بحيث أ ء = ٣ سم

فإذا كان ق (∠ أ حـ ء) = س **فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة :** ظا س

الحل



ب حـ = $\sqrt{(١٣)^٢ - (٥)^٢}$ = ١٢ سم

وبفرض ق (∠ أ حـ ب) = ل ، ق (∠ ء حـ ب) = م

∴ ظا س = ظا (ل − م) = $\frac{\text{ظا ل − ظا م}}{\text{١ + ظا ل ظا م}} = \frac{\frac{٥}{١٢} - \frac{٢}{١٢}}{١ + \frac{٥}{١٢} \times \frac{٢}{١٢}} = \frac{١٨}{٧٧}$

تمارين 17

على الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) جا أ جتا ب + جتا أ جا ب = ...

(أ) جا (أ + ب) (ب) جا (أ − ب) (جـ) جتا (أ + ب) (د) جتا (أ − ب)

(٢) جا أ جتا ب − جتا أ جا ب = ...

(أ) جا (أ + ب) (ب) جتا (أ + ب) (جـ) جا (أ − ب) (د) جتا (أ − ب)

(٣) جا (أ + ب) + جا (أ − ب) = ...

(أ) ٢ جا أ (ب) ٢ جا^{٢} أ (جـ) ٢ جتا أ جا أ (د) ٢ جا أ جتا ب

(٤) جا $\frac{\pi}{٩}$ جتا $\frac{\pi}{١٨}$ + جتا $\frac{\pi}{٩}$ جا $\frac{\pi}{١٨}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (جـ) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٥) إذا كان : $\frac{\text{ظا س} - \text{ظا ص}}{١ + \text{ظا س ظا ص}}$ = ٢ فإن : ظا (س − ص) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (جـ) $\sqrt{٢}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

(٦) $\frac{\text{ظا } ٥٠^\circ + \text{ظا } ١٠^\circ}{١ - \text{ظا } ٥٠^\circ \text{ ظا } ١٠^\circ}$ = ...

(أ) ظا ٤٠° (ب) ظا ٦٠°

(جـ) ظا ٥٠° × ظا ١٠° (د) ٢ ظا ٥٠° ظا ١٠°

(٧) $\frac{١ + \text{ظا أ}}{١ - \text{ظا أ}}$ = ...

(أ) ظا $\left(\frac{\pi}{٤} + \text{أ}\right)$ (ب) ظا $\left(\frac{٣\pi}{٤} + \text{أ}\right)$ (جـ) ظا $\left(\frac{\pi}{٢} + \text{أ}\right)$ (د) ظا $\left(\frac{٥\pi}{٤} - \text{أ}\right)$

(٨) إذا كان : ظا ٢٠° = أ ، ظتا ١٥° = ب فإن : ظا ٣٥° = ...

(أ) $\frac{\text{أب} - ١}{\text{ب} - \text{أ}}$ (ب) $\frac{\text{أ} - \text{ب}}{\text{أب} - ١}$ (جـ) $\frac{\text{أب} + ١}{\text{ب} - \text{أ}}$ (د) $\frac{\text{أب} + ١}{\text{ب} + \text{أ}}$

(٩) جا $\left(\theta + \frac{\pi}{٦}\right)$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (جتا θ + $\sqrt{٣}$ جا θ) (ب) $\frac{١}{٢}$ (جتا θ + جا θ)

(جـ) $\frac{١}{٢}$ ($\sqrt{٣}$ جتا θ + جا θ) (د) $\frac{١}{٢}$ ($\sqrt{٣}$ جتا θ + $\sqrt{٢}$ جا θ)

(١٠) حا ٥ س حا ٣ س + حتا ٥ س حتا ٣ س = ...

(أ) حتا ٢ س (ب) حتا ٨ س (جـ) حا ٨ س (د) حا ٢ س

(١١) إذا كان : طا $\theta = \frac{١}{٢}$ فإن : طا $(\theta + ٤٥^\circ)$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ٣ (د) ٦

(١٢) ا ب حـ مثلث حاد الزوايا فيه : حا ا = $\frac{٣}{١٠ \text{ حتا ب}}$ ، حتا ا = $\frac{١}{٥ \text{ حا ب}}$

فإن : ق (∠حـ) = ...

(أ) ١٥° (ب) ٤٥° (جـ) ٣٠° (د) ٦٠°

(١٣) Δ ا ب حـ فيه : طا $\frac{ا}{٢} = \frac{١}{٣}$ ، طا $\frac{ب}{٢} = \frac{٢}{٣}$ فإن : طا $\frac{حـ}{٢}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٧}{٩}$ (د) ١

(١٤) إذا كان : طا ا = $\frac{١}{٢}$ ، طا ب = $\frac{١}{٣}$ فإن : طا (ا + ب) = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{-٥}{٦}$ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) $\frac{٥}{٦}$

(١٥) طا $\left(٢\pi - \frac{٥\pi}{١٢}\right)$ = ...

(أ) $٢ + \sqrt{٣}$ (ب) $٢ - \sqrt{٣}$ (جـ) $-٢ - \sqrt{٣}$ (د) $\sqrt{٣} - ٢$

(١٦) حا ٨٧° حتا ٢٧° − حتا ٨٧° حا ٢٧° = ...

(أ) حا ٦٠° (ب) حتا ٦٠° (جـ) حا ١١٤° (د) حتا ١١٤°

(١٧) مجموعة حل المعادلة : حا س حتا ٤٥° − حتا س حا ٤٥° = $\frac{١}{٢}$ حيث $٠^\circ <$ س $< ٣٦٠^\circ$

تساوى ....

(أ) $\{٣٠^\circ ، ١٥٠^\circ\}$ (ب) $\{٣٠^\circ\}$ (جـ) $\{٧٥^\circ ، ١٩٥^\circ\}$ (د) $\{٧٥^\circ ، ١٠٥^\circ\}$

(١٨) $\sqrt{٢}$ حتا (ا − ٤٥°) = ...

(أ) حا ا + حتا ا (ب) حا ا − حتا ا (جـ) حا ا حتا ا (د) طا ا + طتا ا

(١٩) إذا كانت : ∠ا تكمل ∠ب فإن : حتا ا حتا ب − حا ا حا ب = ...

(أ) −١ (ب) ١٨٠ (جـ) ١ (د) صفر

(٢٠) إذا كانت : حتا ا = ٠,٦ ، حتا ب = ٠,٨ حيث ا ، ب قياسا زاويتين حادتين

فإن : حتا (ا − ب) = ...

(أ) $\frac{٢٤}{٢٥}$ (ب) $\frac{٧}{٢٤}$ (جـ) $\frac{٧}{٢٥}$ (د) $\frac{٢\sqrt{٦}}{٥}$

(٢١) حتا س حتا $\left(س + \frac{\pi}{٣}\right)$ + حا س حا $\left(س + \frac{\pi}{٣}\right)$ = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ (د) $\frac{-١}{٢}$

(٢٢) إذا كان : طا ا + طا ب = ٤ − ٤ طا ا طا ب فإن : طا (ا + ب) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٤ (جـ) ١ (د) ٢

(٢٣) $\frac{\text{ظا}\,(أ - ب) + \text{ظا}\,ب}{١ - \text{ظا}\,(أ - ب)\ \text{ظا}\,ب}$ = ...

(أ) ظا أ　(ب) − ظا (أ + ب)　(ج) ظا (أ + ب)　(د) − ظا ب

(٢٤) Δ أ ب حـ فيه : جتا أ = $\frac{-٣}{٥}$ ، جا ب = $\frac{٥}{١٣}$ فإن : جا حـ = ...

(أ) $\frac{٣٢}{٦٥}$　(ب) $\frac{١٧}{٦٥}$　(جـ) $\frac{٣٣}{٦٥}$　(د) $\frac{٣}{١٣}$

(٢٥) إذا كانت : ∠ أ ، ∠ ب زاويتين حادتين ، ظا أ = $\frac{٥}{٦}$ ، ظا ب = $\frac{١}{١١}$ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٣٠°　(ب) ٤٥°　(جـ) ٦٠°　(د) ٩٠°

(٢٦) إذا كان : ظا س + ظا ص = ٤ ، ظتا س + ظتا ص = $\frac{٢}{٣}$ فإن : ظا (س + ص) = ...

(أ) $\frac{-٣}{٤}$　(ب) $\frac{-٤}{٥}$　(جـ) $\frac{٣}{٥}$　(د) ١

(٢٧) جا (س − ٦٠°) + جتا (س − ٣٠°) = ...

(أ) جا س　(ب) جتا س

(جـ) جا (س + ٣٠°)　(د) جتا (س + ٦٠°)

(٢٨) إذا كانت جتا (أ − ب) = $\frac{٣}{٥}$ ، ظا أ ظا ب = ٢ فإن : ....

(أ) جتا أ جتا ب = $\frac{١}{٥}$　(ب) جا أ جا ب = $\frac{-٢}{٥}$　(جـ) جتا (أ + ب) = $\frac{١}{٥}$　(د) جا أ جا ب = $\frac{٤}{٥}$

(٢٩) إذا كان : س + ص = $\frac{٥\pi}{٦}$ فإن : (جا س − جتا ص)^{٢} + (جتا س − جا ص)^{٢} = ...

(أ) ١　(ب) $\frac{٣}{٢}$　(جـ) ٢　(د) ٣

(٣٠) إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : جا أ + جا ب جتا حـ + جتا ب جا حـ = $\sqrt{٣}$

فإن : ق (∠ أ) يمكن أن تكون ....

(أ) ٣٠°　(ب) ٤٥°　(جـ) ٦٠°　(د) ٩٠°

(٣١) $\frac{\text{جا}\,٢\,س}{\text{جا}\,س} - \frac{\text{جتا}\,٢\,س}{\text{جتا}\,س}$ = ...

(أ) قا س　(ب) قتا س　(جـ) جا^{٢} س　(د) جتا^{٢} س

(٣٢) ظا أ − ظا ب = $\frac{...............}{\text{جتا}\,أ\ \text{جتا}\,ب}$

(أ) جا (أ + ب)　(ب) جا (أ − ب)　(جـ) جتا (أ − ب)　(د) جا أ − جا ب

(٣٣) إذا كان : قا أ = $\frac{٥}{٤}$ ، قتا ب = $\frac{١٣}{٥}$ حيث أ ، ب قياسا زاويتين حادتين

فإن : قا (أ − ب) = ...

(أ) $\frac{٥٦}{٦٥}$　(ب) $\frac{٦٣}{٦٥}$　(جـ) $\frac{-٣٣}{٦٥}$　(د) $\frac{٦٥}{٦٣}$

(٣٤) إذا كان : ظا^{٢} أ = $\frac{٩}{١٦}$ حيث أ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[، ظا^{٢} ب = $\frac{١}{٩}$ حيث ب ∈]$\frac{\pi}{٢}$ ، π[

فإن : ظا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$　(ب) $\frac{٢}{٣}$　(جـ) $\frac{١}{٩}$　(د) $\frac{٢}{٩}$

(٣٥) إذا كان : ظا أ = س + ١ ، ظا ب = س − ١ فإن : ظتا (أ − ب) = ...

(أ) $\frac{٢}{س^{٢}}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ س^{٢} (جـ) س^{٢} (د) $\frac{١}{س^{٢}}$

(٣٦) إذا كان أ ، ب قياسي زاويتين حادتين وكان : جا أ جا ب = $\frac{١}{٢}$ ، جتا أ جتا ب = $\frac{١}{٣}$

فإن : جتا (أ − ب) = ...

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{٥}{٦}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{-١}{٦}$

(٣٧) إذا كان : ظا (θ + ٤٥°) = $\frac{٣}{٢}$ فإن : ظا θ = ...

(أ) − $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

(٣٨) إذا كان : ٠ < ص < $\frac{\pi}{٢}$ ، س + ص = $\frac{\pi}{٤}$ ، جا ص = $\frac{١}{\sqrt{١٠}}$

فإن : ظا (٣ س + ٤ ص) = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{-١}{٢}$ (د) −١

(٣٩) إذا كان : ظا (حـ − ٣٠°) = $\frac{\text{أ ظا حـ} - ١}{\text{أ} + \text{ظا حـ}}$ فإن : أ = ...

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (جـ) $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ (د) − $\sqrt{٣}$

(٤٠) إذا كانت : س ∈] ٠ ، ٢ π [وكان : $\frac{\text{ظا س} - \text{ظتا } ٥٥°}{١ + \text{ظا س ظتا } ٥٥°}$ = ١ فإن : س = ...

