الرياضيات التطبيقية

الشرح والتمارين

الجزء الأول: الاستاتيكا

تطبيق
المعاصر التفاعلى

3
ثانوى
2026

المعاصر

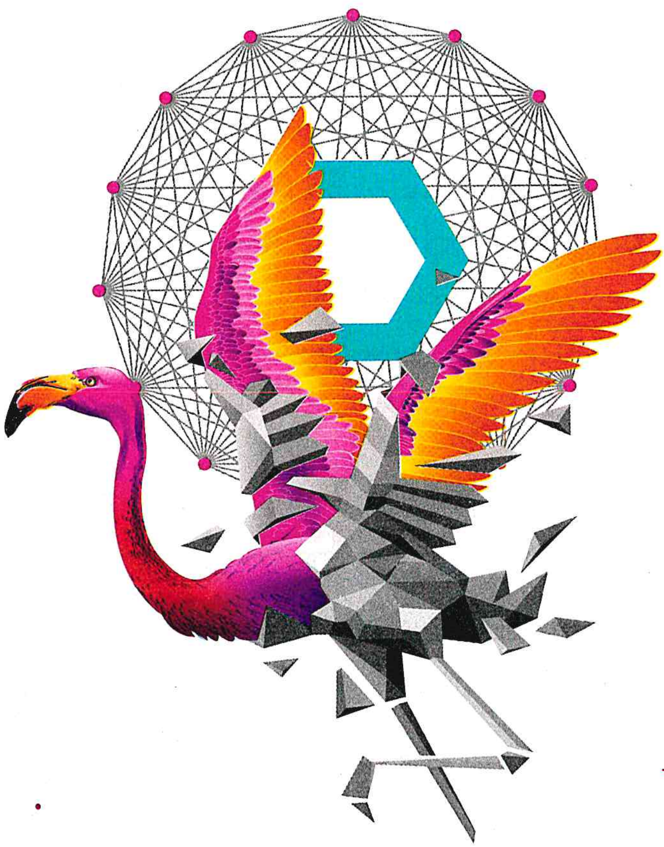
إعداد نخبة من خبراء التعليم

المعاصر

الجزء الأول:
الاستاتيكا

الرياضيات التطبيقية

الشرح والتمارين



3
ثانوى

إعداد نخبة من
خبراء التعليم

GPS

مكتبة الطلبة
للطبع والنشر والتوزيع
٣ شارع كامل صدقى - الفجالة
تليفون: ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٠٢/٢٥٩٣٤٠١٢
www.gpseducation.com

الخط الساخن
١٥٠١٤

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

الحمد لله الذى وفقنا لتقديم هذا الكتاب من مجموعة كتب «المعاصر» فى الرياضيات... نقدمه إلى أبنائنا الطلبة آملين أن يجدوا فيه المعلم والموجه الذى يعينهم على فهم كل صعب، ويذلل أمامهم كل مغلق وغامض، ويأخذ بأيديهم إلى طريق النجاح والتفوق.

ونقدمه إلى إخواننا المدرسين ليكون لهم عونًا على أداء رسالتهم الشاقة، ونافذة يطلون منها على خبرات إخوة لهم أمضوا قرابة الثلاثين عامًا فى حقل التدريس والتوجيه.

ونحن لن نلجأ - فى هذا التقديم - إلى تقييم عملنا وجهدنا من خلال سرد لمزايا هذا الكتاب وما أُستحدث فيه ، ولكننا نترك ذلك لكل من يطوى صفحة منه أو يقرأ سطرًا فيه ، لكى يبدى فيه رأيًا ... إن كان نقدًا فنحن نرحب به ... وإن كانت كلمة ثناء فهى خير مقابل نرجوه ، وأعز وسام نضعه على صدورنا.

والله لا يضيع أجر من أحسن عملاً، وهو ولى التوفيق،

« المؤلفون »

بطاقة فهرسة

فهرسة أثناء النشر إعداد إدارة الشئون الفنية - دار الكتب المصرية

المعاصر فى الرياضيات التطبيقية / إعداد نخبة من خبراء التعليم -
القاهرة : جى بى إس للطبع والنشر والتوزيع ، ٢٠٢٥
٤ مج ؛ ٢٤ سم.
الصف الثالث الثانوى
المحتويات : جـ١. الاستاتيكا : الشرح والتمارين. -
جـ٢. الديناميكا : الشرح والتمارين. -
جـ٣. الاستاتيكا. الديناميكا : المراجعة المستمرة. -
جـ٤. الاستاتيكا. الديناميكا : الإجابات.
تدمك : ٢ - ٢٠٣ - ٩٧٠ - ٩٧٧ - ٩٧٨
١- الرياضيات - تعليم وتدريس. ٣ - التعليم الثانوى.
٢- الرياضيات - اسئلة واجوبة.
٥١٠,٧

رقم الإيداع : ٢٠٤٩٩ / ٢٠٢٥م

التطبيق التفاعلى من سلسلة كتب ...

الامتحان المعاصر

QR Code

كيفية الاستخدام: 1. نزل التطبيق. 2. أنشئ حسابك. 3. أدخل الكود الموجود على ظهر الغلاف.

استمتع بجميع مزايا التطبيق

لجميع المواد الدراسية

- شرح
- فيديوهات
- ألعاب تعليمية
- امتحانات تفاعلية
- تدريبات
- تواصل مع معلمك
- تقارير متابعة
- إشعارات
- أخبار

تصنيف بلوم للمستويات المعرفية

المستويات العليا من التفكير

المستويات الدنيا من التفكير

- إنتاج أفكار جديدة
- الحكم على المعلومات لاتخاذ القرارات
- تجزئة الفكرة إلى عناصرها وتحديد العلاقات بينها
- استخدام المعلومات فى مواقف مشابهة جديدة
- إدراك معنى المعلومات وشرحها
- استرجاع المعلومات السابق دراستها

ملاحظة: تم تصنيف الأسئلة بداخل كل تمرين طبقًا لمستويات هرم بلوم والإشارة لها كالتالى:

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا (تحليل أو تقويم أو ابتكار)

محتويات الكتـــاب

* مراجعة عامة على ما سبقت دراسته فى الاستاتيكا.

الوحدة الأولى

العـــزوم.

الوحدة الثانية

القوى المستوية.

الوحدة الثالثة

الازدواجـــات.

مراجعة عامة على ما سبقت دراسته في الاستاتيكا

١ محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة :

إذا كان : $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_2}$ قوتين متلاقيتين فى نقطة واحدة محصلتهما $\overrightarrow{\text{ح}}$ وقياس الزاوية بينهما = ى
، قياس زاوية ميل المحصلة $\overrightarrow{\text{ح}}$ على $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ = هـ

فإن : $\text{ح} = \sqrt{\text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2 + 2\,\text{ق}_1\,\text{ق}_2 \text{ جتا ى}}$ ، $\text{ظا هـ} = \dfrac{\text{ق}_2 \text{ جا ى}}{\text{ق}_1 + \text{ق}_2 \text{ جتا ى}}$

(حيث ق_1 ، ق_2 معيارا القوتين $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_2}$ ، ح معيار المحصلة $\overrightarrow{\text{ح}}$)

حالات خاصة : إذا كانت القوتان : $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_2}$

① فى نفس الاتجاه (ى = صفر)

فإن : $\text{ح} = \text{ق}_1 + \text{ق}_2$

، اتجاه $\overrightarrow{\text{ح}}$ فى نفس اتجاه القوتين

② متضادتين فى الاتجاه (ى = ١٨٠°)

فإن : $\text{ح} = |\text{ق}_1 - \text{ق}_2|$

، اتجاه $\overrightarrow{\text{ح}}$ فى نفس اتجاه القوة الأكبر مقدارًا

③ وكان : $\overrightarrow{\text{ق}_1} \perp \overrightarrow{\text{ق}_2}$

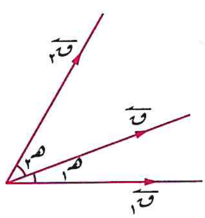
فإن : $\text{ح} = \sqrt{\text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2}$ ، $\text{ظا هـ} = \dfrac{\text{ق}_2}{\text{ق}_1}$

④ متساويتان فى المقدار ($\text{ق}_1 = \text{ق}_2 = \text{ق}$)

فإن : $\text{ح} = 2\,\text{ق جتا } \dfrac{\text{ى}}{2}$ ، $\text{هـ} = \dfrac{\text{ى}}{2}$

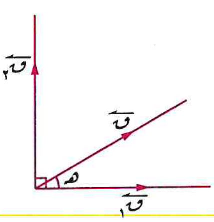
٢ تحليل القوة إلى مركبتين :

① **فى اتجاهين معلومين :** إذا كان : $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_2}$ هما مركبتا القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$



فإن : $\text{ق}_1 = \dfrac{\text{ق جا هـ}_2}{\text{جا}(\text{هـ}_1 + \text{هـ}_2)}$ ، $\text{ق}_2 = \dfrac{\text{ق جا هـ}_1}{\text{جا}(\text{هـ}_1 + \text{هـ}_2)}$

② **فى اتجاهين متعامدين :**



إذا كان : $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_2}$ هما مركبتا $\overrightarrow{\text{ق}}$ بحيث $\overrightarrow{\text{ق}_1} \perp \overrightarrow{\text{ق}_2}$

فإن : $\text{ق}_1 = \text{ق جتا هـ}$ ، $\text{ق}_2 = \text{ق جا هـ}$

٣ محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة :

إذا كانت : $هـ_١$ ، $هـ_٢$ ، ... ، $هـ_ن$ هى قياسات الزوايا القطبية التى تصنعها القوى $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ ، ... ، $\overrightarrow{ق_ن}$ مع $\overrightarrow{و س}$

فإن : س (المجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overrightarrow{و س}$)

$= ق_١ \text{ جتا } هـ_١ + ق_٢ \text{ جتا } هـ_٢ + \cdots + ق_ن \text{ جتا } هـ_ن$

، ص (المجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overrightarrow{و ص}$)

$= ق_١ \text{ جا } هـ_١ + ق_٢ \text{ جا } هـ_٢ + \cdots + ق_ن \text{ جا } هـ_ن$

ويكون : $ح = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$ ، $\text{ظا } هـ = \frac{ص}{س}$ حيث هـ زاوية ميل $\overrightarrow{ح}$ على $\overrightarrow{و س}$

٤ الاتـــزان :

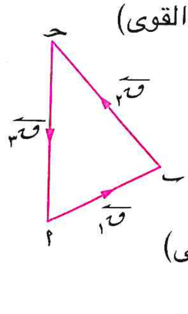
(١) إذا اتزن جسم تحت تأثير قوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ فإن : $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ متساويتان فى المقدار ومتضادتان فى الاتجاه وخط عملهما على استقامة واحدة.

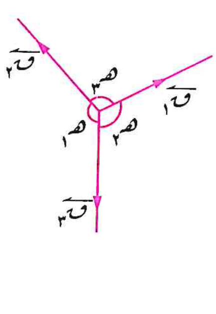
(٢) إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ ، $\overrightarrow{ق_٣}$ فإن :

(١) إذا تلاقى خطا عمل قوتين فى نقطة فإن خط عمل القوة الثالثة لابد أن يمر بهذه النقطة.

(٢) إذا رسم مثلث أضلاعه توازى خطوط عمل القوى الثلاثة وفى اتجاه دورى واحد فإن أطوال أضلاعه تكون متناسبة مع مقادير القوى المناظرة.

أى : $\frac{ق_١}{أ ب} = \frac{ق_٢}{ب ح} = \frac{ق_٣}{ح أ}$ (قاعدة مثلث القوى)





(٣) مقدار كل قوة يتناسب مع جيب الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين

أى : $\frac{ق_١}{\text{جا } هـ_١} = \frac{ق_٢}{\text{جا } هـ_٢} = \frac{ق_٣}{\text{جا } هـ_٣}$ (قاعدة لامى)

(٣) يتزن الجسم تحت تأثير عدة قوى متلاقية فى نقطة واحدة إذا كان :

المجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه ما = صفر

والمجموع الجبرى لمركبات القوى فى الاتجاه العمودى عليه = صفر

٥ الإحتكاك :

✱ **قوة الاحتكاك السكونى** ($\overline{ح}$) : هى قوة خفية تظهر عند محاولة تحريك جسم على سطح خشن وتعمل على مقاومة حركة الجسم.

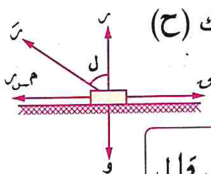
✱ **قوة الاحتكاك السكونى النهائى** ($\overline{ح}_س$) : هى قوة الاحتكاك عندما يصل مقدار الاحتكاك إلى قيمته العظمى والتى عندها يكون الجسم على وشك الحركة.

✱ **معامل الاحتكاك السكونى** ($م_س$) : هو النسبة بين مقدارى قوة الاحتكاك النهائى ورد الفعل العمودى

أى أن : $\boxed{م_س = \frac{ح_س}{ر} \quad \text{ومنها} \quad ح_س = م_س \, ر}$

✱ **عند محاولة تحريك جسم على سطح خشن فإن** : $٠ < ح \leq م_س \, ر$ (ملاحظة : $ح = ٠$ عندما لا توجد قوة تحاول تحريك الجسم)

✱ **رد الفعل المحصل** ($\overline{ر}$) : هو محصلة رد الفعل العمودى وقوة الاحتكاك (ح)



$ر' = \sqrt{ر^٢ + ح^٢}$ وفى حالة الاحتكاك النهائى

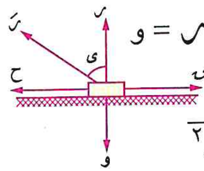
$$\boxed{ر' = \sqrt{ر^٢ + ح_س^٢} = \sqrt{ر^٢ + م_س^٢ ر^٢} = ر \sqrt{١ + م_س^٢} = ر \sqrt{١ + طا^٢ ل} = ر \, قا \, ل}$$

✱ **زاوية الاحتكاك (ل)** : هى الزاوية المحصورة بين رد الفعل المحصل ورد الفعل العمودى عندما يصل الاحتكاك إلى قيمته العظمى ($ح_س$) ومنها : $\boxed{طا \, ل = \frac{ح_س}{ر}}$ أى أن : $\boxed{م_س = طا \, ل}$

✱ **اتزان جسم على مستوٍ أفقى خشن :**

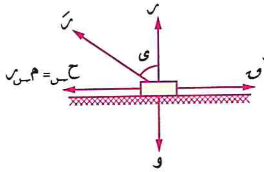
① إذا كانت القوة أفقية :

الجسم ساكن



- معادلتا الاتزان $ر = و$
- ، $ح = ق$
- $ر' = \sqrt{ح^٢ + ر^٢}$
- $ى < ل$

الجسم على وشك الحركة



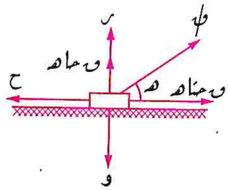
- معادلتا الاتزان $ر = و$
- ، $ق = ح_س = م_س \, ر$
- $ر' = \sqrt{ح_س^٢ + ر^٢}$

$= \sqrt{م_س^٢ ر^٢ + ر^٢} = ر \sqrt{م_س^٢ + ١}$

- $ى = ل$ ، $م_س = طا \, ل$

② إذا كانت القوة مائلة على الأفقى بزاوية قياسها هـ :

الجسم ساكن

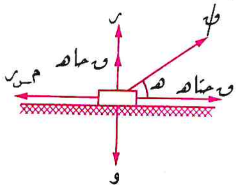


• معادلتا الاتزان

ر + ق جا هـ = و

، ح = ق جتا هـ

الجسم على وشك الحركة



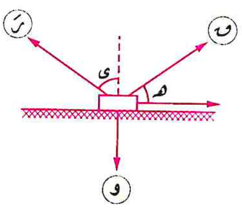
• معادلتا الاتزان

ر + ق جا هـ = و

، $ح_{س}$ = $م_{س}$ ر

= ق جتا هـ

لاحظ أن : الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{ر}$ ، $\overleftarrow{و}$



ولذلك يمكن استخدام قاعدة لامى كالآتى :

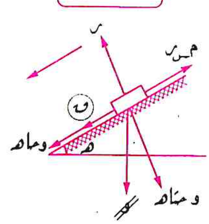
$$\frac{\text{ق}}{\text{جا}\,(١٨٠^\circ - \text{ى})} = \frac{\text{ر}}{\text{جا}\,(٩٠^\circ + \text{هـ})} = \frac{\text{و}}{\text{جا}\,(٩٠^\circ - \text{هـ} + \text{ى})}$$

$$\therefore \boxed{\frac{\text{ق}}{\text{جا ى}} = \frac{\text{ر}}{\text{جتا هـ}} = \frac{\text{و}}{\text{جتا}\,(\text{هـ} - \text{ى})}}$$

✷ اتزان جسم على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ :

① إذا كان الجسم على وشك الحركة لأسفل (على وشك الانزلاق)

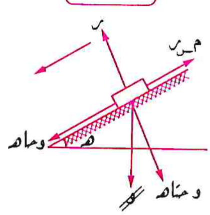
$\boxed{\text{هـ} < \text{ل}}$



• ر = و جتا هـ

• ق + و جا هـ = $م_{س}$ ر

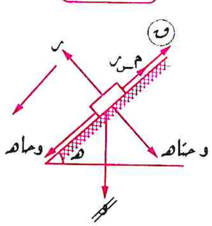
$\boxed{\text{هـ} = \text{ل}}$



• ر = و جتا هـ

• و جا هـ = $م_{س}$ ر

$\boxed{\text{هـ} > \text{ل}}$

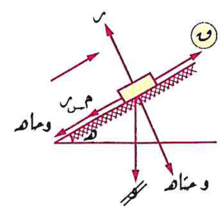


• ر = و جتا هـ

• ق + $م_{س}$ ر = و جا هـ

② إذا كان الجسم على وشك الحركة فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى

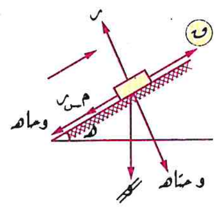
هـ > ل



• ر = و جتا هـ

• ق = $م_{س}$ ر + و جا هـ

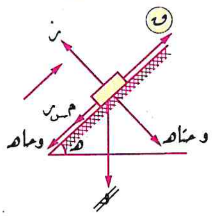
هـ = ل



• ر = و جتا هـ

• ق = $م_{س}$ ر + و جا هـ

هـ < ل



• ر = و جتا هـ

• ق = $م_{س}$ ر + و جا هـ

لاحظ أنه :

① إذا كان الجسم ليس على وشك الحركة فيجب التعرف على الاتجاه الذى يميل الجسم إلى التحرك فيه وذلك بمقارنة مركبة القوة فى اتجاه أكبر ميل للمستوى لأعلى ومركبة الوزن (و جا هـ) وتكون قوة الاحتكاك ح فى عكس اتجاه أكبرهما.