(أ) $\frac{\pi}{٩}$ فقط. (ب) $\frac{٤\pi}{٩}$ فقط. (جـ) $\frac{٤\pi}{٩}$ أ، $\frac{١٣\pi}{٩}$ (د) $\frac{١٠\pi}{٩}$ أ، $\frac{١١\pi}{٩}$

(٤١) إذا كان : ١ + جتا س جتا ص + جا س جا ص = ٠ فإن : ....

(أ) س − ص = −١ (ب) س + ص = ١

(جـ) جتا س − جتا ص = ٠ (د) جتا س + جتا ص = ٠

(٤٢) إذا كان : ظتا س − ظتا ص = −٥ ، ظا س ظا ص = $\frac{١}{٢}$ فإن : ظا (س − ص) = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{٥}{٢}$

(٤٣) إذا كانت : س + ص = ٢٢٥° فإن : (١ + ظا س) (١ + ظا ص) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) $\frac{١}{٢}$

(٤٤) إذا كانت : ٠ ≤ س < π فإن مجموعة حل المعادلة : جا (س − $\frac{٤\pi}{٣}$) = ٢ جا (س − $\frac{\pi}{٣}$)

هى ....

(أ) { $\frac{\pi}{٢}$ } (ب) { $\frac{\pi}{٣}$ } (جـ) { $\frac{\pi}{٤}$ } (د) { $\frac{\pi}{٦}$ }

(٤٥) إذا كان : أ + ب = ٣ (حـ + ء) = ١٨٠°

فإن : $\frac{\text{جا أ جا ب} + \text{جا } (٢٧٠° - \text{أ}) \text{ جا } (٩٠° - \text{ب})}{\text{جتا حـ جتا ء} - \text{جتا } (٢٧٠° + \text{حـ}) \text{ جا } (١٨٠° - \text{ء})}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) −١ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٤٦) فى Δ أ ب جـ : قتا أ (جا ب جتا جـ + جتا ب جا جـ) يساوى ....

(أ) $\frac{جـ}{أ}$ (ب) $\frac{أ}{جـ}$ (جـ) ١ (د) طا أ

(٤٧) $\frac{\text{جا}(أ - ب)}{\text{جا أ جا ب}} + \frac{\text{جا}(ب - جـ)}{\text{جا ب جا جـ}} + \frac{\text{جا}(جـ - أ)}{\text{جا جـ جا أ}} =$ ....

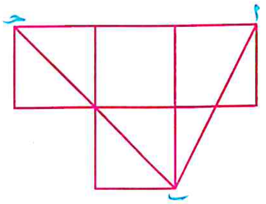
(أ) صفر (ب) ١

(جـ) جا أ + جا ب + جا جـ (د) جا أ جا ب جا جـ

(٤٨) فى الشكل المقابل :

أربعة مربعات متطابقة

طا (∠ أ ب جـ) = ...



(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$

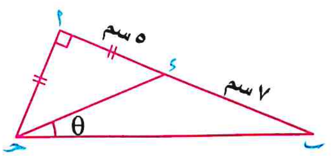
(جـ) ٢ (د) ٣

(٤٩) فى الشكل المقابل :

إذا كان : أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى أ

، ب ء = ٧ سم ، أ ء = أ جـ = ٥ سم

فإن : طا θ = ...



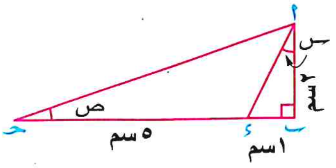
(أ) $\frac{٧}{١٧}$ (ب) $\frac{٥}{١٣}$ (جـ) $\frac{٥}{١٢}$ (د) $\frac{١٢}{٣٥}$

(٥٠) فى الشكل المقابل :

إذا كان : أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب

حيث أ ب = ٢ سم ، ب ء = ١ سم ، ء جـ = ٥ سم

فإن : س + ص = ...

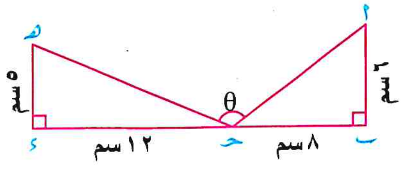


(أ) ١٥° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ٦٠°

(٥١) فى الشكل المقابل :

إذا كانت : جـ ∈ $\overline{\text{ب ء}}$

فإن : جا θ = ...



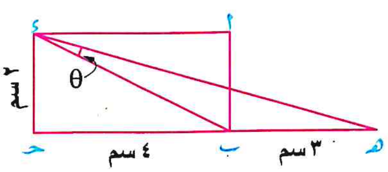
(أ) $\frac{٥٦}{٦٥}$ (ب) $\frac{١٦}{٦٥}$ (جـ) $\frac{٦٤}{٦٥}$ (د) $\frac{٢}{٧}$

(٥٢) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء مستطيل ، هـ ∈ $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$

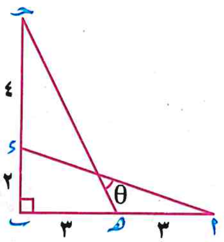
بحيث ب هـ = ٣ سم

فإن : طا θ = ...



(أ) $\frac{٣}{١٦}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٧}$ (د) $\frac{٣}{١٤}$

(٥٣) فى الشكل المقابل :

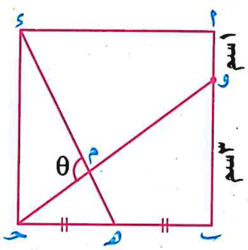


$\theta =$ ....°

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥

(جـ) ٦٠ (د) ٧٥

(٥٤) فى الشكل المقابل :



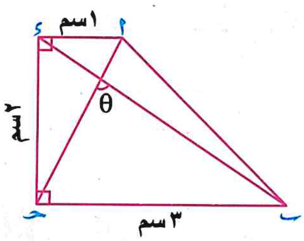
أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٤ سم

، طا $\theta =$ ....

(أ) $\frac{-11}{2}$ (ب) ٣

(جـ) $\frac{-3}{8}$ (د) $\frac{23}{3}$

(٥٥) فى الشكل المقابل :



طتا $\theta =$ ....

(أ) ٨ (ب) ٤

(جـ) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{1}{8}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتى :

(١) حتا ١٠٥° «$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$»

(٢) حا ٧٥° «$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$»

(٣) حتا ٣٤٥° «$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$»

(٤) طا (−٧٥°) «$-2-\sqrt{3}$»

(٥) حا $\frac{11\pi}{12}$ «$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$»

(٦) طا $\frac{7\pi}{12}$ «$-2-\sqrt{3}$»

٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتى فى أبسط صورة :

(١) حتا ١٠٥° حتا ١٥° + حا ١٠٥° حا ١٥° «صفر»

(٢) حا ٧٥° حتا ١٥° + حتا ٧٥° حا ١٥° «١»

(٣) حا $\frac{7\pi}{12}$ حتا $\frac{5\pi}{12}$ − حتا $\frac{7\pi}{12}$ حا $\frac{5\pi}{12}$ «$\frac{1}{2}$»

(٤) حتا $\frac{5\pi}{12}$ حتا $\frac{\pi}{12}$ − حا $\frac{5\pi}{12}$ حا $\frac{\pi}{12}$ «صفر»

(٥) حتا ٥٨َ ١٣° حتا ٢َ ٣١° − حا ٥٨َ ١٣° حا ٢َ ٣١° «$\frac{1}{\sqrt{2}}$»

(٦) $\frac{\text{طا } 30° + \text{طا } 15°}{1 - \text{طا } 30° \text{ طا } 15°}$ «١»

(٧) $\frac{\text{طا } \frac{2\pi}{3} + \text{طا } \frac{\pi}{12}}{1 - \text{طا } \frac{2\pi}{3} \text{ طا } \frac{\pi}{12}}$ «−١»

(٨) $\frac{\text{طا } 15° - \text{طا } 150°}{1 + \text{طا } 15° \text{ طا } 150°}$ «١»

(٩) حا ١١٠° حا ١٣٠° − حتا ١١٠° حتا ١٣٠° «$\frac{١}{٢}$»

(١٠) حا ٣٩° حتا ٩° − حا ٥١° حتا ٨١° «$\frac{١}{٢}$»

(١١) $\frac{\text{حا ٢٠° حتا ٢٥° + حتا ٢٠° حا ٢٥°}}{\text{حتا ١٠° حتا ٣٥° − حتا ٨٠° حتا ٥٥°}}$ «١»

(١٢) $\frac{\text{طا ٢٥° + طا ٧٠°}}{\text{١ − طا ٦٥° طا ٢٠°}}$ «١»

٣ **اختصر كلًا مما يأتى :**

(١) حتا ٣ س حتا ٢ س − حا ٣ س حا ٢ س «حتا ٥ س»

(٢) حا (س + ص) حتا ص − حتا (س + ص) حا ص «حا س»

(٣) حا (٢٥° + س) حتا (٢٠° − س) + حتا (٢٥° + س) حا (٢٠° − س) «$\frac{١}{\sqrt{٢}}$»

(٤) حتا (أ − ب) − حتا (أ + ب) «٢ حا أ حا ب»

(٥) $\frac{\text{طا (٤٠° − س) + طا (٥° + س)}}{\text{١ − طا (٤٠° − س) طا (٥° + س)}}$ «١»

٤ إذا كان : أ ، ب زاويتين حادتين حيث : حتا أ = $\frac{٣}{٥}$ ، طا ب = $\frac{٨}{١٥}$

أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من :

(١) حا (أ + ب) (٢) طا (أ − ب) (٣) قا (أ − ب) (٤) طتا (أ + ب)

«$\frac{٨٤}{٨٥}$ ، $\frac{٣٦}{٧٧}$ ، $\frac{٨٥}{٧٧}$ ، $\frac{١٣}{٨٤}$»

٥ إذا كان : ٥ حتا س + ٣ = صفر حيث س ∈]٠ ، π[، حتا ص = $\frac{١٢}{١٣}$ حيث ص ∈]π ، ٢ π[

فأوجد قيمة :

(١) حا (س − ص) (٢) حتا (س − ص) (٣) طا (س + ص)

«$\frac{٣٣}{٦٥}$ ، $\frac{-٥٦}{٦٥}$ ، $\frac{-٦٣}{١٦}$»

٦ إذا كان : حا أ = $\frac{٣}{٥}$ حيث : ٠° < أ < ٩٠° ، طا ب = −٧ حيث ٩٠° < ب < ١٨٠°

أثبت أن : أ + ب = ١٣٥°

٧ إذا علمت أن : حا أ = $\frac{-٨}{١٧}$ حيث ١٨٠° < أ < ٢٧٠° ، حتا ب = $\frac{-٥}{١٣}$ حيث ٩٠° < ب < ١٨٠°

أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من :

(١) حتا (أ − ب) (٢) حا (أ + ب) (٣) طا (أ − ب)

«$\frac{-٢١}{٢٢١}$ ، $\frac{-١٤٠}{٢٢١}$ ، $\frac{-٢٢٠}{٢١}$»

٨ إذا كان : قا أ = $\frac{١٣}{٥}$ حيث ٠ < أ < $\frac{\pi}{٢}$ ، طا ب = $\frac{-٣}{٤}$ حيث ب ∈]$\frac{\pi}{٢}$ ، π[

أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة :

(١) حا (أ − ب) (٢) حتا (أ + ب) (٣) طتا (أ − ب)

«$\frac{-٦٣}{٦٥}$ ، $\frac{-٥٦}{٦٥}$ ، $\frac{-١٦}{٦٣}$»

٩ **تفكير إبداعى :** إذا كان : طا أ = $\frac{٢}{٣}$ حيث π < أ < $\frac{٣ \pi}{٢}$ ، طا ب = $\frac{١}{٥}$ حيث ٠ < ب < $\frac{\pi}{٢}$

أوجد قيمة كل من : طا (أ + ب) ، حتا (أ + ب) ومن ذلك أثبت أن : أ + ب = $\frac{٥ \pi}{٤}$ «١ ، $\frac{-\sqrt{٢}}{٢}$»

١٠ أ ب حـ مثلث فيه : طا أ = $\frac{١}{٧}$ ، طا ب = $\frac{٣}{٤}$ **أوجد بدون استخدام حاسبة الجيب : ق (∠ حـ)** «١٣٥°»