② إذا كان الجسم على وشك الحركة على المستوى المائل تحت تأثير وزنه فقط فإن قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى = قياس زاوية الاحتكاك.

الوحدة الأولى

العزوم

الدرس 1

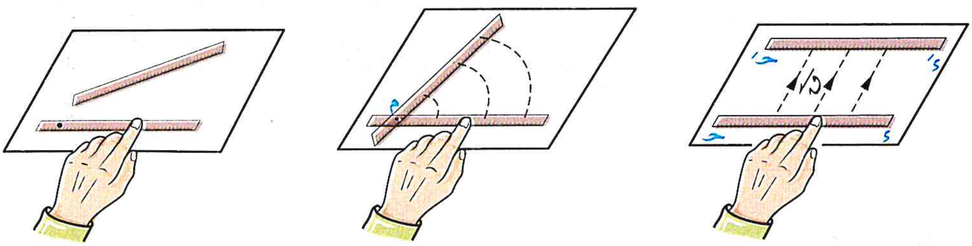
عزم قوة (أو عدة قوى) بالنسبة لنقطة فى نظام إحداثى ثنائى الأبعاد.

الدرس 1
عزم قوة (أو عدة قوى) بالنسبة لنقطة في نظام إحداثي ثنائي الأبعاد

أنواع الحـــركـــة

• إذا أثرت قوة ق على جسم متماسك فإن حركة الجسم تكون إحدى ثلاثة أنواع من الحركة.

(١) الحركة الانتقالية. (٢) الحركة الدورانية. (٣) الحركة التى تجمع بين الحركة الانتقالية والدورانية.



عزم قوة بالنسبة لنقطة

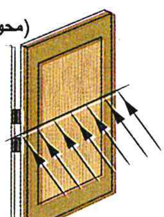
هو كمية متجهة تحدد لنا مقدرة القوة على إحداث دوران للجسم حول نقطة أو محور وتتوقف على عاملين :

(١) معيار (أى مقدار) القوة. (٢) بُعد خط عملها عن مركز أو محور الدوران.

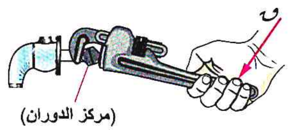
فمثلًا :

• **فى الشكل المقابل :**

عند محاولة فتح أو غلق الباب من نقطة تقترب من خط المفصلات (محور الدوران) فإننا نجد صعوبة فى ذلك أى أننا نحتاج قوة كبيرة لذلك بينما لا نحتاج سوى لقوة صغيرة لدوران الباب كلما ابتعدنا عن خط المفصلات (محور الدوران).

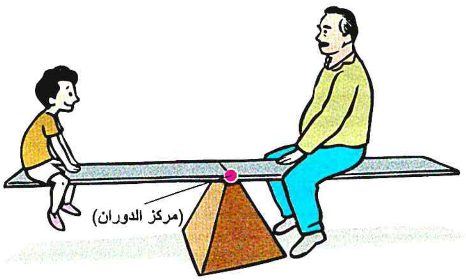


• **فى الشكل المقابل :**



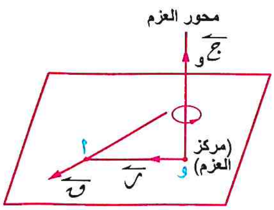
عند محاولة ربط (صامولة) باستخدام (مفتاح إنجليزى) فإننا نجد صعوبة فى ذلك إذا كان ذراع المفتاح قصيرًا بينما لا نحتاج سوى لقوة صغيرة لدوران (الصامولة) كلما كان ذراع المفتاح طويلًا.

• **فى الشكل المقابل :**



لكى يحافظ الأب وابنه على اتزان الأرجوحة لابد أن يكون الأب (الأثقل وزنًا) أكثر قربًا من مركز الدوران من ابنه (الأخف وزنًا) ثم بعد ذلك يمكن للأب أن يبتعد أكثر من مركز الدوران فيعمل على دوران الأرجوحة حيث يرتفع الابن لأعلى أو يقترب أكثر من مركز الدوران فيعمل على دوران الأرجوحة حيث ينخفض الابن لأسفل.

تعريف



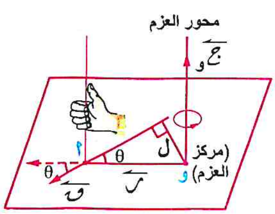
يعرف متجه عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة (و) ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{ج}_{و}$ على أنه الكمية المتجهة $\overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق}$

أى أن : $\overrightarrow{ج}_{و} = \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق}$

حيث $\overrightarrow{ر}$ هو متجه الموضع لأى نقطة أ على خط عمل القوة $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة (و) وتسمى النقطة (و) مركز العزوم ويسمى المستقيم المار بالنقطة (و) عموديًا على المستوى الذى يحتوى القوة $\overrightarrow{ق}$ والنقطة (و) بمحور العزم.

• **اتجاه متجه العزم :**

إذا كانت θ الزاوية الصغرى بين $\overrightarrow{ر}$ ، $\overrightarrow{ق}$ عند رسمهما خارجين من نفس النقطة أو داخلين إلى نفس النقطة يكون متجه العزم $\overrightarrow{ج}_{و}$ عموديًا على المستوى الذى يجمع $\overrightarrow{ر}$ ، $\overrightarrow{ق}$ ويتحدد اتجاهه حسب قاعدة اليد اليمنى عند دوران المتجه $\overrightarrow{ر}$ نحو $\overrightarrow{ق}$ عبر الزاوية θ كالتالى :



، من تعريف الضرب الاتجاهى يكون

، $\overrightarrow{ج}_{و} = \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق} = (ر\ ق\ جا\ \theta)\ \overrightarrow{ى}$

حيث $ر = \|\overrightarrow{ر}\|$ ، $ق = \|\overrightarrow{ق}\|$

$\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة عمودى على المستوى الذى يحوى $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftarrow{\text{ر}}$ فى اتجاه متجه العزم $\overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}}$

* معيار متجه العزم $\| \overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}} \| = \| \overleftarrow{\text{ر}} \times \overleftarrow{\text{ق}} \| = \text{ر ق جا } \theta$

$\therefore \boxed{\| \overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}} \| = \text{ر ق جا } \theta}$ حيث $\text{ر} = \| \overleftarrow{\text{ر}} \|$ ، $\text{ق} = \| \overleftarrow{\text{ق}} \|$

* وإذا كان ل هو طول العمود الساقط من و على خط عمل $\overleftarrow{\text{ق}}$ فإن : $\text{ل} = \text{ر جا } \theta$

$\because \| \overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}} \| = \text{ق (ر جا } \theta)$ $\therefore \boxed{\| \overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}} \| = \text{ق ل}}$ أى أن : $\overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}} = (\text{ق ل})\ \overleftarrow{\text{ى}}$

ملاحظتان

(١) $\because$ معيار عزم $\overleftarrow{\text{ق}}$ بالنسبة إلى و $= \text{ق} \times \text{ل}$

$\therefore$ وحدة معيار العزم = وحدة معيار القوة × وحدة الطول

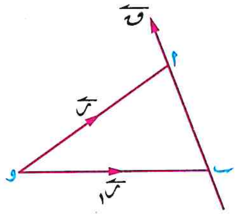
مثل : نيوتن. متر ، داين. سم ، .....

(٢) $\text{ل} = \dfrac{\| \overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}} \|}{\text{ق}}$ أى أن : طول العمود الساقط من و على خط عمل $\overleftarrow{\text{ق}}$ = $\dfrac{\text{معيار متجه العزم } \overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}}}{\text{معيار القوة } \overleftarrow{\text{ق}}}$

ملاحظة

عزم قوة بالنسبة لنقطة ثابت لا يتوقف على موضع نقطة تأثير القوة على خط عمل $\overleftarrow{\text{ق}}$

الإثبات : بفرض أن أ ، ب نقطتان على خط عمل القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftarrow{\text{ر}}$ هو متجه موضع النقطة أ بالنسبة إلى النقطة و ، $\overleftarrow{\text{ر}}_{١}$ هو متجه موضع النقطة ب بالنسبة إلى النقطة و



$\therefore \overleftarrow{\text{ر}}_{١} = \overleftarrow{\text{و ب}} = \overleftarrow{\text{و أ}} + \overleftarrow{\text{أ ب}} = \overleftarrow{\text{ر}} + \overleftarrow{\text{أ ب}}$

$\therefore \overleftarrow{\text{ر}}_{١} \times \overleftarrow{\text{ق}} = (\overleftarrow{\text{ر}} + \overleftarrow{\text{أ ب}}) \times \overleftarrow{\text{ق}}$

$= \overleftarrow{\text{ر}} \times \overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{أ ب}} \times \overleftarrow{\text{ق}}$ (خاصية التوزيع)

$= \overleftarrow{\text{ر}} \times \overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{0}$ (لأن $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ يوازى $\overleftarrow{\text{ق}}$)

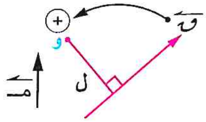
$\therefore \overleftarrow{\text{ر}}_{١} \times \overleftarrow{\text{ق}} = \overleftarrow{\text{ر}} \times \overleftarrow{\text{ق}} = \overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}}$

(وهو المطلوب)

القياس الجبرى لمتجه العزم

إذا حددنا متجه وحدة ثابت $\overleftarrow{\text{م}}$ عمودى على المستوى الذى تعيناه خط عمل $\overleftarrow{\text{ق}}$ والنقطة «و» فإنه يمكن التعبير عن متجه العزم $\overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}}$ منسوبًا لمتجه $\overleftarrow{\text{م}}$ كالآتى :

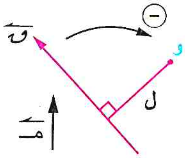
$\overleftarrow{ج}_{و} = ج_{و}\ \overleftarrow{م}$ حيث $ج_{و}$ يسمى القياس الجبرى لمتجه العزم $\overleftarrow{ج}_{و}$ ويكون



(١) $ج_{و} = ق\ ل$ «موجب» أى أن : $\overleftarrow{ج}_{و} = (ق\ ل)\ \overleftarrow{م}$

إذا كان : • $\overleftarrow{ج}_{و}$ فى اتجاه $\overleftarrow{م}$

• القوة $\overleftarrow{ق}$ تعمل على الدوران حول «و» فى اتجاه ضد اتجاه حركة عقارب الساعة



(٢) $ج_{و} = -\ ق\ ل$ «سالب» أى أن : $\overleftarrow{ج}_{و} = (-\ ق\ ل)\ \overleftarrow{م}$

إذا كان : • $\overleftarrow{ج}_{و}$ فى عكس اتجاه $\overleftarrow{م}$

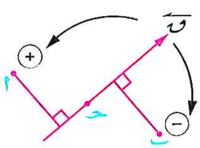
• القوة $\overleftarrow{ق}$ تعمل على الدوران حول «و» فى اتجاه مع اتجاه حركة عقارب الساعة

(٣) $ج_{و} =$ صفر أى أن : $\overleftarrow{ج}_{و} = \overleftarrow{0}$ إذا كان خط عمل $\overleftarrow{ق}$ يمر بالنقطة «و».

ملاحظات

(١) يطلق اسم «ذراع العزم» على طول العمود (ل) الساقط من النقطة و على خط عمل القوة $\overleftarrow{ق}$

(٢) القياس الجبرى لعزم القوة الواحدة قد يكون موجبًا حول نقطة وسالبًا حول نقطة أخرى وصفرًا حول نقطة ثالثة.



فى الشكل المقابل : $ج_{أ}$ (موجب) ، $ج_{ب}$ (سالب) ، $ج_{حـ} =$ صفر

(٣) لاحظ الفرق بين : $\overleftarrow{ج}_{و}$ ، $ج_{و}$ ، $\|\overleftarrow{ج}_{و}\|$

• $\overleftarrow{ج}_{و}$: متجه العزم حيث

$$\overleftarrow{ج}_{و} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق} = \begin{cases} (ق\ ل)\ \overleftarrow{م} & \text{إذا كان الدوران فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة} \\ (-\ ق\ ل)\ \overleftarrow{م} & \text{إذا كان الدوران فى نفس اتجاه دوران عقارب الساعة} \end{cases}$$

• $ج_{و}$: القياس الجبرى لمتجه العزم حيث $ج_{و} = ق \times ل$ أو $-\ ق \times ل$ أو صفر كما ذكرنا سابقًا

• $\|\overleftarrow{ج}_{و}\|$: معيار متجه العزم وهو كمية موجبة دائمًا

حيث $\|\overleftarrow{ج}_{و}\| = \|\overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق}\|$ أو $\|\overleftarrow{ج}_{و}\| = |ج_{و}|$

④ إذا كانت $\{\overrightarrow{س} ، \overrightarrow{ص} ، \overrightarrow{ع}\}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة ، «و» نقطة الأصل وإذا أثرت قوة $\overrightarrow{ق} = أ_١ \overrightarrow{س} + ب_١ \overrightarrow{ص}$ عند النقطة حـ $(أ_٢ ، ب_٢)$

فإن : $\overrightarrow{ج}_و = \overrightarrow{وح} \times \overrightarrow{ق}$

$= (أ_٢ \overrightarrow{س} + ب_٢ \overrightarrow{ص}) \times (أ_١ \overrightarrow{س} + ب_١ \overrightarrow{ص})$

$= (أ_٢ ب_١ - أ_١ ب_٢) \overrightarrow{ع}$

ويكون : $ج_و$ (القياس الجبرى لعزم $\overrightarrow{ق}$ حول و) $= أ_٢ ب_١ - أ_١ ب_٢$

فمثلًا : إذا كانت : $\overrightarrow{ق} = ٣ \overrightarrow{س} - ٤ \overrightarrow{ص}$ تؤثر فى أ (٢ ، ٣)

فإن : $\overrightarrow{ج}_و = \overrightarrow{وأ} \times \overrightarrow{ق} = (٢ \overrightarrow{س} + ٣ \overrightarrow{ص}) \times (٣ \overrightarrow{س} - ٤ \overrightarrow{ص})$

$= (٢ \times (-٤) - ٣ \times ٣) \overrightarrow{ع} = -١٧ \overrightarrow{ع}$

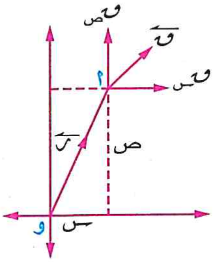
$\therefore$ $ج_و$ (القياس الجبرى لعزم $\overrightarrow{ق}$ حول و) $= -١٧$

مبدأ العزوم (نظرية فارينون)

عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة لنقطة يساوى مجموع عزوم مركبات هذه القوة بالنسبة لنفس النقطة.

بفرض القوة $\overrightarrow{ق} = ق_س \overrightarrow{س} + ق_ص \overrightarrow{ص}$ تؤثر فى نقطة أ

متجه موضعها بالنسبة للنقطة و هو $\overrightarrow{ر} = (س ، ص)$ فإن :



$\overrightarrow{ج}_و = \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق} = (س ، ص) \times (ق_س ، ق_ص)$

$= (س ق_ص) \overrightarrow{ع} + (- ص ق_س) \overrightarrow{ع}$

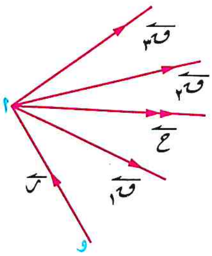
$=$ عزم $ق_ص$ حول و + عزم $ق_س$ حول و

القوى المستوية

القوى المستوية هى القوى التى خطوط عملها تقع جميعًا فى مستوى واحد وبالتالى فإن متجهات عزوم هذه القوى تكون متوازية وفى اتجاه عمودى على مستوى هذه القوى.

نظرية العزوم

مجموع عزوم عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة بالنسبة لأية نقطة فى الفراغ يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة.



البرهان :

نفرض أن $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ ، ... ، $\overrightarrow{ق_ن}$ مجموعة من القوى

وأن خطوط عملها تتلاقى جميعًا فى نقطة أ

وأن (و) أية نقطة أخرى فى الفراغ

$\therefore$ $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{وأ}$ هو متجه موضع للنقطة أ بالنسبة إلى (و) لجميع القوى

$\therefore$ $\overrightarrow{ج_و} = \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق_2} + \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق_3} + ... + \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق_ن}$

$= \overrightarrow{ر} \times (\overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} + \overrightarrow{ق_3} + ... + \overrightarrow{ق_ن})$ (خاصية التوزيع)

$= \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ح}$ حيث $\overrightarrow{ح}$ متجه المحصلة لمجموعة القوى

، $\because$ خط عمل المحصلة يمر بالنقطة أ أيضًا

$\therefore$ $\overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ح}$ هو عزم المحصلة بالنسبة للنقطة (و)

$\therefore$ مجموع عزوم القوى حول (و) = عزم محصلة هذه القوى حول (و) (وهو المطلوب)

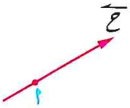
النظرية العامة للعزوم

المجموع الجبرى لعزوم مجموعة من القوى حول نقطة ما يساوى عزم المحصلة حول نفس النقطة.

نتيجتان

(١) المجموع الجبرى لعزوم مجموعة من القوى حول أى نقطة على خط عمل المحصلة = صفر

أى أن : إذا كانت أ $\in$ خط عمل المحصلة ($\overrightarrow{ح}$) فإن : $\overrightarrow{ج_أ}$ = صفر



(٢) إذا كان المجموع الجبرى لعزوم مجموعة من القوى حول نقطة يساوى صفر

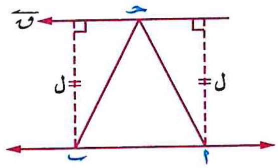
فإما أن يكون مقدار المحصلة يساوى صفر أو خط عملها يمر بهذه النقطة.

أى أن : إذا كان $\overrightarrow{ج_أ}$ = صفر

فإما مقدار المحصلة (ح) = صفر أو أ $\in$ خط عمل المحصلة ($\overrightarrow{ح}$)

ملاحظات

① إذا كان عزم قوة $\overleftarrow{ق}$ حول نقطة أ = عزمها حول نقطة ب $\neq \overleftarrow{0}$

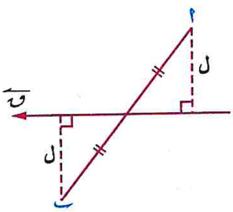


أى : $\overleftarrow{ج_{أ}} = \overleftarrow{ج_{ب}} \neq \overleftarrow{0}$ فإن : خط عمل $\overleftarrow{ق}$ // $\overleftrightarrow{أب}$

وبصفة عامة : إذا كان مجموع عزوم عدة قوى مستوية حول أ = مجموع عزوم هذه القوى حول ب $\neq \overleftarrow{0}$ فإن خط عمل المحصلة // $\overleftrightarrow{أب}$

أى أن : إذا كان : $\overleftarrow{ج_{أ}} = \overleftarrow{ج_{ب}} \neq \overleftarrow{0}$ فإن : خط عمل $\overleftarrow{ح}$ (المحصلة) // $\overleftrightarrow{أب}$

② إذا كان عزم قوة $\overleftarrow{ق}$ حول نقطة أ = − (عزمها حول نقطة ب) $\neq \overleftarrow{0}$



أى : $\overleftarrow{ج_{أ}} = -\overleftarrow{ج_{ب}} \neq \overleftarrow{0}$ فإن : خط عمل $\overleftarrow{ق}$ ينصف $\overline{أب}$

وبصفة عامة : إذا كان مجموع عزوم عدة قوى مستوية حول أ = − مجموع عزوم هذه القوى حول ب $\neq \overleftarrow{0}$ فإن خط عمل المحصلة ينصف $\overline{أب}$

أى أن : إذا كان : $\overleftarrow{ج_{أ}} = -\overleftarrow{ج_{ب}} \neq \overleftarrow{0}$ فإن : خط عمل $\overleftarrow{ح}$ (المحصلة) ينصف $\overline{أب}$

مثال ①

إذا كانت القوة $\overleftarrow{ق} = ٤\,\overleftarrow{س} - ٣\,\overleftarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة أ = (٢ ، ٣)

فأوجد متجه عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة إلى :

① نقطة الأصل (و) ② النقطة ب = (−١ ، ٢)

الحل

① $\because \overleftarrow{وأ} = ٢\,\overleftarrow{س} + ٣\,\overleftarrow{ص}$ ، $\because \overleftarrow{ج_{و}} = \overleftarrow{وأ} \times \overleftarrow{ق}$

$\therefore \overleftarrow{ج_{و}} = (٢\,\overleftarrow{س} + ٣\,\overleftarrow{ص}) \times (٤\,\overleftarrow{س} - ٣\,\overleftarrow{ص})$

$= (٢ \times (-٣) - ٣ \times ٤)\,\overleftarrow{ع} = -١٨\,\overleftarrow{ع}$

② $\because \overleftarrow{بأ} = \overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب} = (٢\,\overleftarrow{س} + ٣\,\overleftarrow{ص}) - (-\overleftarrow{س} + ٢\,\overleftarrow{ص}) = (٣\,\overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص})$

، $\because \overleftarrow{ج_{ب}} = \overleftarrow{بأ} \times \overleftarrow{ق}$

$\therefore \overleftarrow{ج_{ب}} = (٣\,\overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص}) \times (٤\,\overleftarrow{س} - ٣\,\overleftarrow{ص}) = (٣ \times (-٣) - ١ \times ٤)\,\overleftarrow{ع} = -١٣\,\overleftarrow{ع}$

مثال ٢

إذا كانت القوة $\overrightarrow{ق} = ٣\,\overrightarrow{س} - ٤\,\overrightarrow{ص}$ تؤثر فى نقطة أ = (٢ ، -١)
فأوجد باستخدام العزوم طول العمود الساقط من النقطة ب = (٨ ، -٤) على خط عمل هذه القوة.

الحـــل

∵ $\overrightarrow{ب أ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} = (٢\,\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}) - (٨\,\overrightarrow{س} - ٤\,\overrightarrow{ص}) = (-٦\,\overrightarrow{س} + ٣\,\overrightarrow{ص})$

∴ $\overrightarrow{جـ_{ب}} = \overrightarrow{ب أ} \times \overrightarrow{ق} = (-٦\,\overrightarrow{س} + ٣\,\overrightarrow{ص}) \times (٣\,\overrightarrow{س} - ٤\,\overrightarrow{ص})$

$= [(-٦) \times (-٤) - ٣ \times ٣]\,\overrightarrow{ع} = ١٥\,\overrightarrow{ع}$ ∴ $\|\overrightarrow{جـ_{ب}}\| = ١٥$

، ∵ $\|\overrightarrow{ق}\| = \sqrt{(٣)^٢ + (-٤)^٢} = ٥$

∴ ل (طول العمود الساقط من ب على خط عمل $\overrightarrow{ق}$) $= \dfrac{\|\overrightarrow{جـ_{ب}}\|}{\|\overrightarrow{ق}\|} = \dfrac{١٥}{٥} = ٣$ وحدات طول.

مثال ٣

تؤثر القوة : $\overrightarrow{ق_١} = \overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = ٤\,\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٣} = -٢\,\overrightarrow{س} - ٢\,\overrightarrow{ص}$
فى النقطة أ = (-٤ ، ١) فإذا كانت : ب = (-١ ، ٢) ، حـ = (٢ ، ٠) ، ء = (-٤ ، -٢)

فأثبت باستخدام العزوم أن خط عمل المحصلة :

(١) يوازى $\overleftrightarrow{ب حـ}$ (٢) يمر بمنتصف $\overline{حـ ء}$

الحـــل

(١) ∵ $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢} + \overrightarrow{ق_٣} = (\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}) + (٤\,\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}) + (-٢\,\overrightarrow{س} - ٢\,\overrightarrow{ص})$

$= ٣\,\overrightarrow{س} - ٢\,\overrightarrow{ص}$

∵ $\overrightarrow{ب أ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} = (-٤\,\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}) - (-\overrightarrow{س} + ٢\,\overrightarrow{ص}) = -٣\,\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}$

∴ $\overrightarrow{جـ_{ب}} = \overrightarrow{ب أ} \times \overrightarrow{ح} = (-٣\,\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}) \times (٣\,\overrightarrow{س} - ٢\,\overrightarrow{ص}) = (٦ + ٣)\,\overrightarrow{ع} = ٩\,\overrightarrow{ع}$

، ∵ $\overrightarrow{حـ أ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{حـ} = (-٤\,\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}) - (٢\,\overrightarrow{س}) = -٦\,\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$

∴ $\overrightarrow{جـ_{حـ}} = \overrightarrow{حـ أ} \times \overrightarrow{ح} = (-٦\,\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}) \times (٣\,\overrightarrow{س} - ٢\,\overrightarrow{ص}) = (١٢ - ٣)\,\overrightarrow{ع} = ٩\,\overrightarrow{ع}$

∵ $\overrightarrow{جـ_{ب}} = \overrightarrow{جـ_{حـ}}$ ∴ خط عمل المحصلة يوازى $\overleftrightarrow{ب حـ}$

(٢) ∵ $\overrightarrow{جـ_{حـ}} = ٩\,\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ء أ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ء} = (-٤\,\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}) - (-٤\,\overrightarrow{س} - ٢\,\overrightarrow{ص}) = ٣\,\overrightarrow{ص}$

∴ $\overrightarrow{جـ_{ء}} = \overrightarrow{ء أ} \times \overrightarrow{ح} = ٣\,\overrightarrow{ص} \times (٣\,\overrightarrow{س} - ٢\,\overrightarrow{ص}) = (٠ - ٩)\,\overrightarrow{ع} = -٩\,\overrightarrow{ع}$

∵ $\overrightarrow{جـ_{حـ}} = -\overrightarrow{جـ_{ء}}$ ∴ خط عمل المحصلة يمر بمنتصف $\overline{حـ ء}$

حل آخر :

بفرض هـ منتصف $\overline{\text{حـ ء}}$ ∴ هـ $= \left(\frac{٢ + (-٤)}{٢} ، \frac{٠ + (-٢)}{٢}\right) = (-١ ، -١)$

∴ $\overrightarrow{\text{هـ أ}} = \overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{هـ}} = (-٤\, \overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}}) - (-\overrightarrow{\text{س}} - \overrightarrow{\text{ص}}) = -٣\, \overrightarrow{\text{س}} + ٢\, \overrightarrow{\text{ص}}$

، ∵ $\overrightarrow{\text{جـ}}_{\text{هـ}} = \overrightarrow{\text{هـ أ}} \times \overrightarrow{\text{ح}} = (-٣\, \overrightarrow{\text{س}} + ٢\, \overrightarrow{\text{ص}}) \times (٣\, \overrightarrow{\text{س}} - ٢\, \overrightarrow{\text{ص}}) = (٦ - ٦)\, \overrightarrow{\text{ع}} = \overrightarrow{٠}$

∴ هـ ∈ خط عمل المحصلة ∴ خط عمل المحصلة يمر بمنتصف $\overline{\text{حـ ء}}$

مثال ٤

قوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ معيارها $١٠\sqrt{٢}$ نيوتن وتعمل فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أب}}$ حيث : أ (٤ ، ٤) ، ب(٥ ، ٣)
أوجد متجه القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ ومتجه عزم $\overrightarrow{\text{ق}}$ بالنسبة لنقطة الأصل.

الحل

∵ $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (٥ ، ٣) - (٤ ، ٤) = (١ ، -١)$ ∴ $\|\overrightarrow{\text{أب}}\| = \sqrt{١ + ١} = \sqrt{٢}$

، ∵ $\overrightarrow{\text{ق}} = \|\overrightarrow{\text{ق}}\| \times$ متجه وحدة فى اتجاه القوة

∴ $\overrightarrow{\text{ق}} = \text{ق} \times \frac{\overrightarrow{\text{أب}}}{\|\overrightarrow{\text{أب}}\|} = ١٠\sqrt{٢} \times \frac{(١ ، -١)}{\sqrt{٢}} = (١٠ ، -١٠)$ ∴ $\overrightarrow{\text{ق}} = ١٠\, \overrightarrow{\text{س}} - ١٠\, \overrightarrow{\text{ص}}$

∴ $\overrightarrow{\text{جـ}}_{\text{و}} = \overrightarrow{\text{و أ}} \times \overrightarrow{\text{ق}} = (٤ ، ٤) \times (١٠ ، -١٠) = (٤ \times -١٠ - ٤ \times ١٠)\, \overrightarrow{\text{ع}} = -٨٠\, \overrightarrow{\text{ع}}$

مثال ٥

تؤثر القوتان : $\overrightarrow{\text{ق}}_{١} = ٧\, \overrightarrow{\text{س}} + ٢\, \overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_{٢} = \text{ل}\, \overrightarrow{\text{س}} + \text{م}\, \overrightarrow{\text{ص}}$ فى النقطة أ (١ ، ٤) وكان متجه عزم محصلتهما بالنسبة للنقطة و (٠ ، ٠) يساوى $-٤٢\, \overrightarrow{\text{ع}}$ ومتجه عزم محصلتهما بالنسبة للنقطة ب(١ ، ٥) يساوى $١٠\, \overrightarrow{\text{ع}}$ أوجد قيمتى ل ، م ثم عيِّن معيار المحصلة وطول العمود النازل من ب على خط عمل المحصلة.

الحل

∵ $\overrightarrow{\text{ح}} = \overrightarrow{\text{ق}}_{١} + \overrightarrow{\text{ق}}_{٢} = (٧ ، ٢) + (\text{ل} ، \text{م}) = (٧ + \text{ل} ، ٢ + \text{م})$

، ∵ $\overrightarrow{\text{جـ}}_{\text{و}} = \overrightarrow{\text{و أ}} \times \overrightarrow{\text{ح}} = (١ ، ٤) \times (٧ + \text{ل} ، ٢ + \text{م}) = \big((٢ + \text{م}) - ٤\,(٧ + \text{ل})\big)\, \overrightarrow{\text{ع}}$

$= (\text{م} - ٤\,\text{ل} - ٢٦)\, \overrightarrow{\text{ع}}$

، ∵ $\overrightarrow{\text{جـ}}_{\text{و}} = -٤٢\, \overrightarrow{\text{ع}}$ ∴ م − ٤ ل − ٢٦ = −٤٢ ∴ م − ٤ ل = −١٦ (١)

، ∵ $\overrightarrow{\text{ب أ}} = \overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}} = (١ ، ٤) - (١ ، ٥) = (٠ ، -١)$

∴ $\overrightarrow{ج}_{ب}$ = $\overrightarrow{ب أ}$ × $\overrightarrow{ح}$ = (٠ ، −١) × (٧ + ل ، ٢ + م) = (٧ + ل) $\overrightarrow{ع}$

، ∵ $\overrightarrow{ج}_{ب}$ = ١٠ $\overrightarrow{ع}$ ∴ ٧ + ل = ١٠ ∴ ل = ٣

وبالتعويض فى (١) : ∴ م = −٤ ∴ $\overrightarrow{ح}$ = ١٠ $\overrightarrow{س}$ − ٢ $\overrightarrow{ص}$

∴ ‖$\overrightarrow{ح}$‖ = $\sqrt{١٠٠ + ٤}$ = $\sqrt{١٠٤}$ = ٢ $\sqrt{٢٦}$ وحدة قوة

، طول العمود = $\frac{\|\overrightarrow{ج}_{ب}\|}{\|\overrightarrow{ح}\|}$ = $\frac{١٠}{٢\sqrt{٢٦}}$ = $\frac{٥\sqrt{٢٦}}{٢٦}$ وحدة طول.