١١ إذا كان : س + ص + ع = $\frac{\pi}{٢}$ **أثبت أن :** طا س طا ص + طا ص طا ع + طا ع طا س = ١

١٢ إذا كان : طا (أ + ب) = ٣٣ ، طا أ = ٣ **أثبت أن :** طا ب = ٠,٣

١٣ فى Δ أ ب حـ إذا كان : طا أ = $\frac{ن}{ن + ١}$ ، طا ب = $\frac{١}{٢ن + ١}$ حيث ن ∈ ص+ **أثبت أن :** طا (أ + ب) = ١

١٤ إذا علمت أن : $\frac{\text{جتا}(أ + ب)}{\text{جتا}(أ - ب)}$ = $\frac{١}{٣}$ **فأثبت أن :** ٢ جا أ جا ب = جتا أ جتا ب **ثم أثبت أن :** ٢ طا أ = ظتا ب

وإذا علمت أن : طا أ = $\frac{٢}{٥}$ **فأوجد :** طا ب **ومن ثم أوجد :** طا (أ − ب) «$\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{-١٧}{٣٠}$»

١٥ **أثبت أن :**

(١) طا ٧٥° = ١ + طا ٣٠° + طا ٣٠° طا ٧٥°

(٢) $\sqrt{٢}$ جتا ($\frac{\pi}{٤}$ − س) = جتا س + جا س

(٣) جتا (س − $\frac{\pi}{٦}$) جتا س + جتا ($\frac{٢\pi}{٣}$ − س) جتا (س − $\frac{\pi}{٢}$) = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٤) جتا (١٢٠° − أ) = $\frac{١}{٢}$ ($\sqrt{٣}$ جا أ − جتا أ)

(٥) طا (٤٥° − أ) = $\frac{\text{جتا أ} - \text{جا أ}}{\text{جتا أ} + \text{جا أ}}$

(٦) $\frac{\text{جا}(أ + ب) + \text{جا}(أ - ب)}{\text{جتا}(أ + ب) + \text{جتا}(أ - ب)}$ = طا أ

(٧) $\frac{\text{طا أ} + \text{طا ب}}{\text{طا}(أ + ب)}$ + $\frac{\text{طا أ} - \text{طا ب}}{\text{طا}(أ - ب)}$ = ٢

(٨) طا (أ + ب) = $\frac{\text{ظتا أ} + \text{ظتا ب}}{\text{ظتا أ ظتا ب} - ١}$

(٩) $\frac{\text{جا}(أ + ب)}{\text{جا}(أ - ب)}$ = $\frac{\text{طا أ} + \text{طا ب}}{\text{طا أ} - \text{طا ب}}$

(١٠) طا (أ + ب) طا (أ − ب) = $\frac{\text{طا}^٢ أ - \text{طا}^٢ ب}{١ - \text{طا}^٢ أ \text{ طا}^٢ ب}$

(١١) جا (أ + ب) جا (أ − ب) = جا² أ − جا² ب

١٦ **بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن :**

(١) جا ٣٥° + جتا ٦٥° = جتا ٥°

(٢) جتا ٥٢° + جتا ٦٨° = جا ٨٢°

(٣) جا ٦٧° + جتا ٣٧° = $\sqrt{٣}$ جتا ٧°

(٤) طا ٤٠° = $\frac{١ - \text{طا ٥°}}{١ + \text{طا ٥°}}$

١٧ إذا كانت س ∈ [٠ ، ٢π[**فأوجد قيمة س فى كل مما يأتى :**

(١) جا س جتا ١٥° + جتا س جا ١٥° = $\frac{١}{٢}$ «١٥° أ، ١٣٥°»

(٢) جا س جتا ٢٠° − جتا س جا ٢٠° = $\frac{١}{٢}$ «٥٠° أ، ١٧٠°»

(٣) جتا ٢ س جتا س + جا ٢ س جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ «٣٠° أ، ٣٣٠°»

(٤) $\frac{\text{طا س} - \text{طا ٢٥°}}{١ + \text{طا س طا ٢٥°}}$ = ١ «٧٠° أ، ٢٥٠°»

(٥) طا س + طا ٢٠° + طا س طا ٢٠° = ١ «٢٥° أ، ٢٠٥°»

(٦) جا (٦٠° + س) = ٢ جا س «٣٠° أ، ٢١٠°»

(٧) جا (س + ٣٠°) = ٢ جتا س «٦٠° أ، ٢٤٠°»

(٨) جا (س + $\frac{\pi}{٤}$) + جا (س − $\frac{\pi}{٤}$) = −١ «٢٢٥° أ، ٣١٥°»

● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

١٨ إذا كانت : $٠ < \text{هـ} < \frac{\pi}{٢}$ أوجد مجموعة الحل لكل مما يأتى :

(١) حا ١٣٥° حتا هـ − حتا ١٣٥° حا هـ = ١ «{٤٥°}»

(٢) $\frac{\text{ظا ٤ هـ} - \text{ظا ٣ هـ}}{١ + \text{ظا ٤ هـ ظا ٣ هـ}} = \sqrt{٣}$ «{٦٠°}»

(٣) $\sqrt{٣}$ حتا هـ − حا هـ = ١ «{٣٠°}»

(٤) حا (٤٥° + ٢ هـ) حا (٦٠° + هـ) + حا (٤٥° − ٢ هـ) حا (٣٠° − هـ) = ١ «{١٥°}»

---

١٩ إذا كان : أ ب حـ مثلثًا أثبت أن :

(١) $\text{حا}\left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{٢}\right) \text{حتا} \frac{\text{حـ}}{٢} + \text{حتا}\left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{٢}\right) \text{حا} \frac{\text{حـ}}{٢} = ١$

(٢) $\text{حتا}\left(\frac{\text{أ}+\text{ب}-\text{حـ}}{٢}\right) \text{حتا حـ} + \text{حا}\left(\frac{\text{حـ}-\text{أ}-\text{ب}}{٢}\right) \text{حا حـ} = ٠$

(٣) ظا أ + ظا ب + ظا حـ = ظا أ ظا ب ظا حـ

(٤) $\text{ظا} \frac{٣\text{أ}}{٢} \text{ظا} \frac{٣\text{ب}}{٢} + \text{ظا} \frac{٣\text{ب}}{٢} \text{ظا} \frac{٣\text{حـ}}{٢} + \text{ظا} \frac{٣\text{حـ}}{٢} \text{ظا} \frac{٣\text{أ}}{٢} = ١$

---

٢٠ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٣ سم ، $\overline{\text{حـ ء}}$ متوسط

أوجد : حتا (∠ أ حـ ء) «$\frac{١٧\sqrt{١٣}}{٦٥}$»

---

٢١ إذا كانت شدة التيار الكهربائى ت تعطى بالعلاقة ت = $\frac{٣}{٢}$ حتا ٢٨٥° ن

(١) أعد كتابة العلاقة السابقة باستخدام فرق قياسى زاويتين.

(٢) أوجد شدة التيار الكهربائى بعد ثانية واحدة (دون استخدام الحاسبة)

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : د (س) = ظا س فإن : $\text{د}\left(\text{س} + \frac{\pi}{٤}\right) \times \text{د}\left(\text{س} - \frac{\pi}{٤}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٢ ظا س (د) ظتا س

(٢) إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : ظا أ = ٣ + س ، ظا ب = ٣ − س ، ظا حـ = ٣

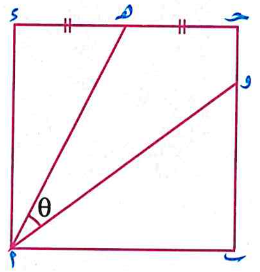
فإن : س = ...

(أ) ± ١ (ب) ± $\sqrt{٦}$ (جـ) ± ٦ (د) ± $\sqrt{١٠}$

(٣) إذا كان : حا س − حتا ص = $\frac{١}{٦}$ ، حتا س + حا ص = $\frac{٥}{٦}$ فإن : حا (س − ص) = ...

(أ) $\frac{١٩}{٢٤}$ (ب) $\frac{١٧}{٢٣}$ (جـ) $\frac{٢٣}{٣٦}$ (د) $\frac{٢٥}{٤٨}$

④ في الشكل المقابل :



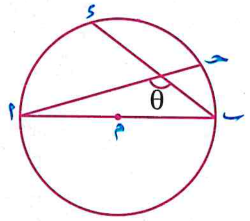
أب حـ ء مربع فيه هـ منتصف $\overline{حـ ء}$

، ب حـ = ٤ حـ و فإن : جا θ = ...

(أ) $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ (ب) $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

(جـ) $\frac{٣}{\sqrt{٥}}$ (د) $\frac{٤}{\sqrt{٥}}$

⑤ في الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ قطر في دائرة م طوله ٢٥ سم ، $\overline{أحـ}$ وتر طوله ٢٤ سم

، $\overline{ب ء}$ وتر طوله ٢٠ سم فإن : ظا θ = ...

(أ) $\frac{-٤}{٣}$ (ب) $\frac{-٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

⑥ أب حـ مثلث قائم الزاوية في أ فإن : $\frac{\text{ب جتا ب + حـ جتا حـ}}{\text{جا (ب − حـ)}}$ = ...

(أ) أ + ب (ب) أ + حـ (جـ) أ (د) حـ

⑦ إذا كانت α ، β قياسيا زاويتين حادتين وإذا كان : جتا (α + β) = $\frac{١٢}{١٣}$ فإن : جا (α − β) = $\frac{٣}{٥}$

فإن : جا ٢ α = ...

(أ) $\frac{١٦}{١٥}$ (ب) صفر (جـ) $\frac{٥٦}{٦٥}$ (د) $\frac{٦٤}{٦٥}$

٢ إذا كان : أ ، ب ، حـ هي قياسات ثلاث زوايا حادة ، جا أ = $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ ، جتا ب = $\frac{٤}{٥}$ ، ظا حـ = $\frac{١}{٢}$

أثبت أن : أ + ب + حـ = ٩٠° [بدون استخدام الحاسبة]

٣ إذا كان : ظا أ ، ظا ب هما جذرا المعادلة : ٢ س^{٢} + ٣ س − ١ = ٠

فبدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة : ظا (أ + ب) ومنها أوجد : أ + ب «−١ ، ١٣٥° أ ٣١٥°»

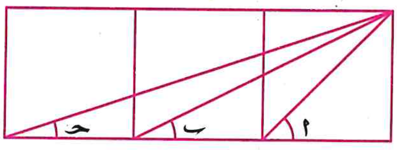
٤ إذا كانت : س ∈ [٠ ، ٢ π[**أوجد قيمة س التي تجعل قيمة المقدار :** جا س جتا ٥٥° + جتا س جا ٥٥°

(١) أكبر ما يمكن. (٢) أصغر ما يمكن. «٣٥° ، ٢١٥°»

٥ في المثلث أب حـ الحاد الزوايا إذا كان : ظا أ = ٠,٧٥ ، ظا ب = ٢,٤ **فأثبت أن :** أَ : بَ : حَ = ١٣ : ٢٠ : ٢١

٦ إذا كان : أ قياس زاوية حادة وكان جا أ = $\frac{\sqrt{٣} + ١}{٢\sqrt{٢}}$ **فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة :** ق (∠ أ) «٧٥°»

٧ **في الشكل المقابل :**



ثلاث مربعات أثبت أن :

ق (∠ أ) = ق (∠ ب) + ق (∠ حـ)

٨ إذا كان : جا (أ + ب) = $\frac{٣}{٥}$ ، جا (أ − ب) = $\frac{١}{١٠}$ **فأثبت أن :** ٥ ظا أ = ٧ ظا ب

الدرس 3

الدوال المثلثية لضعف قياس الزاوية

إذا كان أ هو قياس زاوية معلومة فإنه يمكن إيجاد كل من : حا ٢ أ ، حتا ٢ أ ، طا ٢ أ كما يأتى :

أولاً : حا ٢ أ = ٢ حا أ حتا أ

البرهـان

∵ حا (أ + ب) = حا أ حتا ب + حتا أ حا ب وبوضع ب = أ

∴ حا (أ + أ) = حا أ حتا أ + حتا أ حا أ ∴ حا ٢ أ = ٢ حا أ حتا أ

ثانيًا : حتا ٢ أ = حتا^{٢} أ − حا^{٢} أ (١)

= ٢ حتا^{٢} أ − ١ (٢)