مثال ٦

إذا كانت $\overrightarrow{ق}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$ وكان عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ حول نقطة الأصل = ١٦ $\overrightarrow{ع}$

أوجد عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ حول النقطة ب حيث ب = (−١ ، ٥)

الحل

نفرض أن أ (س ، ص) هى نقطة تأثير القوة $\overrightarrow{ق}$

$\overrightarrow{ج}_{و}$ = $\overrightarrow{و أ}$ × $\overrightarrow{ق}$ = (س ، ص) × (٣ ، ٤)

= (٤ س − ٣ ص) $\overrightarrow{ع}$

، ∵ $\overrightarrow{ج}_{و}$ = ١٦ $\overrightarrow{ع}$

∴ ٤ س − ٣ ص = ١٦ (١)

، ∵ $\overrightarrow{ج}_{ب}$ = $\overrightarrow{ب أ}$ × $\overrightarrow{ق}$ = ($\overrightarrow{أ}$ − $\overrightarrow{ب}$) × $\overrightarrow{ق}$

= (س + ١ ، ص − ٥) × (٣ ، ٤)

= (٤ س + ٤ − ٣ ص + ١٥) $\overrightarrow{ع}$

= (٤ س − ٣ ص + ١٩) $\overrightarrow{ع}$

وبالتعويض من (١) : ∴ $\overrightarrow{ج}_{ب}$ = (١٦ + ١٩) $\overrightarrow{ع}$ = ٣٥ $\overrightarrow{ع}$

لاحظ أن

عندما تكون نقطة تأثير القوة مجهولة :

نفرض أن خط عمل القوة يقطع محور السينات فى أ (س ، ٠) ما لم تكن القوة موازية لمحور السينات

أو

نفرض أن خط عمل القوة يقطع محور الصادات فى أ (٠ ، ص) ما لم تكن القوة موازية لمحور الصادات

أو

نفرض أن نقطة تأثير القوة هى أ (س ، ص)

لاحظ أن

المعادلة (١) تسمى معادلة خط عمل القوة $\overrightarrow{ق}$

حل آخر :

نفرض أن : أ (س ، ص) هى نقطة تأثير القوة $\overrightarrow{ق}$

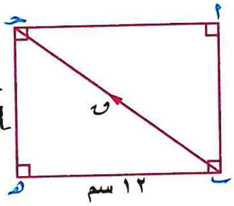
∴ $\overrightarrow{ج}_{ب}$ = $\overrightarrow{ب أ}$ × $\overrightarrow{ق}$ = ($\overrightarrow{ب و}$ + $\overrightarrow{و أ}$) × $\overrightarrow{ق}$ = $\overrightarrow{ب و}$ × $\overrightarrow{ق}$ + $\overrightarrow{و أ}$ × $\overrightarrow{ق}$

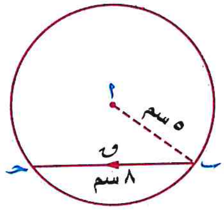
= (١ ، −٥) × (٣ ، ٤) + $\overrightarrow{ج}_{و}$

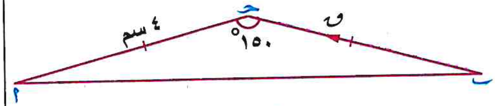
= (٤ + ١٥) $\overrightarrow{ع}$ + ١٦ $\overrightarrow{ع}$ = ٣٥ $\overrightarrow{ع}$

مثال ٧

في كل من الأشكال الآتية أوجد القياس الجبرى لعزم القوة التى معيارها ق = ١٥ نيوتن حول النقطة ا


شكل (١)


شكل (٢)

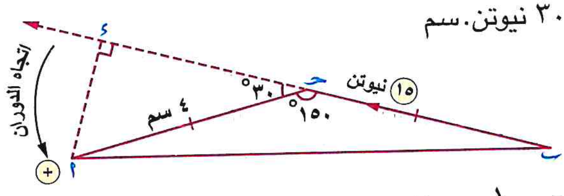

شكل (٣)

الحل

شكل (١) : نرسم $\overline{اء} \perp \overleftarrow{بحـ}$ ∴ ل (ذراع القوة) = اء

∴ ل = احـ جا (∠ احـ ء) = ٤ × جا ٣٠° = ٤ × $\frac{١}{٢}$ = ٢ سم

∴ $جـ_ا$ = ق × ل = ١٥ × ٢ = ٣٠ نيوتن.سم



حل آخر :

$جـ_ا$ = ‖$\overrightarrow{ق}$‖ ‖$\overrightarrow{احـ}$‖ جا هـ

= ١٥ × ٤ × جا ١٥٠° = ٦٠ × $\frac{١}{٢}$ = ٣٠ نيوتن.سم.

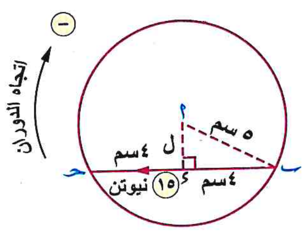
شكل (٢) : نرسم $\overline{اء} \perp \overline{بحـ}$

∴ ء منتصف $\overline{بحـ}$

∴ ل (ذراع القوة) = اء

∴ ل = $\sqrt{٢٥ - ١٦}$ = ٣ سم

∴ $جـ_ا$ = − ق × ل = −١٥ × ٣ = −٤٥ نيوتن.سم.



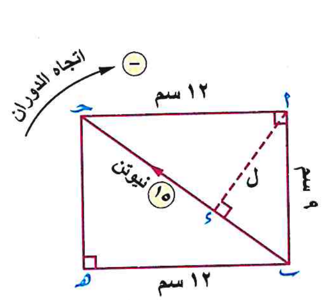
شكل (٣) : نرسم $\overline{اء} \perp \overline{بحـ}$

∴ ل (ذراع القوة) = اء

، ∵ بحـ = $\sqrt{٨١ + ١٤٤}$ = ١٥ سم

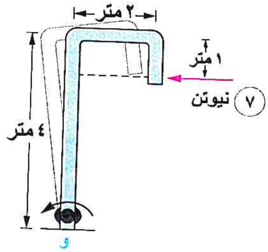
∴ ل = $\frac{اب \times احـ}{بحـ}$ = $\frac{٩ \times ١٢}{١٥}$ = ٧,٢ سم

∴ $جـ_ا$ = − ق × ل = −١٥ × ٧,٢ = −١٠٨ نيوتن.سم.

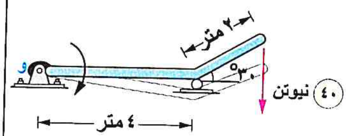


مثال ٨

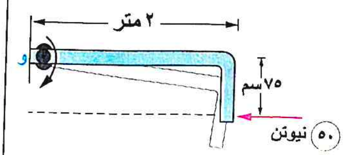
في كل من الأشكال الآتية أوجد القياس الجبرى لعزم القوة حول النقطة (و) مقدر بالنيوتن . متر



شكل (٣)



شكل (٢)



شكل (١)

الحـــل

(١) $ج_و = - ق ل = - ٥٠ \times ٠,٧٥ = - ٣٧,٥$ نيوتن . متر

(٢) $ج_و = - ق ل = - ٤٠ \times (٤ + ٢ \text{ جتا } ٣٠°) \approx - ٢٢٩$ نيوتن . متر

(٣) $ج_و = ق ل = ٧ \times (٤ - ١) = ٢١$ نيوتن . متر

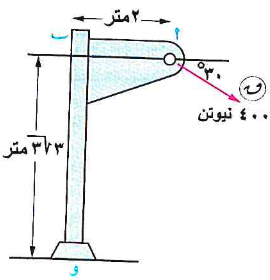
مثال ٩

في الشكل المقابل :

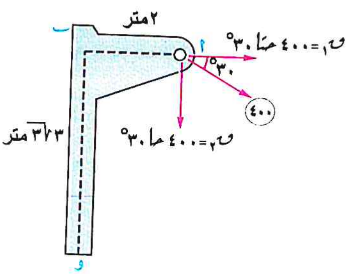
إذا كانت $ق = ٤٠٠$ نيوتن

أوجد القياس الجبرى لعزم القوة $(\overleftarrow{ق})$

بالنسبة للنقطة (و)



الحـــل



* بتحليل القوة ٤٠٠ نيوتن إلى مركبتين

$ق_١ = ٤٠٠ \text{ جتا } ٣٠° = ٢٠٠ \sqrt{٣}$ نيوتن

، $ق_٢ = ٤٠٠ \text{ جا } ٣٠° = ٢٠٠$ نيوتن

وباستخدام مبدأ العزوم نجد أن :

$ج_و = - ق_١ \times و ب - ق_٢ \times أ ب = - ٢٠٠ \sqrt{٣} \times ٣ \sqrt{٣} - ٢٠٠ \times ٢ = - ٢٢٠٠$ نيوتن . متر

حل آخر :

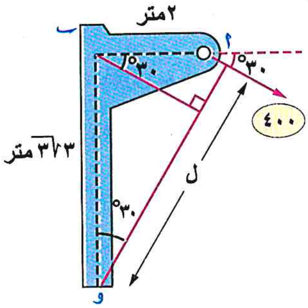
∵ طول العمود الساقط من (و) على

خط عمل القوة (٤٠٠ نيوتن) = ل

حيث : ل = ٣ √٣ جتا ٣٠° + ٢ جا ٣٠° = ٥ $\frac{١}{٢}$ متر

∴ $ع_{و}$ = − ق × ل = − ٤٠٠ × ٥ $\frac{١}{٢}$

= − ٢٢٠٠ نيوتن.متر



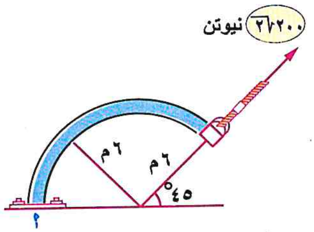
ملاحظة

الحل باستخدام مبدأ العزوم أسهل.

مثال ١٠

في الشكل المقابل :

أوجد القياس الجبرى لعزم القوة ٢٠٠ √٢ نيوتن حول النقطة أ



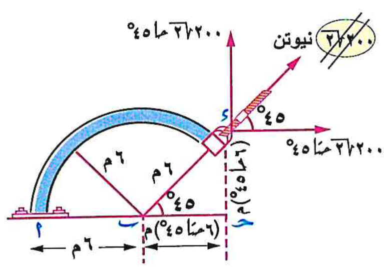
الحل

* نحلل القوة ٢٠٠ √٢ إلى القوتين :

(٢٠٠ √٢ جتا ٤٥° = ٢٠٠ نيوتن)

، (٢٠٠ √٢ جا ٤٥° = ٢٠٠ نيوتن)

وباستخدام مبدأ العزوم نجد أن :



$ع_{أ}$ = − ٢٠٠ × حـ ء + ٢٠٠ × أ حـ

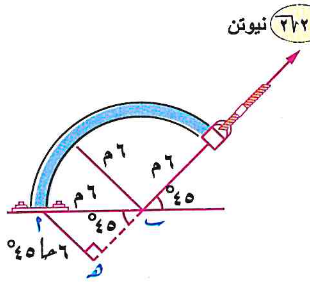
= − ٢٠٠ × [٦ جا ٤٥°] + ٢٠٠ [٦ + ٦ جتا ٤٥°]

= − ٦٠٠ √٢ + ١٢٠٠ + ٦٠٠ √٢ = ١٢٠٠ نيوتن.متر.

حل آخر:

(بدون استخدام مبدأ العزوم)

من هندسة الشكل المقابل نجد أن :



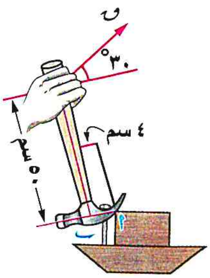
$ع_{أ}$ = ٢٠٠ √٢ × ٦ جا ٤٥° = ١٢٠٠ نيوتن.متر.

ملاحظة

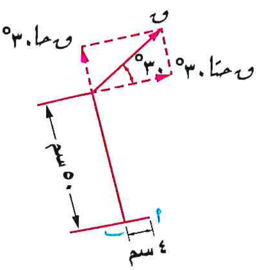
الحل بدون استخدام مبدأ العزوم أقصر.

مثال ١١

الشكل المقابل يوضح القوة ق اللازمة لنزع مسمار عن ب إذا كان القياس الجبرى لعزم القوة حول نقطة أ اللازمة لنزع المسمار يساوى ٧٠ نيوتن.متر. مع اتجاه عقارب الساعة. أوجد معيار القوة ق



الحـــل



بتحليل القوة ق إلى مركبتين ق جتا ٣٠° ، ق جا ٣٠°

، ∵ جم = −٧٠

∴ − ق جتا ٣٠° × ٠,٥ − ق جا ٣٠° × ٠,٠٤ = −٧٠

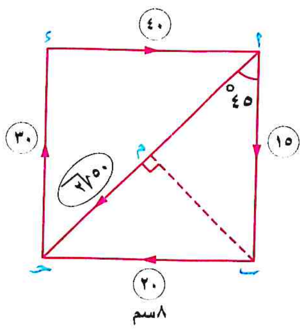
∴ ق = $\dfrac{٧٠}{٠,٥ \text{ جتا } ٣٠° + ٠,٠٤ \text{ جا } ٣٠°}$ ≃ ١٥٥ نيوتن.

مثال ١٢

أ ب حـ د مربع طول ضلعه ٨ سم تؤثر قوى مقاديرها ١٥ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ٤٠ ، ٥٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن فى $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ د}}$ ، $\overleftarrow{\text{د أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ على الترتيب.

احسب المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول الرأس ب

الحـــل



∵ القوتان اللتان مقداراهما ١٥ ، ٢٠ نيوتن

خطا عملهما يمران بالنقطة ب

∴ القياس الجبرى لعزم كل منهما بالنسبة للنقطة ب = صفر

∵ ذراع القوة التى مقدارها ٣٠ نيوتن = ب حـ = ٨ سم

∴ القياس الجبرى لعزم القوة التى مقدارها ٣٠ نيوتن = −٣٠ × ٨ = −٢٤٠ نيوتن.سم

∵ ذراع القوة التى مقدارها ٤٠ نيوتن = ب أ = ٨ سم

∴ القياس الجبرى لعزم القوة التى مقدارها ٤٠ نيوتن = −٤٠ × ٨ = −٣٢٠ نيوتن.سم

∵ ذراع القوة التى مقدارها ٥٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن = ب م = ب أ جا ٤٥° = ٨ × $\dfrac{\sqrt{٢}}{٢}$ = ٤ $\sqrt{٢}$ سم

∴ القياس الجبرى لعزم القوة التى مقدارها ٥٠ √٢ نيوتن = ٥٠ √٢ × ٤ √٢ = ٤٠٠ نيوتن.سم

∴ المجموع الجبرى لعزوم القوى حول ب (جـ ب) = −٢٤٠ − ٣٢٠ + ٤٠٠ = −١٦٠ نيوتن.سم.

ملاحظة

فى المثال السابق :

رسم المربع أ ب حـ ء بحيث كان الاتجاه الدورانى لرءوسه فى اتجاه دوران عقارب الساعة فإذا رسم المربع بحيث كان الاتجاه الدورانى لرؤوسه فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة لكان المجموع الجبرى لعزوم القوى حول ب (جـ ب) = ١٦٠ نيوتن.سم أى تتغير إشارة العزم فقط.

مثال ١٣

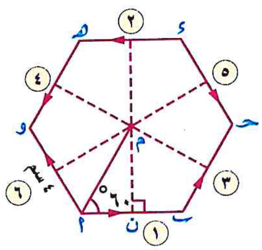
أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم طول ضلعه ٤ سم ورءوسه مرتبة فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة ، أثرت قوى مقاديرها ١ ، ٣ ، ٥ ، ٢ ، ٤ ، ٦ نيوتن

فى $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء هـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{هـ و}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ و}}$ على الترتيب.

أوجد المجموع الجبرى لعزوم القوى حول كل من م (مركز السداسى) ، الرأس أ

الحل

(١) نرسم $\overline{\text{م ن}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ فيكون :



م ن = م أ جا ٦٠° = ٤ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٢ √٣ سم

∴ ذراع العزم حول م لكل قوة = ٢ √٣ سم

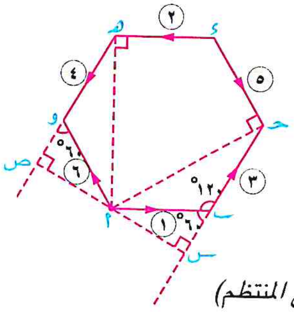
∴ المجموع الجبرى لعزوم القوى حول م

= (١ + ٣ − ٥ + ٢ + ٤ − ٦) × ٢ √٣

= −٢ √٣ نيوتن.سم

(٢) نرسم $\overleftarrow{أس} \perp \overleftarrow{حـ ب}$ ، $\overline{أص} \perp \overleftarrow{هـ و}$

ونصل $\overline{أحـ}$ ، $\overline{أهـ}$



∴ ق (∠ أ ب س) = ق (∠ أ و ص) = $60°$

∴ أس = أص = أب جا $60° = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ سم

، أحـ = أهـ = $\sqrt{3}$ × طول ضلع السداسى *(خواص السداسى المنتظم)*

∴ أحـ = أهـ = $4\sqrt{3}$ سم ، $\overline{أحـ} \perp \overline{حـ ء}$ ، $\overline{أهـ} \perp \overline{ءهـ}$

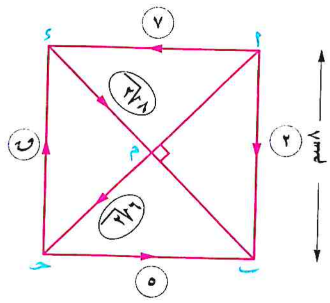
∴ المجموع الجبرى لعزوم القوى حول أ

$= 1 \times 0 + 3 \times 2\sqrt{3} - 5 \times 4\sqrt{3} + 2 \times 4\sqrt{3} + 4 \times 2\sqrt{3} + 6 \times 0$

$= 6\sqrt{3} - 20\sqrt{3} + 8\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ نيوتن . سم.

مثال (١٤)

أ ب حـ ء مربع طول ضلعه = ٨ سم أثرت القوى ٢ ، ٥ ، ق ، ٧ ، $6\sqrt{2}$ ، $8\sqrt{2}$ ثقل جرام في $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{حـ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ ، $\overleftarrow{أء}$ ، $\overleftarrow{أحـ}$ ، $\overleftarrow{ءب}$ على الترتيب فإذا كان خط عمل محصلة هذه القوى يوازى $\overleftrightarrow{أحـ}$ فأوجد قيمة : ق



الحـل

∵ أ ب حـ ء مربع

∴ أحـ = ب ء = $8\sqrt{2}$ سم

∴ أم = م حـ = $4\sqrt{2}$ سم

، ∵ خط عمل محصلة القوى // $\overleftrightarrow{أحـ}$ ∴ $ج_م = ج_{حـ}$

، ∵ $ج_م = 2 \times 0 + 5 \times 8 - ق \times 8 + 7 \times 0 + 6\sqrt{2} \times 0 + 8\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}$

$= 40 - 8ق + 64 = 104 - 8ق$

، $ج_{حـ} = -2 \times 8 + 5 \times 0 + ق \times 0 + 7 \times 8 + 6\sqrt{2} \times 0 - 8\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}$

$= -16 + 56 - 64 = -24$

∴ $104 - 8ق = -24$ ∴ ق = ١٦ ث . جم.

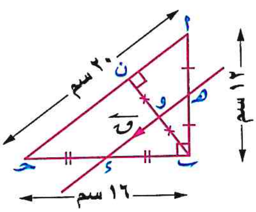
مثال ١٥

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ١٦ سم

، أثرت قوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ فى مستوى المثلث وكان عزم $\overleftarrow{\text{ق}}$ حول أ = عزمها حول حـ = -٧٢ نيوتن.سم

وكان عزم $\overleftarrow{\text{ق}}$ حول ب = ٧٢ نيوتن.سم عيِّن مقدار واتجاه وخط عمل $\overleftarrow{\text{ق}}$

الحل



أ حـ = $\sqrt{\text{١٤٤ + ٢٥٦}}$ = $\sqrt{\text{٤٠٠}}$ = ٢٠ سم

∵ عزم $\overleftarrow{\text{ق}}$ حول أ = عزم $\overleftarrow{\text{ق}}$ حول حـ

∴ خط عمل $\overleftarrow{\text{ق}}$ يوازى $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ (١)

، ∵ عزم $\overleftarrow{\text{ق}}$ حول ب = - (عزم $\overleftarrow{\text{ق}}$ حول حـ)

∴ خط عمل $\overleftarrow{\text{ق}}$ يمر بمنتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ وليكن ء (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ خط عمل $\overleftarrow{\text{ق}}$ يوازى $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ وينصف $\overline{\text{ب حـ}}$ وأيضاً ينصف $\overline{\text{أ ب}}$

∵ العزم حول ب إشارته موجبة

∴ $\overleftarrow{\text{ق}}$ تعمل فى اتجاه $\overleftarrow{\text{هـ ء}}$ حيث هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

ولحساب ق (معيار $\overleftarrow{\text{ق}}$) فإن :

∵ عزم $\overleftarrow{\text{ق}}$ حول ب = ٧٢ نيوتن.سم

∴ ق × ب و = ٧٢

لكن : ب و = $\frac{١}{٢}$ ب ن = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{\text{أ ب × ب حـ}}{\text{أ حـ}}$ = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{\text{١٢ × ١٦}}{\text{٢٠}}$ = ٤,٨ سم

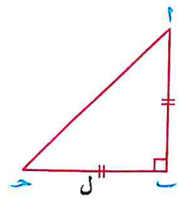
∴ ق × ٤,٨ = ٧٢ ∴ ق = $\frac{\text{٧٢}}{\text{٤,٨}}$ ∴ ق = ١٥ نيوتن.

ملاحظات

في كل من الأشكال الهندسية التالية نجد أنه :

① إذا كان Δ أ ب جـ قائم الزاوية ومتساوى الساقين

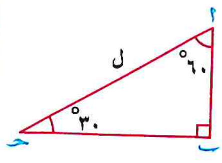
فإن : أ جـ = ل $\sqrt{٢}$



② إذا كان : Δ أ ب جـ ثلاثينيًا ستينيًا :

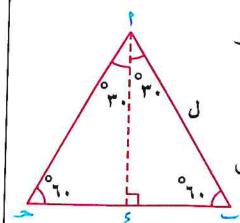
فإن : أ ب = $\frac{١}{٢}$ ل

، ب جـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل



③ إذا كان Δ أ ب جـ متساوى الأضلاع

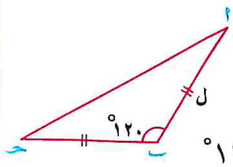
فإن : أ ء = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل



④ إذا كان Δ أ ب جـ متساوى الساقين

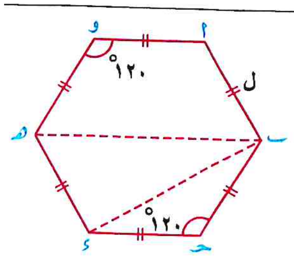
، ق (∠ب) = ١٢٠°

فإن : أ جـ = ل $\sqrt{٣}$



⑤ إذا كان : أ ب جـ ء هـ و سداسيًا منتظمًا

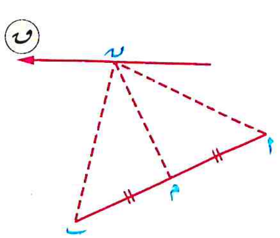
فإن : ب ء = ل $\sqrt{٣}$ ، ب هـ = ٢ ل



معلومة إثرائية

① إذا اثرت قوة $\overrightarrow{ق}$ فى النقطة ن وكان $\overline{أ ب}$ يقع فى مستوى $\overrightarrow{ق}$ وكانت م منتصف $\overline{أ ب}$ وكان جـ$_{أ}$ ، جـ$_{ب}$ ، جـ$_{م}$ هى القياسات الجبرية لعزم القوة حول النقط أ ، ب ، م على الترتيب

فإن : جـ$_{أ}$ + جـ$_{ب}$ = ٢ جـ$_{م}$



* الاثبات :

∵ جـ$_{أ}$ + جـ$_{ب}$ = $\overrightarrow{\text{أ ن}} \times \overrightarrow{ق} + \overrightarrow{\text{ب ن}} \times \overrightarrow{ق}$

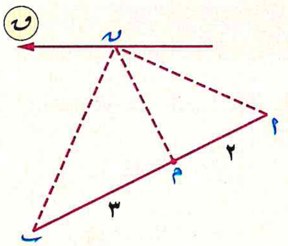
= $(\overrightarrow{\text{أ ن}} + \overrightarrow{\text{ب ن}}) \times \overrightarrow{ق}$

= ٢ $\overrightarrow{\text{م ن}} \times \overrightarrow{ق}$ = ٢ جـ$_{م}$

• **فمثلاً :** إذا كانت $\overleftarrow{\text{ق}}$ قوة تؤثر فى مستوى Δ أ ب حـ وكانت ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

وكان $ج_{ب} = ٢٠$ نيوتن.سم ، $ج_{حـ} = ١٢$ نيوتن.سم

$\therefore\ ج_{ء} = \frac{1}{2}\left(ج_{ب} + ج_{حـ}\right) = ١٦$ نيوتن.سم



تعميم : إذا كانت م تقسم $\overline{\text{أ ب}}$ من الداخل بنسبة ٢ : ٣

وباستخدام تقسيم قطعة مستقيمة نجد أن :

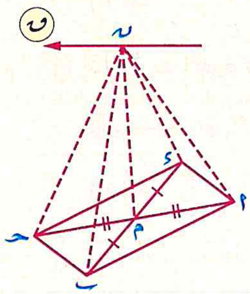
$$٣\ \overleftarrow{\text{أ ه}} + ٢\ \overleftarrow{\text{ب ه}} = ٥\ \overleftarrow{\text{م ه}}$$

$$\therefore\ ٣\ \overleftarrow{\text{أ ه}} \times \overleftarrow{\text{ق}} + ٢\ \overleftarrow{\text{ب ه}} \times \overleftarrow{\text{ق}} = ٥\ \overleftarrow{\text{م ه}} \times \overleftarrow{\text{ق}}$$

أى أن : $٣\ ج_{أ} + ٢\ ج_{ب} = ٥\ ج_{م}$

(٢) إذا أثرت قوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ فى مستوى متوازى أضلاع أ ب حـ ء وكان $ج_{أ}$ ، $ج_{ب}$ ، $ج_{حـ}$ ، $ج_{ء}$ هى القياسات الجبرية لعزم القوة حول رؤوس متوازى الأضلاع الأربعة على الترتيب

فإن : $\boxed{ج_{أ} + ج_{حـ} = ج_{ب} + ج_{ء}}$



*** الاثبات :**

نفرض أن $\overleftarrow{\text{ق}}$ تؤثر فى مستوى متوازى أضلاع أ ب حـ ء

$\because$ م منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$

$\therefore\ ج_{أ} + ج_{حـ} = ٢\ ج_{م}$ (١)

، $\because$ م منتصف $\overline{\text{ب ء}}$

$\therefore\ ج_{ب} + ج_{ء} = ٢\ ج_{م}$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore\ \boxed{ج_{أ} + ج_{حـ} = ج_{ب} + ج_{ء}}$

• **فمثلاً :** إذا أثرت قوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ فى مستوى متوازى أضلاع أ ب حـ ء وكان $ج_{أ} = -١٨$ نيوتن.متر ، $ج_{ب} = ٢٤$ نيوتن.متر ، $ج_{ء} = ٣٠$ نيوتن.متر

، $\because\ ج_{أ} + ج_{حـ} = ج_{ب} + ج_{ء}$ $\therefore\ -١٨ + ج_{حـ} = ٢٤ + ٣٠$

$\therefore\ ج_{حـ} = ٧٢$ نيوتن.متر

تمارين 1 على عزم قوة (أو عدة قوى) بالنسبة لنقطة فى نظام إحداثى ثلاثى الأبعاد

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا تمارين على إيجاد العزم باستخدام الضرب الاتجاهى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : $\overleftarrow{ق} = ٢ \overleftarrow{س} - ٣ \overleftarrow{ص}$ ، أ (٢ ، ١) ∈ خط عمل $\overleftarrow{ق}$ ، و نقطة الأصل

فإن : $\overleftarrow{ج}_و$ = ... $\overleftarrow{ع}$

(أ) −٨ (ب) ٨ (جـ) ١ (د) ٧

② (دور ثان ٢٠٢٣) إذا كانت : $\overleftarrow{ق} = - ١٢ \overleftarrow{س} + ١٦ \overleftarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة (٢ ، ٣) ،

فإن معيار عزم القوة حول نقطة الأصل = ... وحدة عزم.

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٣٨ (د) ٦٨

③ إذا أثرت القوة $\overleftarrow{ق} = ٢ \overleftarrow{س} + ٥ \overleftarrow{ص}$ فى النقطة أ = (−٣ ، ١)

فإن متجه عزم $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة ب (٢ ، −٤) يساوى ....

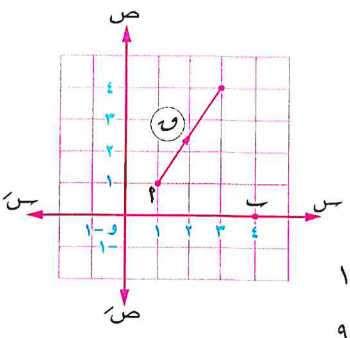
(أ) ١٥ $\overleftarrow{ع}$ (ب) ٣٥ $\overleftarrow{ع}$ (جـ) − $\overleftarrow{ع}$ (د) −٣٥ $\overleftarrow{ع}$

④ فى الشكل المقابل :

إذا كانت : $\overleftarrow{ق} = ٢٠ \overleftarrow{س} + ٣٠ \overleftarrow{ص}$ وتؤثر

فى نقطة أ فإن عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة

ب = ... $\overleftarrow{ع}$



(أ) −١١٠ (ب) ١١٠

(جـ) ٧٠ (د) −٩٠

⑤ إذا كانت : $\overleftarrow{ق} = ٧ \overleftarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة (−٣ ، ٠) فإن عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة

للنقطة (١ ، −٢) هو ....

(أ) −٢٨ $\overleftarrow{ع}$ (ب) ٢٨ $\overleftarrow{ع}$ (جـ) ١٤ $\overleftarrow{ع}$ (د) −١٤ $\overleftarrow{ع}$

(٦) **(دورثان ٢٠٢٤)** إذا كانت القوة $\overrightarrow{\text{ق}}_1 = ٢\,\overrightarrow{\text{س}} - ٣\,\overrightarrow{\text{ص}}$ تؤثر فى النقطة أ (١ ، ٢) والقوة $\overrightarrow{\text{ق}}_2 = \overrightarrow{\text{س}} + ٢\,\overrightarrow{\text{ص}}$ تؤثر فى النقطة ب (٢ ، ١) ، فإن معيار عزم محصلة القوتين حول النقطة حـ (٣ ، ٤) = ... وحدة عزم.

(أ) ١٧ (ب) ١٥ (جـ) ١٢ (د) ١١

(٧) **(دورثان ٢٠٢٤)** إذا كانت القوة $\overrightarrow{\text{ق}} = ٤\,\overrightarrow{\text{س}} - ٣\,\overrightarrow{\text{ص}}$ تؤثر فى النقطة أ (٢ ، −١) ، فإن طول العمود الساقط من النقطة ب (١ ، −١) على خط عمل القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ = ... وحدة طول.

(أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) $\frac{٣}{٥}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{٧}{٥}$

(٨) إذا كانت : $\overrightarrow{\text{ق}} = ٦\,\overrightarrow{\text{س}} - ٨\,\overrightarrow{\text{ص}}$ تؤثر فى النقطة أ = (٣ ، −٢) فإن طول العمود الساقط من النقطة ب (٢ ، ٤) على خط عمل $\overrightarrow{\text{ق}}$ = ... وحدة طول.

(أ) ٥,٤ (ب) ٢,٨ (جـ) ٢٨ (د) ٤,٤

(٩) إذا كان عزم القوة $\overrightarrow{\text{ق}} = ٣\,\overrightarrow{\text{س}} - ٤\,\overrightarrow{\text{ص}}$ بالنسبة لنقطة فى مستويها يساوى $-٦٠\,\overrightarrow{\text{ع}}$ ، فإن طول العمود المرسوم من هذه النقطة على خط عمل $\overrightarrow{\text{ق}}$ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١٢ (ب) ١٥ (جـ) ٢٠ (د) ٦٠

(١٠) إذا كان خط عمل $\overrightarrow{\text{ق}} \,//\, \overline{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}}_{\text{أ}} = ١٢\,\overrightarrow{\text{ع}}$ فإن : $\overrightarrow{\text{جـ}}_{\text{ب}}$ = ... $\overrightarrow{\text{ع}}$

(أ) ١٢ (ب) −١٢ (جـ) ٦ (د) ٢٤

(١١) إذا كان مجموع عزوم القوى حول أ = مجموع عزوم القوى حول ب فإن خط عمل المحصلة يكون ....

(أ) عمودى على $\overline{\text{أب}}$ (ب) موازيًا $\overline{\text{أب}}$

(جـ) مارًا بمنتصف $\overline{\text{أب}}$ (د) ينطبق على $\overline{\text{أب}}$

(١٢) إذا انعدم مجموع عزمى قوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ حول النقطتين أ ، ب فإن خط عمل $\overrightarrow{\text{ق}}$ ....

(أ) يوازى $\overline{\text{أب}}$ (ب) عمودى على $\overline{\text{أب}}$

(جـ) يمر بالنقطة أ أو النقطة ب (د) يمر بمنتصف $\overline{\text{أب}}$

⑬ (دور أول ٢٠٢٤) إذا كانت القوة : $\overrightarrow{ق} = ٧ \overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ج}_{م} = \overrightarrow{ج}_{ب}$ حيث أ ، ب نقطتان في مستوى القوة $\overrightarrow{ق}$ فإن : $\overleftrightarrow{أب}$ ....

(أ) يوازى محور الصادات.

(ب) يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

(جـ) يوازى محور السينات.

(د) يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

⑭ إذا كان القوة $\overrightarrow{ق}$ = (ل ، م) تؤثر فى نقطة أ (٤ ، ٨) وكان عزم ق بالنسبة للنقطة ب (٣ ، ٩) يساوى ٤٠ $\overrightarrow{ع}$ فإن : ل + م = ...

(أ) ٤٠ (ب) ٢٠ (جـ) ١٠ (د) ٨٠

⑮ (دور أول ٢٠٢٥) إذا كانت القوة : $\overrightarrow{ق} = ٦ \overrightarrow{س} - ٢ \overrightarrow{ص}$ ، معادلة خط عملها هى س + ٣ ص = ١٢ فإن عزم $\overrightarrow{ق}$ حول النقطة ب (-٣ ، ١) يساوى .... $\overrightarrow{ع}$

(أ) -٣٠ (ب) -٢٤ (جـ) ٢٤ (د) ٣٠

⑯ إذا كانت : $\overrightarrow{ق} = ٥ \overrightarrow{س} + ٤ \overrightarrow{ص}$ وكانت النقطتان أ ، ب فى مستوى $\overrightarrow{ق}$ حيث أ (٢ ، ٣) وكان : $ج_{م} = ج_{ب}$ فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ هى ....

(أ) ٤ س - ٥ ص + ٧ = ٠ . (ب) ٥ س - ٤ ص + ٧ = ٠ .

(جـ) ٤ س - ٥ ص = ٠ . (د) ٥ س + ٤ ص + ٧ = ٠ .

⑰ إذا كان عزم القوة $\overrightarrow{ق} = ٤ \overrightarrow{س} + ٦ \overrightarrow{ص}$ بالنسبة لنقطة الأصل يساوى ٨٠ $\overrightarrow{ع}$ فإن معادلة خط عمل $\overrightarrow{ق}$ هى ....

(أ) ٢ س + ٣ ص = ٤٠ (ب) ٤ س + ٣ ص = ١٠

(جـ) ٣ س - ٢ ص = ٤٠ (د) ٣ س - ٢ ص = ٨٠

⑱ (استرشادى ٢٠٢٥) إذا كانت القوة $\overrightarrow{ق} = ل \overrightarrow{س} - ٤ \overrightarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة أ (١ ، -٣) ، والقياس الجبرى لعزم هذه القوة بالنسبة للنقطة ب (-٥ ، ٠) يساوى -٢١ وحدة عزم ، فإن معادلة خط عمل القوة ق هى ....