= ١ − ٢ حا^{٢} أ (٣)

البرهـان

∵ حتا (أ + ب) = حتا أ حتا ب − حا أ حا ب وبوضع ب = أ

∴ حتا (أ + أ) = حتا أ حتا أ − حا أ حا أ ∴ حتا ٢ أ = حتا^{٢} أ − حا^{٢} أ (١)

، ∵ حا^{٢} أ = ١ − حتا^{٢} أ (لأن حا^{٢} أ + حتا^{٢} أ = ١)

، بالتعويض فى (١) ينتج أن : حتا ٢ أ = حتا^{٢} أ − (١ − حتا^{٢} أ)

= حتا^{٢} أ − ١ + حتا^{٢} أ = ٢ حتا^{٢} أ − ١ (٢)

، ∵ حتا^{٢} أ = ١ − حا^{٢} أ وبالتعويض فى (١) :

∴ حتا ٢ أ = ١ − حا^{٢} أ − حا^{٢} أ = ١ − ٢ حا^{٢} أ (٣)

ثالثًا : $طا\ ٢\ أ = \frac{٢\ طا\ أ}{١ - طا^٢\ أ}$ حيث طا أ معرفة ، $طا^٢\ أ \neq ١$

البرهــان

$\because$ $طا\ (أ + ب) = \frac{طا\ أ + طا\ ب}{١ - طا\ أ\ طا\ ب}$ وبوضع ب = أ

$\therefore$ $طا\ (أ + أ) = \frac{طا\ أ + طا\ أ}{١ - طا\ أ\ طا\ أ}$ $\therefore$ $طا\ ٢\ أ = \frac{٢\ طا\ أ}{١ - طا^٢\ أ}$

ملاحظــات

من القوانين السابقة يمكن استنتاج أن :

* $حا\ أ = ٢\ حا\ \frac{أ}{٢}\ حتا\ \frac{أ}{٢}$

* $حتا\ أ = حتا^٢\ \frac{أ}{٢} - حا^٢\ \frac{أ}{٢}$

$= ٢\ حتا^٢\ \frac{أ}{٢} - ١$

$= ١ - ٢\ حا^٢\ \frac{أ}{٢}$

* $طا\ أ = \frac{٢\ طا\ \frac{أ}{٢}}{١ - طا^٢\ \frac{أ}{٢}}$

* $حا\ ٤\ أ = ٢\ حا\ ٢\ أ\ حتا\ ٢\ أ$

* $حتا\ ٤\ أ = حتا^٢\ ٢\ أ - حا^٢\ ٢\ أ$

$= ٢\ حتا^٢\ ٢\ أ - ١$

$= ١ - ٢\ حا^٢\ ٢\ أ$

* $طا\ ٤\ أ = \frac{٢\ طا\ ٢\ أ}{١ - طا^٢\ ٢\ أ}$

الدوال المثلثية لنصف قياس الزاوية

* إذا كان أ هو قياس زاوية معلومة فإنه يمكن إيجاد كل من $حا\ \frac{أ}{٢}$ ، $حتا\ \frac{أ}{٢}$ ، $طا\ \frac{أ}{٢}$ بدلالة حتا أ كما يلى :

١ $حا\ \frac{أ}{٢} = \pm \sqrt{\frac{١ - حتا\ أ}{٢}}$ **٢** $حتا\ \frac{أ}{٢} = \pm \sqrt{\frac{١ + حتا\ أ}{٢}}$ **٣** $طا\ \frac{أ}{٢} = \pm \sqrt{\frac{١ - حتا\ أ}{١ + حتا\ أ}}$ حيث $حتا\ أ \neq -١$

ويتم تحديد الإشارة وفقًا للربع الذى تقع فيه الزاوية $\frac{أ}{٢}$

البرهــان

$\because$ $حتا\ أ = ١ - ٢\ حا^٢\ \frac{أ}{٢}$ $\therefore$ $٢\ حا^٢\ \frac{أ}{٢} = ١ - حتا\ أ$

$\therefore$ $حا^٢\ \frac{أ}{٢} = \frac{١ - حتا\ أ}{٢}$ $\therefore$ $حا\ \frac{أ}{٢} = \pm \sqrt{\frac{١ - حتا\ أ}{٢}}$ (١)

وبالمثل : $\because$ $حتا\ أ = ٢\ حتا^٢\ \frac{أ}{٢} - ١$ $\therefore$ $٢\ حتا^٢\ \frac{أ}{٢} = ١ + حتا\ أ$

$\therefore$ $حتا^٢\ \frac{أ}{٢} = \frac{١ + حتا\ أ}{٢}$ $\therefore$ $حتا\ \frac{أ}{٢} = \pm \sqrt{\frac{١ + حتا\ أ}{٢}}$ (٢)

وبقسمة (١) على (٢) : $\therefore$ $طا\ \frac{أ}{٢} = \pm \sqrt{\frac{١ - حتا\ أ}{١ + حتا\ أ}}$ حيث $حتا\ أ \neq -١$

مثال ١

بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة كل مما يأتي :

١) ٢ جا ١٥° جتا ١٥°
٢) جتا² ٢٢° ٣٠َ − جا² ٢٢° ٣٠َ
٣) ٢ جتا² ٧٥° − ١
٤) ١ − ٢ جا² ٧° ٣٠َ
٥) $\frac{\text{٦ طا ١٥°}}{\text{١ − طا² ١٥°}}$

الحـــل

١) ٢ جا ١٥° جتا ١٥° = جا (٢ × ١٥°) = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

٢) جتا² ٢٢° ٣٠َ − جا² ٢٢° ٣٠َ = جتا (٢ × ٢٢° ٣٠َ) = جتا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

٣) ٢ جتا² ٧٥° − ١ = جتا (٢ × ٧٥°) = جتا ١٥٠° = جتا (١٨٠° − ٣٠°) = − جتا ٣٠° = − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٤) ١ − ٢ جا² ٧° ٣٠َ = جتا (٢ × ٧° ٣٠َ) = جتا ١٥° = جتا (٤٥° − ٣٠°)

= جتا ٤٥° جتا ٣٠° + جا ٤٥° جا ٣٠°

= $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{\sqrt{٣}+١}{٢\sqrt{٢}}$ × $\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$ = $\frac{\sqrt{٦}+\sqrt{٢}}{٤}$

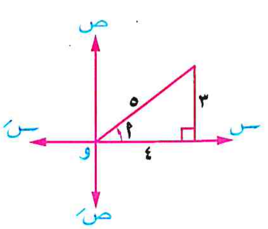
٥) $\frac{\text{٦ طا ١٥°}}{\text{١ − طا² ١٥°}}$ = ٣ × $\frac{\text{٢ طا ١٥°}}{\text{١ − طا² ١٥°}}$ = ٣ طا (٢ × ١٥°) = ٣ طا ٣٠° = ٣ × $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = $\sqrt{٣}$

مثال ٢

إذا كانت : جا أ = $\frac{٣}{٥}$ حيث أ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[فأوجد قيمة كل من :

١) جا ٢ أ
٢) جتا ٢ أ
٣) طا ٢ أ

الحـــل



١) جا ٢ أ = ٢ جا أ جتا أ = ٢ × $\frac{٣}{٥}$ × $\frac{٤}{٥}$ = $\frac{٢٤}{٢٥}$

٢) جتا ٢ أ = ١ − ٢ جا² أ = ١ − ٢ $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢}$ = ١ − $\frac{١٨}{٢٥}$ = $\frac{٧}{٢٥}$

٣) طا ٢ أ = $\frac{\text{٢ طا أ}}{\text{١ − طا² أ}}$ = $\frac{٢ \times \frac{٣}{٤}}{١ - \frac{٩}{١٦}}$ = $\frac{٣}{٢}$ × $\frac{١٦}{٧}$ = $\frac{٢٤}{٧}$

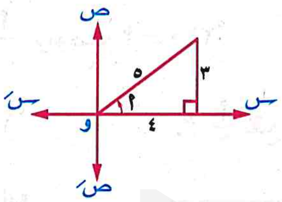
حل آخر لإيجاد طا ٢ أ : طا ٢ أ = $\frac{\text{جا ٢ أ}}{\text{جتا ٢ أ}}$ = $\frac{\frac{٢٤}{٢٥}}{\frac{٧}{٢٥}}$ = $\frac{٢٤}{٧}$

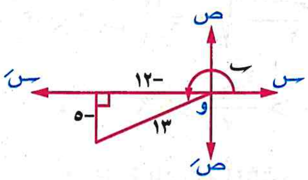
مثال ٣

إذا كانت : طا أ = $\frac{٣}{٤}$ حيث أ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[، طا ب = $\frac{٥}{١٢}$ حيث ب ∈]π ، $\frac{٣\pi}{٢}$[

فأوجد قيمة : جا (ب − ٢ أ)

الحل





جا (ب − ٢ أ) = جا ب جتا ٢ أ − جتا ب جا ٢ أ

، ∵ جا ب = $-\frac{٥}{١٣}$

، جتا ٢ أ = جتا^{٢} أ − جا^{٢} أ = $\left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢} - \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢} = \frac{٧}{٢٥}$

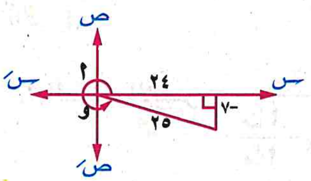
، جتا ب = $-\frac{١٢}{١٣}$ ، جا ٢ أ = ٢ جا أ جتا أ = ٢ × $\frac{٣}{٥}$ × $\frac{٤}{٥}$ = $\frac{٢٤}{٢٥}$

∴ جا (ب − ٢ أ) = $-\frac{٥}{١٣} \times \frac{٧}{٢٥} - \left(-\frac{١٢}{١٣}\right) \times \frac{٢٤}{٢٥} = \frac{-٣٥ + ٢٨٨}{١٣ \times ٢٥} = \frac{٢٥٣}{٣٢٥}$

مثال ٤

إذا كانت : جا أ = − ٠,٢٨ ، حيث أ ∈] $\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٢ π [**فأوجد قيمة :** ظا $\frac{أ}{٢}$

الحل



∵ جتا أ = $\frac{٢٤}{٢٥}$

∴ ظا $\frac{أ}{٢}$ = ± $\sqrt{\frac{١ - \text{جتا أ}}{١ + \text{جتا أ}}}$ = ± $\sqrt{\frac{١ - \frac{٢٤}{٢٥}}{١ + \frac{٢٤}{٢٥}}}$ = ± $\sqrt{\frac{١}{٤٩}}$ = ± $\frac{١}{٧}$

، ∵ $\frac{٣\pi}{٢}$ < أ < ٢ π ∴ $\frac{٣\pi}{٤}$ < $\frac{أ}{٢}$ < π

∴ $\frac{أ}{٢}$ تقع فى الربع الثانى. ∴ ظا $\frac{أ}{٢}$ = $\frac{-١}{٧}$

مثال ٥

بدون استخدام الآلة الحاسبة وباستخدام الدوال المثلثية لنصف قياس الزاوية أوجد قيمة كل مما يأتى :

[١] ظا ٣٠َ ٢٢° [٢] جتا ١١٢ $\frac{١}{٢}$°

الحل

[١] ∵ ظا $\frac{أ}{٢}$ = ± $\sqrt{\frac{١ - \text{جتا أ}}{١ + \text{جتا أ}}}$ وبوضع أ = ٤٥°

، ∵ ٠° < $\frac{٤٥°}{٢}$ < ٩٠° ∴ $\frac{أ}{٢}$ تقع فى الربع الأول.

∴ قيمة النسبة المثلثية موجبة. ∴ ظا $\frac{٤٥°}{٢}$ = $\sqrt{\frac{١ - \text{جتا } ٤٥°}{١ + \text{جتا } ٤٥°}}$

∴ ظا ٣٠َ ٢٢° = $\sqrt{\frac{١ - \frac{\sqrt{٢}}{٢}}{١ + \frac{\sqrt{٢}}{٢}}} = \sqrt{\frac{٢ - \sqrt{٢}}{٢ + \sqrt{٢}}} = \sqrt{\frac{(٢ - \sqrt{٢})(٢ - \sqrt{٢})}{(٢ + \sqrt{٢})(٢ - \sqrt{٢})}}$

$= \sqrt{\frac{(٢ - \sqrt{٢})^{٢}}{٤ - ٢}} = \frac{٢ - \sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \sqrt{٢} - ١$

(٢) ∵ $حتا \frac{أ}{٢} = \pm \sqrt{\frac{١ + حتا أ}{٢}}$ وبوضع أ = ٢٢٥°

، ∵ $٩٠° < \frac{٢٢٥°}{٢} < ١٨٠°$ ∴ $\frac{أ}{٢}$ تقع فى الربع الثانى.