(أ) ٤ س + ص = ١ (ب) ٤ س - ص = ١

(جـ) س - ٤ ص = ١ (د) س + ٤ ص = ١

(١٩) (تجريبى ٢٠٢٣) قوة مقدارها $٢ \sqrt{١٧}$ وحدة قوة تعمل فى المستوى الإحداثى س ص ، فإذا كانت معادلة خط عملها هى ص − ٤ س = ١٢ ، فإن معيار عزم القوة حول نقطة الأصل = ... وحدة عزم.

(أ) ٢٦ (ب) $٢٤ \sqrt{١٧}$ (جـ) ٢٤ (د) $\sqrt{١٧} + ٣$

(٢٠) (تجريبى ٢٠٢٣) $\overleftarrow{ق}$ قوة تعمل فى المستوى س ص معادلة خط عملها هى ص + ٤ س = ٥ ، أ (١ ، ٥) ، ب (٢ ، ١) نقطتان فى نفس المستوى ، فإن ....

(أ) $ج_{أ} = ج_{ب}$ (ب) $ج_{أ} > ج_{ب}$ (جـ) $ج_{أ} = - ج_{ب}$ (د) $ج_{أ} < ج_{ب}$

(٢١) قوة $\overleftarrow{ق}$ متجه عزمها بالنسبة للنقطة (٣ ، ٥) هو ٦ $\overleftarrow{ع}$ ومتجه عزمها بالنسبة للنقطة (١ ، −١) هو −٦ $\overleftarrow{ع}$ فإن متجه عزمها بالنسبة للنقطة .... = $\overleftarrow{صفر}$

(أ) (−١ ، −٣) (ب) (٢ ، ٢) (جـ) (٢ ، ٦) (د) (١ ، ٣)

(٢٢) (دور أول ٢٠٢٥) إذا كان خط عمل القوة $\overleftarrow{ق}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$ ينصف $\overline{ب حـ}$ ، حيث ب (٣ ، ١) وكانت أ (٤ ، −٣) منتصف $\overline{ب حـ}$ فإن متجه عزم القوة بالنسبة للنقطة حـ هو .... $\overleftarrow{ع}$

(أ) −١١ (ب) −٥ (جـ) ٥ (د) ١١

(٢٣) (دور أول ٢٠٢٠) إذا كان : $\overleftarrow{ق}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ − ٢ $\overleftarrow{ص}$ ، أ (−١ ، ٢) ، عزم $\overleftarrow{ق}$ حول أ هو $\overleftarrow{ج_{أ}}$ = ٩ $\overleftarrow{ع}$ ، عزم $\overleftarrow{ق}$ حول ب هو $\overleftarrow{ج_{ب}}$ = ٩ $\overleftarrow{ع}$ فإن إحداثيات النقطة ب يمكن أن يمثلها جميع الأزواج المرتبة الآتية ماعدا ....

(أ) (٥ ، −٢) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (−٨ ، ٤) (د) (٨ ، −٤)

(٢٤) (تجريبى ٢٠٢١) تؤثر $\overleftarrow{ق}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ + ٢ $\overleftarrow{ص}$ عند نقطة ما وكان متجه عزم $\overleftarrow{ق}$ حول نقطة الأصل هو ١٥ $\overleftarrow{ع}$ فإن نقطة تقاطع خط عمل $\overleftarrow{ق}$ مع محور ص هى ....

(أ) (٠ ، −٥) (ب) (٠ ، ١٥) (جـ) (٠ ، ٥) (د) (٠ ، −١٥)

(٢٥) (استرشادى ٢٠٢٥) إذا كانت : $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ع}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة ، القوة $\overleftarrow{ق}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ + ك $\overleftarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة أ (٥ ، −١) ، فإذا كان طول العمود الساقط من النقطة ب (٢ ، ٣) على خط عمل $\overleftarrow{ق}$ يساوى ٥ وحدة طول ، فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ١,٥ (جـ) ٢ (د) ٤,٥

(٢٦) إذا أثرت القوة $\overleftarrow{ق} = (م ، ٧)$ فى النقطة أ (١ ، م) وكان متجه عزمها بالنسبة للنقطة ب (٠ ، ١) يساوى ٥ $\overleftarrow{ع}$ فإن : م ∈ ....

(أ) {−٢ ، ١} (ب) {−٢ ، −١} (جـ) {٢ ، −١} (د) {١ ، ٢}

(٢٧) تؤثر القوة $\overleftarrow{ق}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ + ٤ $\overleftarrow{ص}$ فى النقطة أ = (٢ ، ٩) وكانت النقطة ب = (٣ ، ٧) فإن ظل الزاوية بين $\overleftarrow{ب أ}$ ، $\overleftarrow{ق}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

(٢٨) إذا كانت : $\overleftarrow{ق}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة حـ وكان $\overleftarrow{أ ب}$ = ٤ $\overleftarrow{س}$ + ٦ $\overleftarrow{ص}$ وكان $\overleftarrow{جـ}_{أ}$ = (ك^{٢} + ٤) $\overleftarrow{ع}$ ، $\overleftarrow{جـ}_{ب}$ = (٤ ك) $\overleftarrow{ع}$ فإن : ك = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ١

(٢٩) (استرشادى ٢٠٢٥) تؤثر القوتين $\overleftarrow{ق}_{١}$ = $\overleftarrow{س}$ + $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق}_{٢}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ − ٤ $\overleftarrow{ص}$ فى النقطتين أ (١ ، −٤) ، ب (٣ ، ٦) على الترتيب ، إذا كانت حـ منتصف $\overline{أ ب}$ ، فإن طول العمود الساقط من النقطة حـ إلى خط عمل المحصلة يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٣٠) القوة $\overleftarrow{ق}$ تؤثر فى النقطة أ ، النقط أ ، ب ، حـ تقع فى مستوى القوة $\overleftarrow{ق}$ وكان $\overleftarrow{جـ}_{ب}$ = −١٢ $\overleftarrow{ع}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ × $\overleftarrow{ق}$ = ٢٣ $\overleftarrow{ع}$ فإن : $\overleftarrow{جـ}_{حـ}$ = ...

(أ) −١١ $\overleftarrow{ع}$ (ب) ١١ $\overleftarrow{ع}$ (جـ) −٣٥ $\overleftarrow{ع}$ (د) ٣٥ $\overleftarrow{ع}$

(٣١) تؤثر القوة $\overleftarrow{ق}$ = $\left(١٠ ، \frac{\pi}{٣}\right)$ فى النقطة أ $\left(٢\sqrt{٣} ، ٢\right)$ فإن عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ حول نقطة الأصل (و) يساوى ....

(أ) −٥ $\overleftarrow{ع}$ (ب) ٥ $\overleftarrow{ع}$ (جـ) ٥ $\sqrt{٣}$ $\overleftarrow{ع}$ (د) −٢٥ $\overleftarrow{ع}$

---

(٢) إذا كانت : $\overleftarrow{ق}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ + ٤ $\overleftarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة أ (−١ ، ٣) من جسم **أوجد :**

(١) عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة لنقطة الأصل و (٠ ، ٠)

(٢) طول العمود الساقط من النقطة (و) على خط عمل القوة $\overleftarrow{ق}$ «−١٣ $\overleftarrow{ع}$ ، ٢,٦ وحدة طول»

٣ إذا كانت : $\overleftarrow{\text{ق}} = \overleftarrow{\text{س}} - ٢\,\overleftarrow{\text{ص}}$ تؤثر فى النقطة أ (٢ ، ٣) **أوجد :**

(١) عزم القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ بالنسبة للنقطة ب (٢ ، ١)

(٢) طول العمود الساقط من النقطة ب على خط عمل القوة. «$-٢\,\overleftarrow{\text{ع}}$ ، $\frac{٢\sqrt{٥}}{٥}$»

---

٤ إذا كانت : $\overleftarrow{\text{ق}} = \text{ل}\,\overleftarrow{\text{س}} - ٢\,\overleftarrow{\text{ص}}$ تؤثر فى نقطة أ (٥ ، ٢) وكان متجه عزم $\overleftarrow{\text{ق}}$ بالنسبة لنقطة ب (٧ ، −٤) يساوى ٢٠ $\overleftarrow{\text{ع}}$ **فأوجد قيمة : ل** «$-\frac{٨}{٣}$»

---

٥ إذا كانت : $\overleftarrow{\text{ق}} = ٣\,\overleftarrow{\text{س}} - ٤\,\overleftarrow{\text{ص}}$ تؤثر فى نقطة أ (٠ ، ٢) وكانت :

ب (٣ ، −٢) ، حـ (٢ ، ٣) ، ء (−٢ ، ١) ، هـ (٥ ، −١)

فأثبت باستخدام العزوم أن خط عمل $\overleftarrow{\text{ق}}$:

(١) يمر بنقطة ب (٢) ينصف $\overline{\text{حـ ء}}$ (٣) يوازى $\overleftrightarrow{\text{حـ هـ}}$

---

٦ أثرت القوتان $\overleftarrow{\text{ق}}_{١} = ٥\,\overleftarrow{\text{س}} - ٤\,\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢} = \overleftarrow{\text{س}} - ٤\,\overleftarrow{\text{ص}}$ فى نقطة الأصل ، أثبت أن خط عمل محصلتهما يمر بالنقطة أ (−٣ ، ٤) ثم أوجد طول العمود الساقط من النقطة ب (٢ ، −٥) على خط عمل المحصلة. «$-١٤\,\overleftarrow{\text{ع}}$ ، ١,٤ وحدة طول»

---

٧ القوى : $\overleftarrow{\text{ق}}_{١} = ٢\,\overleftarrow{\text{س}} - ٣\,\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢} = ٥\,\overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٣} = -٤\,\overleftarrow{\text{س}} + ٧\,\overleftarrow{\text{ص}}$

تؤثر فى النقط أ (١ ، ١) ، ب (−٢ ، ٢) ، حـ (٣ ، ١) على الترتيب.

أوجد متجه عزم المحصلة بالنسبة لنقطة الأصل (٠ ، ٠) «$٨\,\overleftarrow{\text{ع}}$»

---

٨ تؤثر القوتان : $\overleftarrow{\text{ق}}_{١} = \overleftarrow{\text{س}} + ٢\,\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢} = ٣\,\overleftarrow{\text{س}} - \overleftarrow{\text{ص}}$ فى النقطة أ (−٢ ، ٣) برهن باستخدام العزوم أن خط عمل المحصلة ينصف القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين ب (−١ ، ٥) ، حـ (١ ، ٢)

---

٩ القوى : $\overleftarrow{\text{ق}}_{١} = ٢\,\overleftarrow{\text{س}} - \overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢} = ٥\,\overleftarrow{\text{س}} + ٢\,\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٣} = -٣\,\overleftarrow{\text{س}} + ٢\,\overleftarrow{\text{ص}}$

تؤثر فى النقطة أ (١ ، ١) برهن باستخدام العزوم أن خط عمل المحصلة يوازى المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ١) ، (٦ ، ٤)

١٠ قوة : $\overleftarrow{ق}$ = ١٢ $\overleftarrow{س}$ + ك $\overleftarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة ؟ = (-٥ ، ٣) ، خط عملها ينصف القطعة المستقيمة $\overline{ب حـ}$ حيث : ب = (١ ، ٢) ، حـ = (١ ، ٩)

أوجد : قيمة ك ، بُعد النقطة ب عن خط عمل $\overleftarrow{ق}$

«٥ ، $\frac{٤٢}{١٣}$ وحدة طول»

---

١١ تؤثر القوتان : $\overleftarrow{ق}_١$ = م $\overleftarrow{س}$ + ٢ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق}_٢$ = ل $\overleftarrow{س}$ - $\overleftarrow{ص}$ عند النقطتين ؟$_١$ = (١ ، ١) ، ؟$_٢$ = (-١ ، -٢) على الترتيب. عيِّن قيمة كل من الثابتين م ، ل بحيث ينعدم مجموع عزمى هاتين القوتين بالنسبة لنقطة الأصل «و» ، بالنسبة للنقطة ب = (٢ ، ٣)

« $\frac{١٣}{٩}$ ، $\frac{-٧}{٩}$ »

---

١٢ تؤثر القوة $\overleftarrow{ق}$ فى النقطة ؟ (-٣ ، ٢) فإذا كان عزم $\overleftarrow{ق}$ حول كل من النقطتين ب (٣ ، ١) ، حـ (-١ ، ٤) يساوى ٢٨ $\overleftarrow{ع}$ **أوجد :** $\overleftarrow{ق}$

«٨ $\overleftarrow{س}$ - ٦ $\overleftarrow{ص}$ »

---

١٣ قوة : $\overleftarrow{ق}$ = ل $\overleftarrow{س}$ + م $\overleftarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة ؟ = (١ ، -٣) ، القياس الجبرى لعزم هذه القوة بالنسبة للنقطة (-٥ ، ٠) يساوى -٢١ وحدة عزم وينعدم عزمها بالنسبة للنقطة (٢ ، -٧) أوجد مقدار $\overleftarrow{ق}$ ومعادلة خط عملها.

«$\overleftarrow{ق}$ = $\overleftarrow{س}$ - ٤ $\overleftarrow{ص}$ ، ‖$\overleftarrow{ق}$‖ = $\sqrt{١٧}$ وحدة قوة ، ٤ س + ص - ١ = صفر»

---

١٤ (دور أول ٢٠٠٨) أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ فى مستوى المثلث ؟ ب حـ حيث : ؟ (٣ ، ٢) ، ب (١ ، -٤) ، حـ (-١ ، ٠) بحيث كان : $\overleftarrow{ج}_؟$ = $\overleftarrow{ج}_ب$ = ٦٠ $\overleftarrow{ع}$ ، $\overleftarrow{ج}_حـ$ = -٦٠ $\overleftarrow{ع}$

أوجد : $\overleftarrow{ق}$ وعيِّن مقدارها.

«-١٢ $\overleftarrow{س}$ - ٣٦ $\overleftarrow{ص}$ ، ١٢ $\sqrt{١٠}$ وحدة قوة»

---

١٥ قوة $\overleftarrow{ق}$ معيارها يساوى ١٥ ث.جم وتعمل فى $\overleftarrow{؟ب}$ حيث : ؟ = (-٣ ، ١) ، ب = (١ ، ٤) أوجد متجه عزم هذه القوة بالنسبة لنقطة الأصل.

«-٣٩ $\overleftarrow{ع}$»

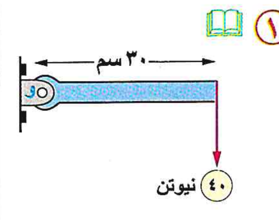
---

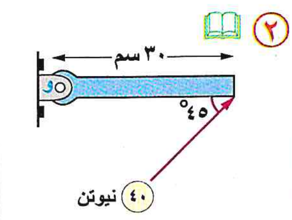
١٦ إذا كان القياس الجبرى لعزم قوة $\overleftarrow{ق}$ حول كل من النقط و (٠ ، ٠) ، ء (١ ، ٠) ، هـ (٠ ، ٢) يساوى ٢٧ ، ١٨ ، ٤٠ $\frac{١}{٢}$ وحدة عزم أوجد : $\overleftarrow{ق}$

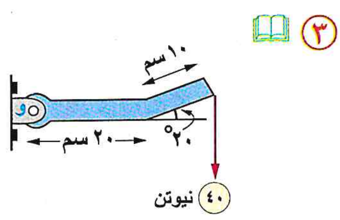
« $\frac{٢٧}{٤}$ $\overleftarrow{س}$ + ٩ $\overleftarrow{ص}$ »

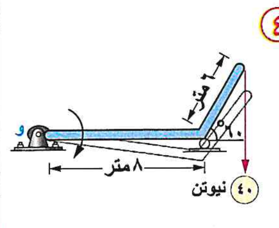
ثانيًا تمارين على إيجاد عزم قوة باستخدام طول العمود

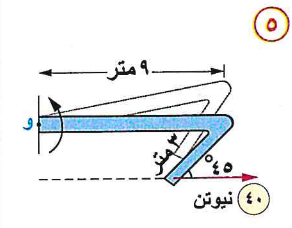
١ في كل من الأشكال الآتية أوجد القياس الجبرى لعزم القوة حول النقطة (و) :

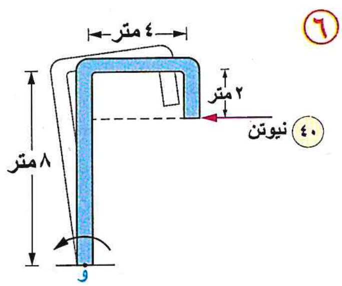












٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قوة مقدارها ٥٠ نيوتن ويبعد خط عملها عن نقطة أ مسافة ٨ سم فإن معيار عزمها حول أ يساوى .... نيوتن. سم.

(أ) ٤٠ (ب) صفر (جـ) ٢٠٠ (د) ٤٠٠

(٢) أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٨ سم أثرت قوة مقدارها ١٥ نيوتن فى $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ فإن معيار عزم القوة بالنسبة للنقطة أ هو .... وحدة عزم.

(أ) $٤٠\sqrt{٣}$ (ب) ٦٠ (جـ) $٦٠\sqrt{٣}$ (د) ١٢٠

(٣) قوة مقدارها ٧٠ نيوتن تؤثر فى $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ حيث أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم فإن معيار عزم القوة بالنسبة لمركز المربع يساوى .... نيوتن.سم.

(أ) $١٧٥\sqrt{٢}$ (ب) ٣٥٠ (جـ) $٣٥٠\sqrt{٢}$ (د) ٧٠٠

(٤) قوة مقدارها ق نيوتن معيار عزمها حول نقطة أ يساوى $ج_1$ إذا تحركت القوة موازية لنفسها لتقترب من النقطة أ فأصبح معيار عزمها حول أ يساوى $ج_2$ فإن : ....

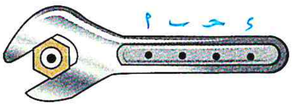
(أ) $ج_2 > ج_1$ (ب) $ج_2 < ج_1$

(جـ) $ج_2 = ج_1$ (د) $ج_2 + ج_1 = ٠$

٥ في الشكل المقابل :

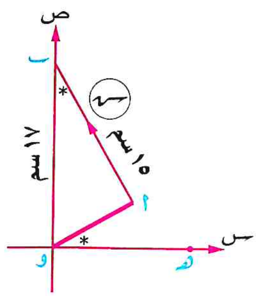
لفك المسمار باستخدام أقل قوة عمودية

على ذراع المفتاح نؤثر عند نقطة ....



(أ) أ　　(ب) ب　　(جـ) حـ　　(د) ء

٦ في الشكل المقابل :



إذا كان $\overline{أو}$ قضيب متزن مشدود بخيط $\overline{أب}$

وكان أب = ١٥ سم ، وب = ١٧ سم

، ق (∠ أ ب و) = ق (∠ أ و هـ) وكان مقدار الشد

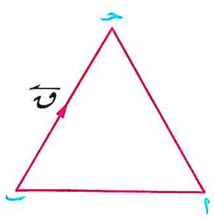
في الخيط $\overline{أب}$ يساوي ١٠ نيوتن فإن مقدار عزم

قوة الشد حول و تساوى .... نيوتن.سم.

(أ) ٥٠　　(ب) ٨٠

(جـ) ١٥٠　　(د) ١٧٠

٧ في الشكل المقابل :



إذا كانت القوة $\overleftarrow{ق}$ ممثلة بالمتجه $\overleftarrow{ب حـ}$

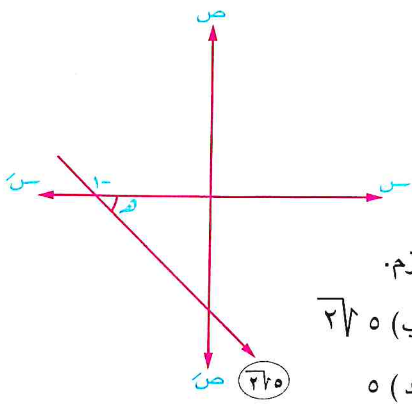
حيث وحدة قياس القوة ممثلة بوحدة الأطوال

فإن : $\|\overleftarrow{جـ}_{أ}\|$ = ...

(أ) $\|\overleftarrow{أ حـ}\| \times \|\overleftarrow{ق}\|$　　(ب) $\|\overleftarrow{أ ب}\| \times \|\overleftarrow{ق}\|$

(جـ) $\frac{١}{٢}$ مساحة Δ أ ب حـ　　(د) ٢ مساحة المثلث أ ب حـ

٨ (دور أول ٢٠٢٣) في الشكل المقابل :



إذا أثرت القوة ٥ √٢ وحدة قوة في

المستقيم الذي ميله -١ ، ويمر بالنقطة

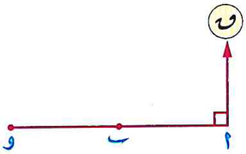
(-١ ، ٠) فإن القياس الجبرى لعزم القوة

حول نقطة الأصل يساوى .... وحدة عزم.

(أ) -٥ √٢　　(ب) ٥ √٢

(جـ) - ٥　　(د) ٥

(٩) **فى الشكل المقابل :**



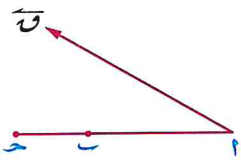
إذا كان معيار عزم $\overleftarrow{ق}$ حول (و) يساوى ٦٠

ومعيار عزم ق حول (ب) يساوى ٤٠ فإن : ....

(أ) أب = ب و　　(ب) أب = $\frac{١}{٢}$ ب و

(جـ) أب = ٢ ب و　　(د) أب = $\frac{٢}{٣}$ ب و

(١٠) **فى الشكل المقابل :**



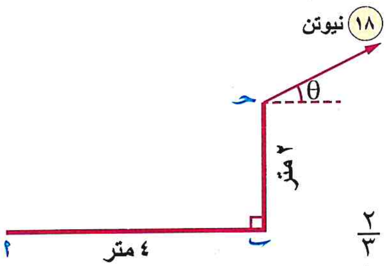
إذا كان معيار عزم $\overleftarrow{ق}$ حول ب يساوى $ج_{ب}$

ومعيار عزم $\overleftarrow{ق}$ حول جـ يساوى $ج_{جـ}$ فإن : ....

(أ) $ج_{ب} = ج_{جـ}$　　(ب) $ج_{ب} + ج_{جـ} =$ صفر

(جـ) $\frac{ج_{ب}}{ج_{جـ}} = \frac{أب}{أجـ}$　　(د) $\frac{ج_{ب}}{ج_{جـ}} = \frac{أب}{بجـ}$

(١١) **فى الشكل المقابل :**



إذا كان عزم القوة التى مقدارها ١٨ نيوتن

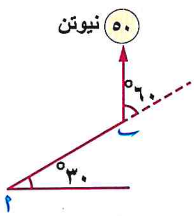
حول النقطة أ يساوى صفر

فإن : طا θ = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$　　(ب) $\frac{٢}{٣}$

(جـ) $\frac{١}{٢}$　　(د) $\frac{١}{٣}$

(١٢) **فى الشكل المقابل :**



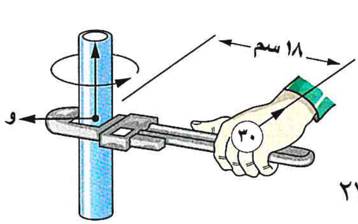
إذا كان عزم القوة التى مقدارها ٥٠ نيوتن حول

النقطة أ يساوى ١٠٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن.سم

فإن : أب = ... سم.

(أ) ٢　　(ب) ٣　　(جـ) ٤　　(د) ٥

(١٣) **فى الشكل المقابل :**



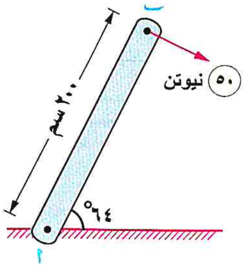
معيار عزم القوة حول

نقطة (و) يساوى .... وحدة عزم.

(أ) –٥٤٠　　(ب) ٢٧٠

(جـ) –٢٧٠　　(د) ٥٤٠

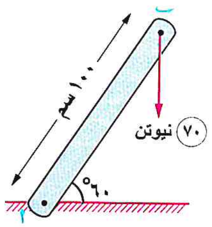
(١٤) في الشكل المقابل :



قضيب مثبت بمفصل عند أ أثرت على الطرف ب قوة مقدارها ٥٠ نيوتن في اتجاه عمودي على القضيب فإن عزم القوة حول نقطة أ يساوي .... نيوتن. متر.

(أ) $١٠^٤$ (ب) $١٠^٢$ (جـ) ١٠٠٠٠ جا ٦٤° (د) ١٠٠ جتا ٦٤°

(١٥) في الشكل المقابل :



قضيب مثبت بمفصل عند أ أثرت على الطرف ب قوة رأسية لأسفل مقدارها ٧٠ نيوتن. فإن معيار عزم القوة حول نقطة أ يساوي .... نيوتن. متر.

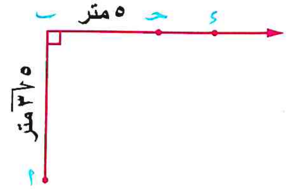
(أ) ٣٥ (ب) $٣٥\sqrt{٣}$ (جـ) ٧٠ (د) $٧٠\sqrt{٣}$

(١٦) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب وكان أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٨ سم أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ في مستوى المثلث وكان $ج_أ$ = صفر ، $ج_ب$ = $-$ $ج_حـ$ = ٦٠ نيوتن.سم.

فإن : $\|\overleftarrow{ق}\|$ = ... نيوتن.

(أ) ٢٥ (ب) ٣٠ (جـ) ٤٠ (د) ٦٠

(١٧) (تجريبي ٢٠٢١) في الشكل المقابل :

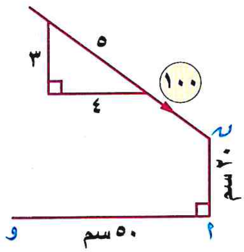


$\overline{أب} \perp \overleftarrow{ب ء}$ ، أ ب = $٥\sqrt{٣}$ متر ، ب حـ = ٥ متر. أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ عند نقطة حـ وتعمل في اتجاه يميل على $\overleftarrow{حـ ء}$ بزاوية θ لأسفل.

فإذا انعدم عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ حول النقطة أ فإن قياس الزاوية θ = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ١٢٠ (د) ١٥٠

(١٨) (دور ثان ٢٠٢٢) في الشكل المقابل :



تؤثر القوة التي مقدارها ١٠٠ نيوتن في نقطة ى

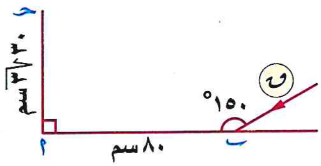
، حيث و أ = ٥٠ سم ، أى = ٢٠ سم

، $\overline{\text{و أ}} \perp \overline{\text{أ ى}}$ فإن القياس الجبرى لعزم القوة

حول نقطة و = ... نيوتن.سم.

(أ) −٤٦٠٠ (ب) ٤٦٠٠ (ج) −١٤٠٠ (د) ١٤٠٠

(١٩) (دور أول ٢٠٢٢) في الشكل المقابل :



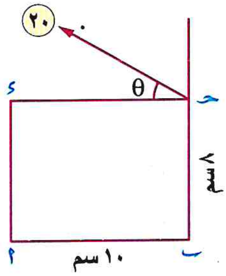
إذا أثرت قوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ مقدارها ٦٠ نيوتن في نقطة ب

، فإن القياس الجبرى لعزم $\overleftarrow{\text{ق}}$ بالنسبة

لنقطة حـ = ... نيوتن. سم.

(أ) −٣٠٠ (ب) −٥١٠٠ (ج) −٣٣٠٠ $\sqrt{3}$ (د) −٦٠٠ $\sqrt{91}$

(٢٠) (دور ثان ٢٠٢٣) في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء مستطيل فيه أ ب = ١٠ سم

، ب حـ = ٨ سم ، إذا أثرت القوة التي

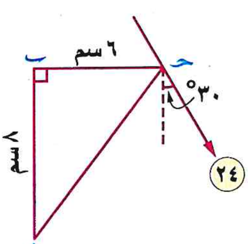
مقدارها ٢٠ نيوتن في اتجاه يصنع مع

$\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ زاوية قياسها θ ، حيث جا θ = $\frac{٤}{٥}$

، فإن جـ$_{\text{م}}$ = ... نيوتن. سم.

(أ) ٢٤٨ (ب) −٢٤٨ (ج) −٨ (د) ٨

(٢١) (دور أول ٢٠٢٣) في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث قائم في ب ، وقاعدته $\overline{\text{ب حـ}}$

أفقية ، أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ٦ سم

، إذا أثرت عند الرأس حـ قوة مقدارها ٢٤ نيوتن

، تصنع مع الرأسي زاوية قياسها ٣٠°

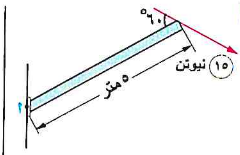
، فإن القياس الجبرى لمتجه عزم القوة حول أ = ... نيوتن. سم.

(أ) ٩٦ − ٧٢ $\sqrt{3}$ (ب) ٩٦ + ٧٢ $\sqrt{3}$

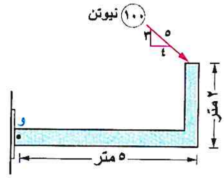
(جـ) ٧٢ $\sqrt{3}$ − ٩٦ (د) −٩٦ − ٧٢ $\sqrt{3}$

٣ في كل من الأشكال الآتية أوجد القياس الجبرى لعزم القوة حول النقطة (و) :

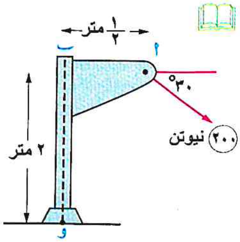
(١)



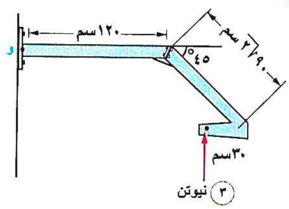
(٢)



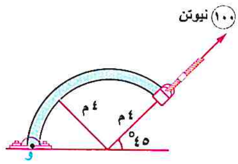
(٣)



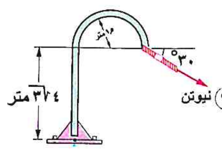
(٤)



(٥)



(٦)

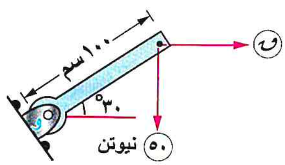


٤ في الشكل المقابل :

إذا كان عزم القوة ق حول نقطة و

يساوى عزم القوة ٥٠ نيوتن حول

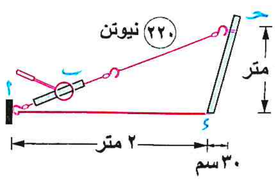
نقطة و فما قيمة ق ؟ «$50\sqrt{3}$ نيوتن»



٥ الشكل المقابل يوضح شداد أ ب

يؤثر على عمود مائل حـ ء أوجد معيار

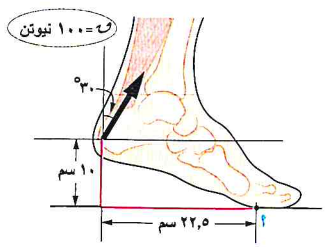
عزم قوة الشد بالنسبة للنقطة ء «١٧٥,٤ نيوتن . م»



٦ في الشكل المقابل :

أوجد القياس الجبرى لعزم القوة ق

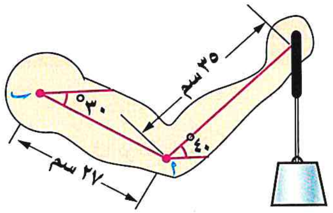
حول النقطة (أ)



«-٢٤٤٨,٥٦ نيوتن . سم»

٧ الشكل المقابل يمثل شخصًا يحمل بيده ثقلًا. فإذا كان معيار عزم الثقل حول نقطة أ يساوى ٨٠ نيوتن. متر

أوجد معيار عزم الثقل حول نقطة ب

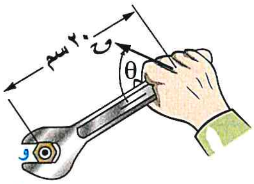


«١٤٩,٧٧ نيوتن . متر»

---

٨ إذا كان العزم اللازم لدوران المسمار حول و يساوى ٤٠٠ نيوتن. سم

أوجد أقل قيمة للقوة ق وقيمة θ التى تحقق دوران المسمار.

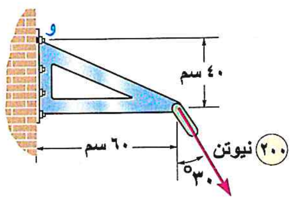


«٢٠ نيوتن ، ٩٠°»

---

٩ فى الشكل المقابل :

أوجد القياس الجبرى لعزم القوة ٢٠٠ نيوتن بالنسبة لنقطة و

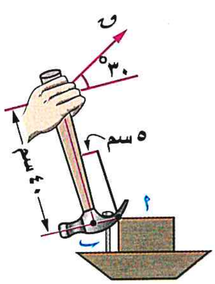


«-٦٣٩٢,٣ نيوتن . سم»

---

١٠ الشكل المقابل يوضح القوة ق اللازمة لنزع مسمار عند ب إذا كان معيار عزم القوة حول نقطة أ اللازمة لنزع المسمار يساوى ٢٠٠ نيوتن. سم

أوجد معيار القوة ق



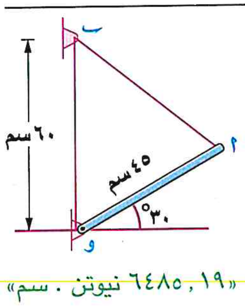
«٥,٣٨ نيوتن»

---

١١ فى الشكل المقابل :

الشد فى الخيط $\overline{\text{أب}}$ مقداره ١٥٠ نيوتن.

أوجد عزم قوة الشد بالنسبة للنقطة و



«٦٤٨٥,١٩ نيوتن . سم»

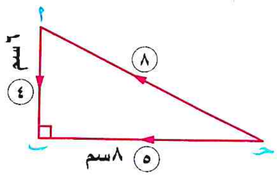
ثالثًا مسائل متنوعة

ملاحظة

«سوف نرسم جميع الأشكال الهندسية الغير المرسومة بحيث تكون رؤوسها مرتبة فى اتجاه دوران عقارب الساعة ما لم يذكر خلاف ذلك»

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① فى الشكل المقابل :



Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، أثرت القوى التى قياساتها ٨ ، ٤ ، ٥ نيوتن فى حـ أ ، أ ب ، حـ ب

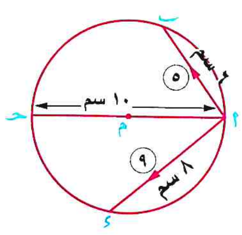
فإن مجموع عزوم القوى بالنسبة للنقطة أ = ... نيوتن.سم.