∴ قيمة النسبة المثلثية سالبة.

∴ $حتا \frac{٢٢٥°}{٢} = -\sqrt{\frac{١ + حتا ٢٢٥°}{٢}} = -\sqrt{\frac{١ - \frac{\sqrt{٢}}{٢}}{٢}} = -\sqrt{\frac{٢ - \sqrt{٢}}{٤}} = -\frac{١}{٢}\sqrt{٢ - \sqrt{٢}}$

∴ $حتا ١١٢\frac{١}{٢}° = \frac{١}{٢}\sqrt{٢ - \sqrt{٢}}$

مثال ٦

أثبت أن : $طا ٢ أ = \frac{٢}{طتا أ - طا أ}$

الحل

∵ الطرف الأيسر = $\frac{٢}{\frac{حتا أ}{حا أ} - \frac{حا أ}{حتا أ}}$ وبضرب كل من البسط والمقام فى حا أ حتا أ

∴ الطرف الأيسر = $\frac{٢ حا أ حتا أ}{حتا^٢ أ - حا^٢ أ} = \frac{حا ٢ أ}{حتا ٢ أ}$ = طا ٢ أ = الطرف الأيمن.

حل آخر : الطرف الأيمن = $\frac{٢ طا أ}{١ - طا^٢ أ}$ وبضرب كل من البسط والمقام فى طتا أ

∴ الطرف الأيمن = $\frac{٢}{طتا أ - طا أ}$ = الطرف الأيسر.

مثال ٧

أثبت أن : $حا ٣ س = ٣ حا س - ٤ حا^٣ س$

الحل

$حا ٣ س = حا (٢ س + س) = حا ٢ س حتا س + حتا ٢ س حا س$

$= ٢ حا س حتا س حتا س + (١ - ٢ حا^٢ س) حا س$

$= ٢ حا س حتا^٢ س + حا س - ٢ حا^٣ س$

$= ٢ حا س (١ - حا^٢ س) + حا س - ٢ حا^٣ س$

$= ٢ حا س - ٢ حا^٣ س + حا س - ٢ حا^٣ س$

$= ٣ حا س - ٤ حا^٣ س$

مثال ٨

أثبت أن : $\dfrac{1 + \text{جتا}\, 2\text{س}}{\text{جا}\, 2\text{س}} = \text{ظتا}\,\text{س}$ ومنها استنتج : ظتا 15°

الحل

الطرف الأيمن $= \dfrac{1 + 2\,\text{جتا}^2\text{س} - 1}{2\,\text{جا}\,\text{س}\,\text{جتا}\,\text{س}} = \dfrac{2\,\text{جتا}^2\text{س}}{2\,\text{جا}\,\text{س}\,\text{جتا}\,\text{س}} = \dfrac{\text{جتا}\,\text{س}}{\text{جا}\,\text{س}} = \text{ظتا}\,\text{س} =$ الطرف الأيسر.

$\therefore \text{ظتا}\, 15^\circ = \dfrac{1 + \text{جتا}\, 30^\circ}{\text{جا}\, 30^\circ} = \dfrac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2 + \sqrt{3}$

مثال ٩

إذا كان : $\text{جا}\,\text{س} + \text{جتا}\,\text{س} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ فأوجد قيمة : جا ٢ س

الحل

$\because \text{جا}\,\text{س} + \text{جتا}\,\text{س} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ وبتربيع الطرفين.

$\therefore \text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} + 2\,\text{جا}\,\text{س}\,\text{جتا}\,\text{س} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad \therefore 1 + 2\,\text{جا}\,\text{س}\,\text{جتا}\,\text{س} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore 2\,\text{جا}\,\text{س}\,\text{جتا}\,\text{س} = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad \therefore \text{جا}\, 2\text{س} = -\dfrac{1}{2}$

مثال ١٠

أثبت أن : $\text{قا}\, 2\text{أ} + \text{ظا}\, 2\text{أ} = \dfrac{\text{جتا}\,\text{أ} + \text{جا}\,\text{أ}}{\text{جتا}\,\text{أ} - \text{جا}\,\text{أ}}$

الحل

الطرف الأيمن $= \dfrac{1}{\text{جتا}\, 2\text{أ}} + \dfrac{\text{جا}\, 2\text{أ}}{\text{جتا}\, 2\text{أ}} = \dfrac{1 + \text{جا}\, 2\text{أ}}{\text{جتا}\, 2\text{أ}} = \dfrac{1 + 2\,\text{جا}\,\text{أ}\,\text{جتا}\,\text{أ}}{\text{جتا}^2\text{أ} - \text{جا}^2\text{أ}}$ (ولكن $1 = \text{جا}^2\text{أ} + \text{جتا}^2\text{أ}$)

$\therefore$ الطرف الأيمن $= \dfrac{\text{جا}^2\text{أ} + \text{جتا}^2\text{أ} + 2\,\text{جا}\,\text{أ}\,\text{جتا}\,\text{أ}}{\text{جتا}^2\text{أ} - \text{جا}^2\text{أ}} = \dfrac{(\text{جا}\,\text{أ} + \text{جتا}\,\text{أ})^2}{(\text{جتا}\,\text{أ} - \text{جا}\,\text{أ})(\text{جتا}\,\text{أ} + \text{جا}\,\text{أ})}$

$= \dfrac{\text{جتا}\,\text{أ} + \text{جا}\,\text{أ}}{\text{جتا}\,\text{أ} - \text{جا}\,\text{أ}} =$ الطرف الأيسر.

مثال ١١

أثبت أن : $\dfrac{1 + \text{جا}\,\text{أ} - \text{جتا}\,\text{أ}}{1 + \text{جا}\,\text{أ} + \text{جتا}\,\text{أ}} = \text{ظا}\,\dfrac{\text{أ}}{2}$

الحل

الطرف الأيمن $= \dfrac{1 + 2\,\text{جا}\,\frac{\text{أ}}{2}\,\text{جتا}\,\frac{\text{أ}}{2} - \left(1 - 2\,\text{جا}^2\,\frac{\text{أ}}{2}\right)}{1 + 2\,\text{جا}\,\frac{\text{أ}}{2}\,\text{جتا}\,\frac{\text{أ}}{2} + \left(2\,\text{جتا}^2\,\frac{\text{أ}}{2} - 1\right)} = \dfrac{2\,\text{جا}\,\frac{\text{أ}}{2}\,\text{جتا}\,\frac{\text{أ}}{2} + 2\,\text{جا}^2\,\frac{\text{أ}}{2}}{2\,\text{جا}\,\frac{\text{أ}}{2}\,\text{جتا}\,\frac{\text{أ}}{2} + 2\,\text{جتا}^2\,\frac{\text{أ}}{2}}$

$= \dfrac{2\,\text{جا}\,\frac{\text{أ}}{2}\left(\text{جتا}\,\frac{\text{أ}}{2} + \text{جا}\,\frac{\text{أ}}{2}\right)}{2\,\text{جتا}\,\frac{\text{أ}}{2}\left(\text{جا}\,\frac{\text{أ}}{2} + \text{جتا}\,\frac{\text{أ}}{2}\right)} = \dfrac{2\,\text{جا}\,\frac{\text{أ}}{2}}{2\,\text{جتا}\,\frac{\text{أ}}{2}} = \text{ظا}\,\dfrac{\text{أ}}{2} =$ الطرف الأيسر.

مثال ⓬

أوجد قيم س التى تحقق كلًا من المعادلات الآتية حيث س $\in$] ٠ ، ٢ π [

١ حا ٢ س − حتا س = ٠	٢ حتا س + حتا ٢ س = ٠
٣ ظا^{٢} س + ٢ ظا س = ١	٤ حتا^{٢} س − حا^{٢} س = $\frac{١}{٢}$

الحل

١ $\because$ حا ٢ س − حتا س = ٠ $\therefore$ ٢ حا س حتا س − حتا س = ٠

$\therefore$ حتا س (٢ حا س − ١) = ٠

$\therefore$ حتا س = ٠ ومنها س = ٩٠° = $\frac{\pi}{٢}$ أ، س = ٢٧٠° = $\frac{٣\pi}{٢}$

أ، حا س = $\frac{١}{٢}$ (موجبة) $\therefore$ س = ٣٠° = $\frac{\pi}{٦}$ أ، س = ١٥٠° = $\frac{٥\pi}{٦}$

$\therefore$ قيم س التى تحقق المعادلة هى : $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٥\pi}{٦}$

٢ $\because$ حتا س + حتا ٢ س = ٠ $\therefore$ حتا س + (٢ حتا^{٢} س − ١) = ٠

$\therefore$ ٢ حتا^{٢} س + حتا س − ١ = ٠ $\therefore$ (٢ حتا س − ١) (حتا س + ١) = ٠

$\therefore$ حتا س = $\frac{١}{٢}$ (موجبة) $\therefore$ س = ٦٠° = $\frac{\pi}{٣}$ أ، س = ٣٠٠° = $\frac{٥\pi}{٣}$

أ، حتا س = −١ ومنها س = ١٨٠° = π $\therefore$ قيم س التى تحقق المعادلة هى : $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{٥\pi}{٣}$ ، π

٣ $\because$ ظا^{٢} س + ٢ ظا س = ١

$\therefore$ ٢ ظا س = ١ − ظا^{٢} س

$\therefore$ $\frac{٢ \text{ ظا س}}{١ - \text{ظا}^{٢} \text{ س}}$ = ١

$\therefore$ ظا ٢ س = ١ (موجبة)

$\therefore$ أصغر قياس موجب يحقق

المعادلة هو : ٢ س = ٤٥° = $\frac{\pi}{٤}$

$\therefore$ الحل العام للمعادلة هو :

٢ س = $\frac{\pi}{٤}$ + π ن حيث ن $\in$ ص

$\therefore$ س = $\frac{\pi}{٨}$ + $\frac{\pi}{٢}$ ن

عند ن = ٠ $\therefore$ س = $\frac{\pi}{٨}$

عند ن = ١ $\therefore$ س = $\frac{٥\pi}{٨}$

عند ن = ٢ $\therefore$ س = $\frac{٩\pi}{٨}$

عند ن = ٣ $\therefore$ س = $\frac{١٣\pi}{٨}$

$\therefore$ قيم س التى تحقق المعادلة هى : $\frac{\pi}{٨}$ ، $\frac{٥\pi}{٨}$ ، $\frac{٩\pi}{٨}$ ، $\frac{١٣\pi}{٨}$

تذكر أنه !

إذا كان β أصغر قياس موجب يحقق المعادلة ، ن $\in$ ص

فإن : الحل العام للمعادلة

١ حا θ = أ هو θ = β + ٢ π ن

، θ = (π − β) + ٢ π ن

٢ حتا θ = أ هو θ = ± β + ٢ π ن

٣ ظا θ = أ هو θ = β + π ن

٤ ∵ $جتا^٢$ س $-$ $جا^٢$ س $= \frac{١}{٢}$ ∴ جتا ٢ س $= \frac{١}{٢}$ (موجبة)

∴ أصغر قياس موجب يحقق المعادلة هو : ٢ س $=$ ٦٠° $= \frac{\pi}{٣}$

∴ الحل العام للمعادلة هو : ٢ س $= \pm \frac{\pi}{٣} + ٢ \pi$ ن حيث ن ∈ ص ∴ س $= \pm \frac{\pi}{٦} + \pi$ ن

عند ن $= ٠$ ∴ س $= \pm \frac{\pi}{٦}$

∴ س $= \frac{\pi}{٦}$ أ، س $= \frac{-\pi}{٦} + ٢\pi = \frac{١١\pi}{٦}$

عند ن $= ١$ ∴ س $= \pm \frac{\pi}{٦} + \pi$

∴ س $= \frac{\pi}{٦} + \pi = \frac{٧\pi}{٦}$ أ، س $= \frac{-\pi}{٦} + \pi = \frac{٥}{٦}\pi$

∴ قيم س التى تحقق المعادلة هى : $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٥\pi}{٦}$ ، $\frac{٧\pi}{٦}$ ، $\frac{١١\pi}{٦}$

مثال ١٣

فى Δ أ ب ح إذا كان : أ $=$ ٤ سم ، ب $=$ ٥ سم ، ح $=$ ٦ سم

فأثبت بدون استخدام حاسبة الجيب أن : ق (∠ ح) $=$ ٢ ق (∠ أ)

الحل

∵ جتا ح $= \frac{أ^٢ + ب^٢ - ح^٢}{٢ أ ب} = \frac{١٦ + ٢٥ - ٣٦}{٢ \times ٤ \times ٥} = \frac{١}{٨}$ (١)

، ∵ جتا أ $= \frac{ب^٢ + ح^٢ - أ^٢}{٢ ب ح} = \frac{٢٥ + ٣٦ - ١٦}{٢ \times ٥ \times ٦} = \frac{٣}{٤}$ ∴ جتا ٢ أ $= ٢$ $جتا^٢$ أ $- ١ = ٢ \left(\frac{٣}{٤}\right)^٢ - ١ = \frac{١}{٨}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ جتا ح $=$ جتا ٢ أ ∴ ق (∠ ح) $=$ ٢ ق (∠ أ)

تمارين 18

على الدوال المثلثية لضعف قياس الزاوية

من أسئلة الكتاب المدرسي ● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) حتا^{٢} س − حا^{٢} س = ...

(أ) ١ (ب) حا ٢ س (جـ) حتا ٢ س (د) ٢ حا س حتا س

(٢) حا ٢ أ = ...

(أ) ٢ حا أ (ب) ٢ حا أ حتا أ (جـ) ١ − ٢ حا^{٢} أ (د) حا^{٢} أ

(٣) ظا ٢ أ = ...

(أ) ٢ ظا أ (ب) ٢ ظا أ ظتا أ (جـ) $\frac{\text{٢ ظا أ}}{\text{١ − ظا}^{٢}\text{ أ}}$ (د) $\frac{\text{٢ ظا أ}}{\text{١ + ظا}^{٢}\text{ أ}}$

(٤) حا ٦ س حتا ٦ س = ...

(أ) حا ١٢ س (ب) $\frac{١}{٢}$ حا ١٢ س (جـ) صفر (د) حا ٣ س

(٥) إذا كان : $\frac{\text{ظا س}}{\text{١ − ظا}^{٢}\text{ س}}$ = $\frac{٥}{٢}$ فإن : ظا ٢ س = ...

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) ٥ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) ٢

(٦) (ظا ٢ أ) (ظتا أ) (١ − ظا^{٢} أ) = ...

(أ) ١ (ب) حا أ (جـ) ظا أ (د) ٢

(٧) ١ + حتا ٤ أ = ...

(أ) ٢ حتا^{٢} ٤ أ (ب) حتا^{٢} ٢ أ (جـ) حتا^{٢} ٤ أ (د) ٢ حتا^{٢} ٢ أ

(٨) ١ − ٢ حا^{٢} ٥٠° = ...

(أ) حا ١٠٠° (ب) حتا ٥٠° (جـ) حتا ١٠٠° (د) حا ٥٠°

(٩) إذا كان : ظا ٢ س = $\frac{٤}{٣}$ حيث س قياس زاوية حادة فإن : ظا س = ...

(أ) −٢ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) −$\frac{١}{٢}$

(١٠) إذا كان : حتا حـ = $\frac{١}{٣}$ فإن : حتا ٢ حـ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{-٢}{٣}$ (جـ) $\frac{-٧}{٩}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(١١) إذا كان : حا ٢ س = $\frac{٥}{١٣}$ فإن : ظا س + ظتا س = ...

(أ) $\frac{١٩}{٥}$ (ب) ٤ (جـ) $\frac{٢٤}{٥}$ (د) $\frac{٢٦}{٥}$

(١٢) حتا^{٢} حـ − حتا ٢ حـ = ...

(أ) حا حـ (ب) حتا حـ (جـ) حا^{٢} حـ (د) ظا حـ

(١٣) ٢ حتا^{٢} $\left(\frac{\pi}{٤} - \frac{\text{٣ س}}{٢}\right)$ − ١ = ...

(أ) حتا ٣ س (ب) حا ٣ س (جـ) حتا $\frac{٣}{٢}$ س (د) حا $\frac{٣}{٢}$ س

(١٤) ٢ حا (س + ٤٥°) حتا (س + ٤٥°) = ...

(أ) ٢ حا (س + ٤٥°) (ب) حتا (٩٠° + ٢ س)

(جـ) حا ٢ س (د) حتا ٢ س

(١٥) (١ + حتا ٢ س) طا س = ...

(أ) قا ٢ س (ب) طتا ٢ س (جـ) حا ٢ س (د) حتا ٢ س

(١٦) $\left(\text{حا}\frac{\text{س}}{٢} - \text{حتا}\frac{\text{س}}{٢}\right)^{٢}$ = ...

(أ) ١ − حتا س (ب) ١ − حتا $\frac{\text{س}}{٢}$ (جـ) ١ − حا س (د) ١ − حا $\frac{\text{س}}{٢}$

(١٧) إذا كان : حا س + حتا س = ١ فإن : حا ٢ س = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) صفر

(١٨) قتا ٢ س = ...

(أ) قا س قتا س (ب) $\frac{١}{٢}$ قا س قتا س (جـ) حا س حتا س (د) ٢ حا س حتا س

(١٩) إذا كان : (حا س − حتا س) (حا س + حتا س) = $\frac{٣}{٥}$ فإن : حتا ٢ س = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{٣}{٥}$ (جـ) − $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٩}{٢٥}$

(٢٠) إذا كان : أ + ب = ١٨٠° حيث ب قياس زاوية حادة موجبة فإن : حا (أ − ب) = ...

(أ) حا أ حتا ب (ب) طا ب طتا أ (جـ) ٢ حا ب حتا ب (د) صفر

(٢١) قتا^{٢} س (١ − حتا ٢ س) = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) −٢

(٢٢) $\frac{\text{طا }\theta + \text{طتا }\theta}{\text{قتا ٢}\theta}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) طتا ٢ θ

(٢٣) $\frac{\text{حا ٤}\theta}{\text{١ + حتا ٤}\theta}$ = ...

(أ) حا ٢ θ (ب) حتا ٢ θ (جـ) طا ٢ θ (د) طتا ٢ θ

(٢٤) إذا كان : حتا^{٤} س − حا^{٤} س = حتا أ س فإن : أ يمكن أن تساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٤

(٢٥) $\frac{١}{٢}$ (طا θ + طتا θ) = ...

(أ) حتا ٢ θ (ب) حا ٢ θ (جـ) قتا ٢ θ (د) قا ٢ θ

(٢٦) إذا كان : طا س − طتا س = ٣ فإن : طا ٢ س = ...

(أ) ٦ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{-٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

(٢٧) إذا كان : $\frac{\text{حا س}}{\text{١ + حتا س}}$ = أ فإن : طتا $\frac{\text{س}}{٢}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ أ (ب) أ (جـ) $\frac{١}{\text{أ}}$ (د) $\frac{٢}{٣}$ أ

(٢٨) إذا كان : س قياس زاوية حادة ، حاس = $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ فإن : حا^{٢} $\left(\frac{\pi}{٤} - \text{س}\right)$ − حتا^{٢} $\left(\frac{\pi}{٤} - \text{س}\right)$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{-٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

(٢٩) إذا كان : حتاب = $\frac{-٤}{٥}$ حيث π < ب < $\frac{٣\pi}{٢}$ فإن : $\frac{\text{حا ٢ ب}}{\text{٢ حتا ٢ ب}}$ = ...

(أ) $\frac{٧}{١٢}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٢٤}{٧}$ (د) $\frac{١٢}{٧}$

(٣٠) إذا كانت س قياس زاوية حادة ، ظاس = $\frac{١}{٣}$ فإن : $\frac{\text{١ − حتا ٢ س}}{\text{١ + حتا ٢ س}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٩}$ (د) $\frac{٢}{٩}$

(٣١) $\frac{\text{١ − ظا}^{٢}\text{س}}{\text{١ + ظا}^{٢}\text{س}}$ = ...

(أ) حتا ٢ س (ب) حا ٢ س (جـ) حتاس (د) حاس

(٣٢) $\frac{\text{١ + حا ٢ س}}{\text{حاس + حتاس}}$ = ...

(أ) حاس (ب) حتاس (جـ) حاس + حتاس (د) ظاس

(٣٣) إذا كان : ٢ حاس حتا^{٣} س − ٢ حتاس حا^{٣} س = $\frac{١}{٢}$ فإن : حا ٤ س = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٣٤) إذا كان : حا أ حتا^{٣} أ + حتا أ حا^{٣} أ = $\frac{١}{٢}$ فإن : أ = ...

(أ) $\frac{\pi}{٦}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{\pi}{٤}$ (د) π

(٣٥) إذا كان : حا ٣٢° = س فإن : حا ٤° حتا ٤° حتا ٨° حتا ١٦° = ...

(أ) $\frac{\text{س}}{١٦}$ (ب) $\frac{\text{س}}{٨}$ (جـ) $\frac{\text{س}}{٤}$ (د) $\frac{\text{س}}{٢}$

(٣٦) إذا كان : ظا أ = $\frac{١}{٢}$ فإن : ظتا $\frac{\text{أ}}{٢}$ − ظا $\frac{\text{أ}}{٢}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ٥

(٣٧) إذا كان : ظا هـ = $\frac{-٥}{١٢}$ ، هـ ∈]٠ ، π[فإن : حتا $\frac{\text{هـ}}{٢}$ = ...

(أ) $\frac{١٢}{١٣}$ (ب) $\frac{-١٢}{١٣}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٢٦}}$ (د) $\frac{٥}{\sqrt{٢٦}}$

(٣٨) إذا كان حاس حتاس = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ وكانت : س ∈]٤٥° ، ٩٠°[فإن : ظا ٤ س = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $-\sqrt{٣}$ (جـ) $\sqrt{٣}$ (د) $\sqrt{٦}$

(٣٩) إذا كان : ٤ حتا ٢ حـ + ٣ حا ٢ حـ = ٠ حيث حـ قياس زاوية حادة موجبة

فإن : ظا حـ = ...

(أ) $\frac{-٤}{٣}$ (ب) $\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$ (جـ) ١ (د) ٢

(٤٠) إذا كان : ب − ٢ أ = ١٨٠° ، ظا أ = $\frac{١}{٢}$ فإن : ظا ب = ...

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ (د) ١

(٤١) إذا كانت أ ، ب ، ح قياسات زوايا المثلث أ ب ح وكان : ظا ح = $\frac{٣}{٤}$

فإن : حا $\left(\frac{أ + ب}{٢}\right)$ = ...

(أ) ٠,٣ (ب) $\frac{٣}{\sqrt{١٠}}$ (ج) $\frac{٣}{٨}$ (د) ٠,٩

(٤٢) إذا كان : د (س) = ظا س فإن : د $\left(س + \frac{\pi}{٤}\right)$ + د $\left(س - \frac{\pi}{٤}\right)$ = ...

(أ) ظا ٢ س (ب) ٤ ظا س (ج) ٢ ظا ٢ س (د) ٢ ظتا ٢ س

(٤٣) ظتا θ − ظتا ٢ θ = ...

(أ) حا θ (ب) حا ٢ θ (ج) قتا θ (د) قتا ٢ θ

(٤٤) $\frac{حتا ٢ س}{حتا س - حا س}$ − حا س = ...

(أ) حا س (ب) حتا س (ج) ظا س (د) قا س

(٤٥) $\frac{حا ٣ س}{حا س}$ − $\frac{حتا ٣ س}{حتا س}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) حا س (د) حتا س

(٤٦) $\frac{٢ حا س - حا ٢ س}{حا^{٣} س}$ = ...

(أ) حتا^{٢} $\frac{س}{٢}$ (ب) ظا^{٢} $\frac{س}{٢}$ (ج) حا^{٢} $\frac{س}{٢}$ (د) قا^{٢} $\frac{س}{٢}$

(٤٧) إذا كان : س $\in$ $\left[٠ ، \frac{\pi}{٤}\right]$ وكان : $(١٦)^{حتا س حا س}$ = ٢ فإن : ظا ٢ س = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

(٤٨) إذا كان : ١ + ظتا^{٢} θ = $\frac{م}{حا^{٢} ٢ θ}$ فإن : م = ...

(أ) حتا^{٢} θ (ب) ٤ حتا^{٢} θ (ج) حا^{٢} θ (د) ٤ حا^{٢} θ

(٤٩) إذا كان : $\frac{حا ٣ θ}{حا θ}$ + $\frac{حتا ٣ θ}{حتا θ}$ = ٢ فإن : حتا ٢ θ = ...

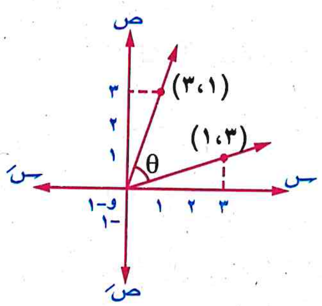
(أ) − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{-١}{٢}$ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٥٠) مجموعة حل المعادلة : حتا س + حتا ٢ س = صفر حيث س $\in$ $]٠ ، \pi[$ هى ....

(أ) $\{\pi\}$ (ب) $\left\{\frac{\pi}{٦} ، \pi\right\}$ (ج) $\left\{\frac{\pi}{٣}\right\}$ (د) $\left\{\frac{\pi}{٣} ، \pi\right\}$

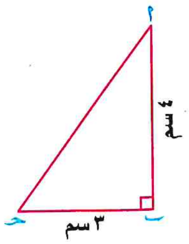
(٥١) فى الشكل المقابل :

ظتا θ = ...



(أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (ج) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٥}$

(٥٢) في الشكل المقابل :

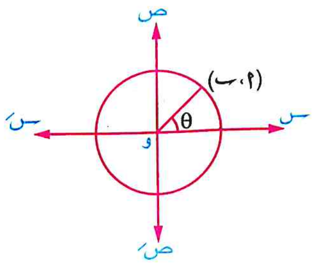


حا أ + حا ٢ حـ + حا ٣ ب = ...

(أ) $\frac{١٤}{٢٥}$ (ب) $\frac{١٣}{٢٥}$

(جـ) $\frac{١١}{١٢}$ (د) $\frac{١٦}{٢٥}$

(٥٣) الشكل المقابل يمثل دائرة الوحدة

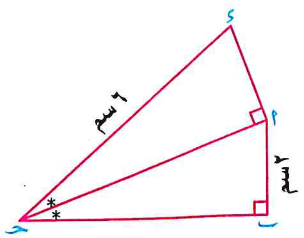


فإن : طا $\frac{θ}{٢}$ = ...

(أ) $\frac{ب}{٢ أ}$ (ب) $\frac{ب}{١ + أ}$

(جـ) $\frac{٢ ب}{أ}$ (د) $\frac{١ + ب}{١ + أ}$

(٥٤) في الشكل المقابل :

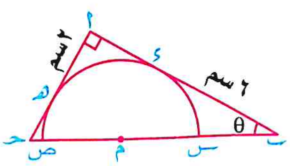


حا (∠ ء حـ ب) = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$

(جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٥٥) في الشكل المقابل :

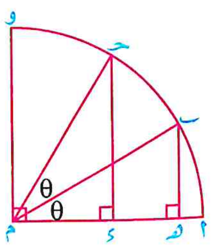


طا ٢ θ = ...

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$

(جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(٥٦) في الشكل المقابل :



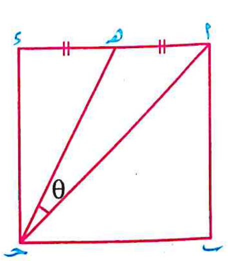
ربع دائرة م ، ب هـ = ٣ سم

، حـ ء = ٥ سم ، حتا θ = ...

(أ) $\frac{٥}{٦}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$

(جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٦}$

(٥٧) في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء مربع ، طا ٢ θ = ...

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) ٢

(جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتي :

(١) $٢ \text{ جا } ٣٠َ \ ٢٢° \text{ جتا } ٣٠َ \ ٢٢°$ « $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ »

(٢) $٢ \text{ جتا}^٢ \ ١٥° - ١$ « $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ »

(٣) $\text{جتا}^٢ \ ٦٧,٥° - \text{جا}^٢ \ ٦٧,٥°$ « $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ »

(٤) $٤ \text{ جا } ٧,٥° \text{ جتا } ٧,٥° \text{ جتا } ١٥°$ « $\frac{١}{٢}$ »

(٥) $\frac{٢ \text{ ظا } ٣٠َ \ ٢٢°}{١ - \text{ظا}^٢ \ ٣٠َ \ ٢٢°}$ «١»

(٦) $\frac{٢ \text{ ظا } \frac{\pi}{٦}}{١ - \text{ظا}^٢ \frac{\pi}{٦}}$ « $\sqrt{٣}$ »

(٧) $\frac{\text{جتا}^٢ \ ٢٣° - \text{جا}^٢ \ ٢٣°}{٢ \text{ جا}^٢ \ ٢٣° - ١}$ «−١»

(٨) $\frac{٣}{\text{قا } ١٥° \text{ قتا } ١٥°}$ « $\frac{٣}{٤}$ »

(٩) $\frac{\text{جتا } ٤٠° \text{ جتا } ١٠° + \text{جا } ٤٠° \text{ جا } ١٠°}{\text{جا } ١٥° \text{ جتا } ١٥°}$ « $٢\sqrt{٣}$ »

(١٠) $\frac{٢ \text{ جتا}^٢ \ ١٦٥° - ١}{\text{جا } ٧٥° \text{ جتا } ٧٥°}$ « $٢\sqrt{٣}$ »

٢ إذا كان : $\text{جا أ} = \frac{-٣}{٥}$ حيث $\pi < \text{أ} < \frac{٣\pi}{٢}$ أوجد قيمة كل من : جا ٢أ ، جتا ٢أ ، ظا ٢أ « $\frac{٢٤}{٢٥}$ ، $\frac{٧}{٢٥}$ ، $\frac{٢٤}{٧}$ »

٣ إذا كان : $\text{جتا حـ} = \frac{٧}{٩}$ حيث حـ ∈ $]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ أوجد قيمة كل من : $\text{جا } \frac{\text{حـ}}{٢}$ ، $\text{جتا } \frac{\text{حـ}}{٢}$ ، $\text{ظا } \frac{\text{حـ}}{٢}$
« $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$ ، $\frac{\sqrt{٢}}{٤}$ »

٤ أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من : جا ٢θ ، جتا ٢θ ، ظا ٢θ إذا كان :

(١) $\text{جا } \theta = \frac{٤}{٥}$ ، $٠° < \theta < ٩٠°$

(٢) $\text{جتا } \theta = \frac{١}{٣}$ ، $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$

(٣) $\text{ظا } \theta = \frac{٣}{٢}$ ، $١٨٠° < \theta < ٢٧٠°$

(٤) $\text{جا } \theta = \frac{-١٢}{١٣}$ ، $\frac{٣\pi}{٢} < \theta < ٢\pi$

٥ أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من : جا ٢θ ، جتا ٢θ ، $\text{جا } \frac{\theta}{٢}$ ، $\text{جتا } \frac{\theta}{٢}$ إذا كان :

(١) $\text{جتا } \theta = \frac{١}{٤}$ ، $٠° < \theta < ٩٠°$

(٢) $\text{جا } \theta = \frac{٣}{٥}$ ، $٩٠° < \theta < ١٨٠°$

(٣) $\text{ظا } \theta = \frac{٤}{٣}$ ، $\pi < \theta < \frac{٣\pi}{٢}$

(٤) $\text{جتا } \theta = \frac{٥}{١٣}$ حيث θ قياس زاوية حادة

٦ إذا كان : $\text{جتا } ٢\text{س} = \frac{١}{٨}$ أوجد قيمة كل من : جا س ، جتا س « $\pm \frac{\sqrt{٧}}{٤}$ ، $\pm \frac{٣}{٤}$ »

٧ إذا كان : $\text{جا } \frac{\text{حـ}}{٢} = ٠,٦$ حيث حـ ∈ $]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ أوجد قيمة :

(١) ٣ جا حـ + ٤ جتا حـ
(٢) قا حـ + ظا حـ «٤ ، ٧»

٨ إذا كان : $\text{جا } \frac{\text{أ}}{٢} = \frac{١}{٣}$ ، بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل من : $\text{جتا } \frac{\text{أ}}{٢}$ ، جا أ ، جتا أ
« $\pm \frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$ ، $\pm \frac{٤\sqrt{٢}}{٩}$ ، $\frac{٧}{٩}$ »

٩ إذا كان : أ قياس زاوية حادة ، $\text{جتا } ٢\text{أ} = \frac{١١٩}{١٦٩}$ ، بدون استخدام الآلة الحاسبة
أوجد قيمة كل من : جا أ ، جتا أ ، ظا ٢أ « $\frac{٥}{١٣}$ ، $\frac{١٢}{١٣}$ ، $\frac{١٢٠}{١١٩}$ »

● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

١٠ إذا كان : حتا٢ أ = $\frac{٢٥}{١٦٩}$ حيث أ ∋] π ، $\frac{٣\pi}{٢}$ [أوجد قيمة كل من : حا ٢ أ ، حتا $\frac{أ}{٢}$ « $\frac{١٢٠}{١٦٩}$ ، $\frac{-٢}{\sqrt{١٣}}$ »

---

١١ إذا كان : ٢٥ حتا أ + ٧ = ٠ حيث أ أصغر زاوية موجبة ، ٤ طاب − ٣ = ٠

حيث ب أكبر زاوية موجبة ، ب ∋] ٠ ، ٣٦٠° [أوجد قيمة :

(١) حا ٢ أ (٢) طا (أ − ٢ ب) « $\frac{-٥٢٧}{٦٢٥}$ ، $\frac{٣٣٦}{٥٢٧}$ »

---

١٢ إذا كان : طا أ = $\frac{١}{٣}$ حيث أ ∋] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [، طاب = $\frac{١}{٧}$ حيث ب ∋] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [

أوجد قيمة كل من : طا (٢ أ + ب) ، طا (أ − ٢ ب) ، طا ٢ (أ + ب) « ١ ، $\frac{٣}{٧٩}$ ، $\frac{٤}{٣}$ »

---

١٣ إذا كان : حا (٢٧٠° + أ) = $\frac{٥}{١٣}$ ، طاب = $\frac{٤}{٣}$ ، π < ب < أ < ٢ π أوجد قيمة :

(١) حتا (π + ٢ أ) (٢) طا ($\frac{\pi}{٢}$ − ٢ ب) « $\frac{١١٩}{١٦٩}$ ، $\frac{-٢٤}{٧}$ »

---

١٤ إذا كان : حا أ = $\frac{٤}{٥}$ حيث أ ∋] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [، ظتاب = $\frac{٥}{١٢}$ حيث ب ∋] π ، $\frac{٣\pi}{٢}$ [

فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كلًا من : طا (أ − ب) ، حا ٢ ب

---

١٥ إذا كان : حا ٢ س = $\frac{١٢٠}{١٦٩}$ حيث ٢ س ∋] ٠ ، π [

فأوجد بدون استخدام الحاسبة قيمة المقدار : حا س + حتا س « $\frac{١٧}{١٣}$ »

---

١٦ إذا كان : حا ٢ س = $\frac{١}{٥}$ أوجد قيمة :

(١) حا ٣ س حتا س + حتا ٣ س حا س

(٢) حتا ٥ س حتا س + حا ٥ س حا س « ± $\frac{٤\sqrt{٦}}{٢٥}$ ، $\frac{٢٣}{٢٥}$ »

---

١٧ إذا كان : حا س + حتا س = $\frac{٧}{٥}$ حيث س قياس زاوية حادة أثبت أن :

(١) حا ٢ س = $\frac{٢٤}{٢٥}$ (٢) قا س + قتا س = $\frac{٣٥}{١٢}$ (٣) حتا ٢ س = ± $\frac{٧}{٢٥}$

---

١٨ إذا كان : ٤ حا هـ + ٣ حتا هـ = ٣

أثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن : طا $\frac{هـ}{٢}$ = $\frac{٤}{٣}$ حيث $\frac{هـ}{٢}$ قياس زاوية حادة موجبة.

---

١٩ إذا كان : أ ب حـ مثلث حاد الزوايا فيه : طا أ = ٣ ، ٤ + ٣ طا ٢ ب = صفر

أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة كلاً من : طا ب ، ق (∠ حـ) « ٢ ، ٤٥° »

---

٢٠ إذا كان : طا أ = $\frac{١}{٢}$ ، طا ب = ٧ أوجد : طا ٢ أ ثم أثبت أن : ٢ أ + ب = ١٣٥°

حيث أ ، ب قياسا زاويتين حادتين. « $\frac{٤}{٣}$ »

---

٢١ إذا كان : طا ٢ أ = $\frac{٣}{٤}$ حيث أ ∋] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [، وكان طاب = $\frac{٢}{٣}$ طا أ حيث ب ∋] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [

أثبت أن : أ + ب = ٤٥°

٢٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة وباستخدام الدوال المثلثية لنصف الزاوية أوجد قيمة كل مما يأتى :

(١) حتا ٧٥° (٢) ظا ١٥° (٣) حتا ٣٠َ ٢٢° (٤) ظا ٣٠َ ٦٧°

---

٢٣ س ص ع مثلث فيه : سَ = ١٢ سم ، صَ = ١٨ سم ، عَ = ١٥ سم

أثبت أن : ق (∠ ص) = ٢ ق (∠ س)

---

٢٤ إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : أَ : بَ : حـَ = ٣ : ٤ : ٥ أوجد قيمة كل من : حا أ ، ظا ٢ أ «$\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٢٤}{٧}$»

---

٢٥ أ ب حـ مثلث فيه : أَ = حـَ أثبت أن : حا ب = ٢ حا أ حتا حـ

---

٢٦ أثبت أن :

(١) $\frac{\text{حتا ٢ أ}}{\text{حتا أ − حا أ}}$ = حتا أ + حا أ

(٢) حا ٨ أ = ٨ حا أ حتا أ حتا ٢ أ حتا ٤ أ

(٣) ٢ حا^{٢} ٢ أ + حتا ٤ أ = ١

(٤) ١ − ٢ حا^{٢} $\left(\frac{\pi}{٤} - \frac{\text{٥ س}}{٢}\right)$ = حا ٥ س

(٥) حتا^{٤} س − حا^{٤} س = حتا ٢ س

(٦) $\frac{\text{حا أ + حتا ٢ أ}}{\text{١ + ٢ حا أ}}$ = ١ − حا أ

(٧) حا أ = $\frac{\text{٢ ظا } \frac{\text{أ}}{٢}}{\text{١ + ظا}^{٢} \frac{\text{أ}}{٢}}$

(٨) ظا س = $\frac{\text{حا س − ٢ حا}^{٣}\text{ س}}{\text{٢ حتا}^{٣}\text{ س − حتا س}}$

(٩) $\frac{\text{حا ٢ س}}{\text{١ + حتا ٢ س}}$ = ظا س

(١٠) قا ٢ س = $\frac{\text{قا}^{٢}\text{ س}}{\text{١ − ظا}^{٢}\text{ س}}$

(١١) $\frac{\text{حا ٢ س + حا س}}{\text{١ + حتا س + حتا ٢ س}}$ = ظا س

(١٢) $\frac{\text{١ − حتا حـ + حا حـ}}{\text{١ + حتا حـ + حا حـ}}$ = ظا $\frac{\text{حـ}}{٢}$

(١٣) $\frac{\text{حتا}^{٢}\text{ أ}}{\text{ظتا } \frac{\text{أ}}{٢} \text{ − ظا } \frac{\text{أ}}{٢}}$ = $\frac{١}{٤}$ حا ٢ أ

(١٤) $\frac{\text{١ − حا ٢ هـ}}{\text{حتا ٢ هـ}}$ = $\frac{\text{١ − ظا هـ}}{\text{١ + ظا هـ}}$

(١٥) $\frac{\text{١ − حتا حـ}}{\text{١ + حتا حـ}}$ = ظا^{٢} $\frac{\text{حـ}}{٢}$

(١٦) ٤ حا أ حتا^{٣} أ − حا ٢ أ = $\frac{١}{٢}$ حا ٤ أ

(١٧) $\frac{\text{١ − حتا ٢ أ}}{\text{٣ + حتا ٢ أ}}$ = $\frac{\text{حا}^{٢}\text{ أ}}{\text{١ + حتا}^{٢}\text{ أ}}$

(١٨) $\frac{\text{ظتا } \theta \text{ − ١}}{\text{ظتا } \theta \text{ + ١}}$ = $\frac{\text{حتا ٢ } \theta}{\text{١ + حا ٢ } \theta}$

(١٩) (حا س + حتا س)^{٢} − (حا س − حتا س)^{٢} = ٢ حا ٢ س

(٢٠) ٢ حتا (٤٥° − ٢ أ) حتا (٤٥° + ٢ أ) = ١ − ٨ حا^{٢} أ حتا^{٢} أ

(٢١) (حا أ − حا ب)^{٢} + (حتا أ + حتا ب)^{٢} = ٤ حتا^{٢} $\left(\frac{\text{أ + ب}}{٢}\right)$

(٢٢) حتا^٢ أ = $\frac{١}{٢}$ (١ + حتا ٢ أ) ومن ذلك أوجد قيمة : حتا ١٥° « $\frac{\sqrt{٦}+\sqrt{٢}}{٤}$ »

(٢٣) قتا ٢ س + ظتا ٢ س = ظتا س ومن ذلك أوجد قيمة : ظتا ١٥° « $٢+\sqrt{٣}$ »

(٢٤) حتا ٢ س = $\frac{١-ظا^٢ س}{١+ظا^٢ س}$ ومن ذلك أوجد قيمة : $\frac{١-ظا^٢ ١٥°}{١+ظا^٢ ١٥°}$ « $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ »

٢٧ بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن :

(١) ١٦ حا ٢٠° حا ٤٠° حا ٦٠° حا ٨٠° = ١

(٢) حا $\frac{٥\pi}{٢٤}$ حتا^٣ $\frac{٥\pi}{٢٤}$ − حا^٣ $\frac{٥\pi}{٢٤}$ حتا $\frac{٥\pi}{٢٤}$ = $\frac{١}{٨}$

(٣) ظا^٢ ١٥° + ٢ $\sqrt{٣}$ ظا ١٥° = ١

٢٨ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية حيث س ∈ [٠ ، ٢π[:

(١) حا ٢ س = حا س « $\{\frac{\pi}{٣} ، \pi ، \frac{٥\pi}{٣}\}$ »

(٢) حا ٢ س = $\sqrt{٣}$ حا س « $\{\frac{\pi}{٦} ، \pi ، \frac{١١\pi}{٦}\}$ »

(٣) حتا ٢ س + حا س = ٠ « $\{\frac{٧\pi}{٦} ، \frac{١١\pi}{٦} ، \frac{\pi}{٢}\}$ »

(٤) $\sqrt{٣}$ حتا ٢ س = حتا س « {٣٠° ، ٣٣٠° ، ١٢٥° ١٦َ ، ٢٣٤° ٤٤َ} »

(٥) حتا ٢ س + ٣ حتا س + ٢ = ٠ « $\{\pi ، \frac{٢\pi}{٣} ، \frac{٤\pi}{٣}\}$ »

(٦) حا^٢ ٢ س + ٤ حا س حتا س + ١ = ٠ « $\{\frac{٣\pi}{٤} ، \frac{٧\pi}{٤}\}$ »

(٧) حتا^٢ س − حا^٢ س = $-\frac{١}{٢}$ « $\{\frac{\pi}{٣} ، \frac{٢\pi}{٣} ، \frac{٤\pi}{٣} ، \frac{٥\pi}{٣}\}$ »

(٨) ظا^٢ $\frac{س}{٢}$ + ٢ ظا $\frac{س}{٢}$ = ١ « $\{\frac{\pi}{٤} ، \frac{٥\pi}{٤}\}$ »

(٩) حتا س − ٢ حا^٢ $\frac{١}{٢}$ س = ٠ « $\{\frac{\pi}{٣} ، \frac{٥\pi}{٣}\}$ »

٢٩ أوجد مجموعة حل المعادلة :

حا س حتا^٣ س − حا^٣ س حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٨}$ حيث س ∈ [٠ ، π[« $\{\frac{\pi}{١٢} ، \frac{\pi}{٦} ، \frac{٧\pi}{١٢} ، \frac{٢\pi}{٣}\}$ »

٣٠ إذا كان : ٥ حتا س + ٤ = ٠ ، س ∈]٠ ، π[أوجد قيمة : حتا ٣ س « $\frac{٤٤}{١٢٥}$ »

٣١ إذا كان أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى حـ أثبت أن :

(١) حا ٢ أ = $\frac{٢ أ ب}{حـ^٢}$

(٢) حتا ٢ أ = $\frac{ب^٢ - أ^٢}{حـ^٢}$

(٣) حا $\frac{أ}{٢}$ = $\sqrt{\frac{حـ - ب}{٢ حـ}}$

٣٢ أ ب حـ مثلث ، $\overleftarrow{أ هـ}$ ينصف زاوية أ من الداخل بحيث يلاقى $\overline{ب حـ}$ فى هـ أثبت أن : أ هـ = $\frac{٢ ب حـ}{ب + حـ}$ حتا $\frac{أ}{٢}$

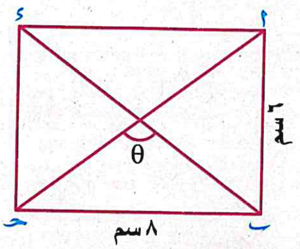
ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\frac{\text{جا}^2\ ٣\ \text{أ}}{\text{جا}^2\ \text{أ}} - \frac{\text{جتا}^2\ ٣\ \text{أ}}{\text{جتا}^2\ \text{أ}} = ٢$ فإن : جتا ٢ أ = ...

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (ج) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (د) $\frac{١}{٢}$

(٢) فى الشكل المقابل :



إذا كان أ ب ج د مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم

، ب ج = ٨ سم

فإن : جا θ = ...

(أ) $\frac{٢٤}{٥}$ (ب) $\frac{٢٤}{٢٥}$

(ج) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{١٢}{٢٥}$

(٣) مجموعة حل المعادلة : جا ٣ س − جا ٢ س + جتا س = ٠ حيث س قياس زاوية حادة هى ....

(أ) {٣٠° ، ٦٠°} (ب) {٣٠° ، ٤٥°} (ج) {٤٥° ، ٦٠°} (د) {١٥° ، ٧٥°}

(٤) إذا كان : ٣ أ + ٢ ب = ١٨٠° فإن : $\frac{\text{جا ٢ أ جتا ب} - \text{جتا ٢ أ جا ب}}{\text{جا أ جتا ٣ ب} + \text{جتا أ جا ٣ ب}}$ = ...

(أ) −١ (ب) صفر (ج) ١ (د) ٢

(٥) إذا كان : $٠ < \theta < \frac{\pi}{٤}$ فإن : $\sqrt{١ + \text{جا ٢}\theta} - \sqrt{١ - \text{جا ٢}\theta}$ = ...

(أ) جا θ (ب) جتا θ (ج) ٢ جا θ (د) ٢ جتا θ

---

٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن :

(١) جا ٥٤° جا ١٨° = $\frac{١}{٤}$ (٢) جا ٥٤° − جا ١٨° = $\frac{١}{٢}$

---

٣ بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن : طا ٢٠° طا ٣٠° طا ٤٠° = طا ١٠°

---

٤ أثبت أن : طا ٣ هـ = $\frac{\text{٣ طا هـ} - \text{طا}^3\ \text{هـ}}{١ - ٣\ \text{طا}^2\ \text{هـ}}$ ومن ثم أثبت أن : طا ٥٠° طا ٦٠° طا ٧٠° = طا ٨٠°

---

٥ فى المثلث د هـ و إذا علم أن : هـَ = ٢ $\sqrt{٣}$ دَ ، ق(∠ و) = ٣٠°

فأثبت بدون استخدام حاسبة الجيب أن : طا د = $\frac{\sqrt{٣}}{٩}$

الثانى الثانوى
القسم العلمى
الفصل الدراسى الثانى

يُصرف مجاناً مع هذا الكتاب
- الجزء الخاص بالامتحانات
- الجزء الخاص بالإجابات

- أدخل كودك الشخصى الموجود على ظهر الغلاف
- لمزيد من المعلومات انظر صفحة ٣.

GPS

مكتبة الطلبة
للطبع والنشر والتوزيع
٣ شارع كامل صدقى - الفجالة
تليفون: ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٠٢/ ٢٥٩٣٤٠١٢
www.gpseducation.com
الخط الساخن
١٥٠١٤