(أ) ٣٠ (ب) ٣٠- (جـ) ٢٠ (د) ٣٨,٤

② أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٩ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، أثرت القوى التى مقاديرها ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٤ ، ١٠ نيوتن فى أ ب ، ب حـ ، ء حـ ، أ ء ، أ حـ على الترتيب فإن معيار مجموع عزوم هذه القوى بالنسبة للنقطة ب يساوى .... نيوتن. سم.

(أ) ٩٦ (ب) ٦٦ (جـ) ٨٤ (د) ٢٤

③ فى الشكل المقابل :



قرص مستدير قطره أ حـ طوله ١٠ سم

، أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم

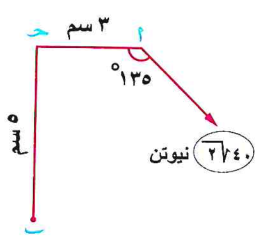
أثرت قوتان مقداراهما ٥ ، ٩ نيوتن

فى أ ب ، أ ء على الترتيب فإن :

$ج_م$ = ... نيوتن.سم.

(أ) ٧- (ب) ١٤- (جـ) ١٤ (د) ٤٧

④ فى الشكل المقابل :



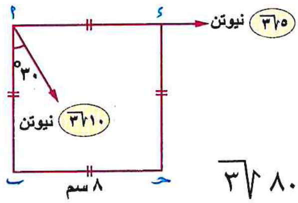
معيار عزم القوة ق = ٤٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن

حول النقطة ب يساوى .... نيوتن.سم.

(أ) ٣٢٠ (ب) ٢٠٠ $\sqrt{٢}$

(جـ) ١٢٠ $\sqrt{٢}$ (د) ٨٠ $\sqrt{١٧}$

⑤ **في الشكل المقابل :**



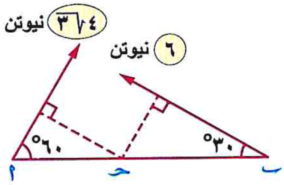
مجموع عزوم القوى حول

النقطة حـ = ... نيوتن.سم.

(أ) $٤٠\sqrt{٣}$ (ب) $١٢٠ - ٨٠\sqrt{٣}$

(جـ) $٨٠\sqrt{٣}$ (د) $١٢٠\sqrt{٣}$

⑥ **(استرشادى ٢٠٢٥) في الشكل المقابل :**



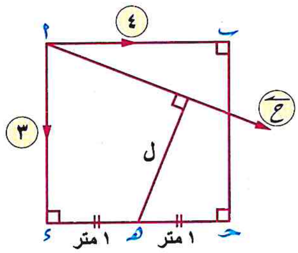
القياس الجبرى لمجموع عزمى القوتين

حول نقطة حـ = ... نيوتن.سم.

(أ) −١٢٠ (ب) ١٢٠

(جـ) ٢٤٠ (د) −٢٤٠

⑦ **(دور أول ٢٠١٩) في الشكل المقابل :**

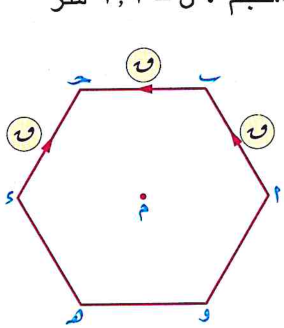


أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٢ متر ، أثرت القوتان اللتان مقدارهما ٤ ، ٣ ث.كجم فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{أ ء}$ على الترتيب فإذا كانت محصلتهما $\overleftarrow{ع}$ ، ل طول العمود المرسوم من هـ على خط عمل $\overleftarrow{ع}$ فإن : ....

(أ) ع = ٥ ث.كجم ، ل = ١,٥ متر (ب) ع = ٥ ث.كجم ، ل = ١ متر

(جـ) ع = ٥ ث.كجم ، ل = $\sqrt{٢}$ متر (د) ع = ٥ ث.كجم ، ل = ١,٢ متر

⑧ **(دور ثان ٢٠١٨) في الشكل المقابل :**



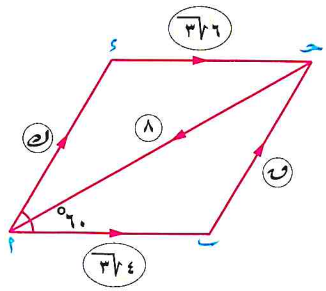
أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم طول ضلعه (ل)

إذا أثرت ثلاث قوى متساوية المقدار كل منها (ق) فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{ء حـ}$

فإن مجموع عزم هذه القوى حول م (مركز السداسى) يساوى .... وحدة عزم.

(أ) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ ق ل (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ق ل (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ق ل (د) $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ ق ل

⑨ في الشكل المقابل :



أ ب ح ء معين طول ضلعه ل سم ، ق (د أ) = ٦٠°

أثرت القوى ٤ $\sqrt{3}$ ، ق ، ٦ $\sqrt{3}$ ، ك ، ٨ نيوتن فى

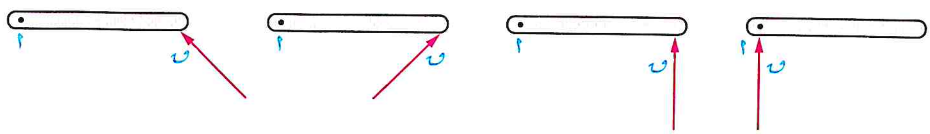
$\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{بح}$ ، $\overleftarrow{حء}$ ، $\overleftarrow{ءأ}$ ، $\overleftarrow{حأ}$

وكان ج$_{م}$ = صفر فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٢ $\sqrt{3}$ (ب) ٤ $\sqrt{3}$ (جـ) ٥ $\sqrt{3}$ (د) ٦ $\sqrt{3}$

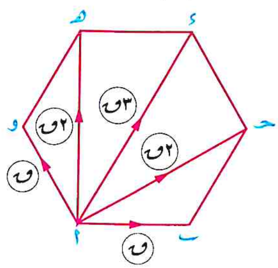
⑩ الأشكال التالية تمثل باب متصل بمفصل عند أ أثرت عليه قوة $\overleftarrow{ق}$

أى من هذه الأشكال تكون القوة $\overleftarrow{ق}$ لها أكبر عزم حول أ ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

⑪ إذا كان مجموع عزوم القوى المؤثرة



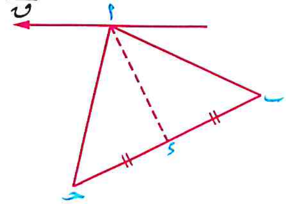
فى الشكل السداسى المنتظم المقابل

ينعدم حول نقطة فى المستوى مثل ن

فإن : ن ∈ ....

(أ) $\overleftrightarrow{أح}$ (ب) $\overleftrightarrow{أء}$ (جـ) $\overleftrightarrow{أهـ}$ (د) $\overleftrightarrow{أو}$

⑫ في الشكل المقابل :



إذا أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ فى مستوى المثلث أ ب حـ

وكان ج$_{ب}$ = ٨ نيوتن.سم ، ج$_{ح}$ = ١٢ نيوتن.سم

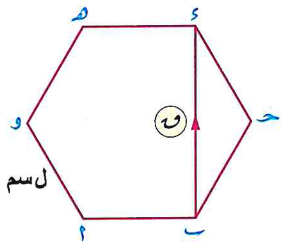
فإن : ج$_{ء}$ = ... نيوتن. سم.

(أ) ٤ (ب) ١٠ (جـ) ٢٠ (د) ٤٠

(١٣) الشكل المقابل يمثل شكل سداسى منتظم طول ضلعه ل سم

أثرت قوة مقدارها ق فى اتجاه $\overleftarrow{ب ء}$

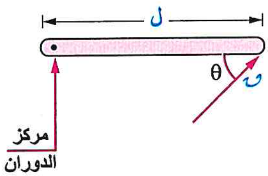
فإن : $\overleftarrow{ج}_{أ} + \overleftarrow{ج}_{ب} + \overleftarrow{ج}_{ء} =$ ....



(أ) $ج_{حـ}$ (ب) $ج_{هـ}$ (جـ) $-ج_{حـ}$ (د) $ج_{و}$

(١٤) فى الشكل المقابل :

قضيب طوله ل يمكنه الدوران بسهولة حول نقطة عند أحد نهايتيه. أثرت على نهايته الأخرى قوة مقدارها ق وتميل على القضيب بزاوية قياسها θ

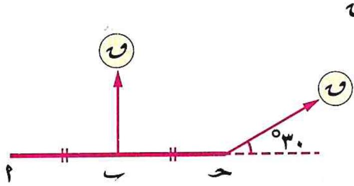


فإذا كانت $\overleftarrow{ق}$ يجب أن تكون عمودية على القضيب فعلى أى بُعد من مركز الدوران يمكن أن تؤثر ق بحيث يكون لها نفس العزم ؟

(أ) ل حا θ (ب) ل حتا θ (جـ) ل (د) ل طا θ

(١٥) فى الشكل المقابل :

إذا كان القياس الجبرى لعزم القوة التى مقدارها ق العمودية على القضيب حول نقطة أ يساوى $ج_١$ والقياس الجبرى لعزم القوة التى مقدارها ق المائلة حول نقطة أ يساوى $ج_٢$ فإن : ....

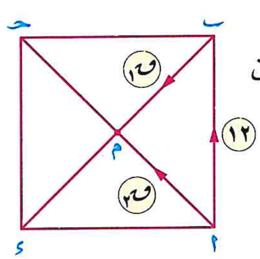


(أ) $ج_١ > ج_٢$ (ب) $ج_١ < ج_٢$ (جـ) $ج_١ = ج_٢$ (د) $ج_١ + ج_٢ = ٠$

(١٦) فى الشكل المقابل :

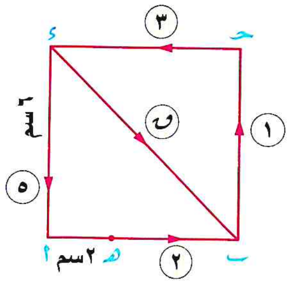
أ ب حـ ء مربع أثرت القوى التى مقاديرها ١٢ ، $ق_١$ ، $ق_٢$ نيوتن كما بالشكل فإذا كان القياس الجبرى لعزم محصلة هذه القوى حول النقطة م = ١٢٠ نيوتن.سم

فإن مساحة سطح المربع = ... سم^٢



(أ) ١٠٠ (ب) ٢٠٠ (جـ) ٣٠٠ (د) ٤٠٠

(١٧) (تجريبى ٢٠٢١) فى الشكل المقابل :



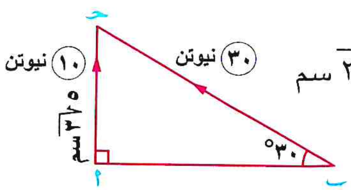
القوى المبينة بالشكل تؤثر فى أضلاع وقطر المربع أ ب حـ ء الذى طول ضلعه = ٦ سم.

فإذا كانت القوى مقدرة بالنيوتن ، ومحصلتها تؤثر فى نقطة هـ ∈ $\overline{\text{أب}}$ حيث أ هـ = ٢ سم

، فإن ق = ... نيوتن.

(أ) $\sqrt{2}$ (ب) ٢ $\sqrt{2}$ (جـ) ٨ $\sqrt{2}$ (د) ١٢ $\sqrt{2}$

(١٨) فى الشكل المقابل :



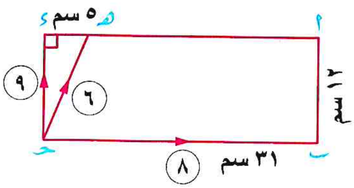
ق (∠ب) = ٣٠° ، ق (∠أ) = ٩٠° ، أ حـ = ٥ $\sqrt{3}$ سم

، ء ∈ $\overline{\text{أب}}$ بحيث كان جـ$_{ء}$ = صفر

فإن أ ء = ... سم.

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ٩

(١٩) فى الشكل المقابل :



مستطيل فيه : أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ٣١ سم

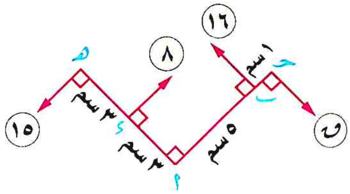
، ء هـ = ٥ سم ، أثرت مجموعة القوى

(مقاسة بالنيوتن) كما بالشكل فإن المجموع

الجبرى لعزوم هذه القوى حول أ تساوى .... نيوتن.سم.

(أ) -٣٢٧ (ب) -٢٧٣ (جـ) ٣٢٧ (د) ٥٧٤ $\frac{٥}{١٣}$

(٢٠) (دورثان ٢٠٢٣) فى الشكل المقابل :



تؤثر مجموعة من القوى المستوية المقاسة

بالنيوتن فى النقاط حـ ، ب ، ء ، هـ فإذا

كان المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول

نقطة أ = ٨٦ نيوتن.سم.

فإن مقدار ق = ... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٤٠ (د) ٨٠

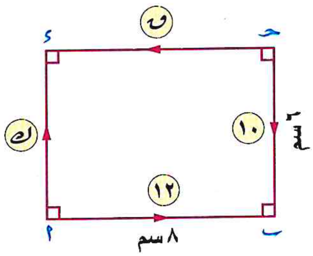
(٢١) أ ب حـ ء مستطيل أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ٦ سم

أثرت قوى مقاديرها ١٢ ، ١٠ ، ق ، ك نيوتن

في $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـب}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـء}}$ ، $\overleftarrow{\text{أء}}$ على الترتيب

فإذا كانت المحصلة تعمل في $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$

فإن : ق × ك = ...



(أ) ١٠٠ (ب) ١١٠ (جـ) ١٢٠ (د) ١٣٠

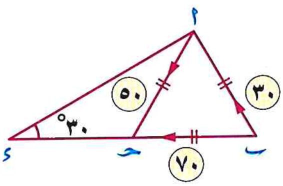
(٢٢) في الشكل المقابل :

أ ب = ب حـ = حـ أ = ١٢ سم ، ق (∠ أ ء ب) = ٣٠°

إذا أثرت القوى التي مقاديرها ٣٠ ، ٥٠ ، ٧٠ نيوتن

في $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ على الترتيب فإن مجموع

عزوم هذه القوى حول نقطة ء = ... نيوتن.سم.



(أ) ٦٠ $\sqrt{٣}$ (ب) −٦٠ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٣٦٠ $\sqrt{٣}$ (د) −٣٠٠ $\sqrt{٣}$

(٢٣) إذا كانت أ ، ب ، حـ ثلاث نقاط في مستوى القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ وكان : $ج_{\text{أ}} = ج_{\text{ب}} = ج_{\text{حـ}}$

فإن : ....

(أ) أ ب = ب حـ (ب) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية.

(جـ) أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة. (د) ب منتصف $\overline{\text{أحـ}}$

(٢٤) أ ب حـ ء متوازي أضلاع تقاطع قطراه في م ، $\overleftarrow{\text{ق}}$ قوة في مستوى المتوازي بحيث

$ج_{\text{م}} = ج_{\text{ب}}$ فإن : ....

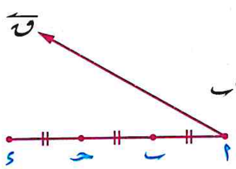
(أ) خط عمل $\overleftarrow{\text{ق}}$ يجب أن يمر بالنقطة م (ب) $ج_{\text{م}} = \frac{١}{٢} (ج_{\text{أ}} + ج_{\text{ب}})$

(جـ) $ج_{\text{حـ}} - ج_{\text{ء}}$ = صفر (د) خط عمل $\overleftarrow{\text{ق}}$ ينصف $\overline{\text{أب}}$

(٢٥) في الشكل المقابل :

إذا كان القياس الجبري لعزم $\overleftarrow{\text{ق}}$ حول كل من ب ، حـ ، ء هو $ج_{\text{ب}}$

، $ج_{\text{حـ}}$ ، $ج_{\text{ء}}$ على الترتيب أي من الجمل الآتية غير صحيح ؟



(أ) $ج_{\text{أ}} = ج_{\text{ب}} = ج_{\text{حـ}}$ (ب) $ج_{\text{ب}} + ج_{\text{حـ}} = ج_{\text{ء}}$

(جـ) $ج_{\text{ب}} + ج_{\text{ء}} = ٢ ج_{\text{حـ}}$ (د) $ج_{\text{ب}} : ج_{\text{حـ}} : ج_{\text{ء}}$ = ١ : ٢ : ٣

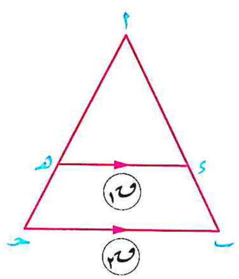
٢٦ أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع مساحة سطحه = ل وحدة مربعة ، م هى نقطة تلاقى متوسطاته فإذا كانت القوة $\overleftarrow{ق}$ ممثلة تمثيلًا تامًا بالمتجه $\overleftarrow{حـ ب}$ حيث وحدة قياس القوة ممثلة بوحدة الأطوال. فإن معيار عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة م تساوى .... وحدة عزم.

(أ) $\frac{١}{٢}$ ل (ب) $\frac{١}{٣}$ ل (جـ) $\frac{٢}{٣}$ ل (د) ل

٢٧ أ ب حـ ء شبه منحرف متساوى الساقين فيه : $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب حـ}$ ، أ ء = $\frac{١}{٢}$ ب حـ تقاطع قطراه فى النقطة ن فإذا كان مساحة Δ أ ن ء = ل وحدة مربعة وكانت القوة $\overleftarrow{ق}$ ممثلة تمثيلًا تامًا بالمتجه $\overleftarrow{ب حـ}$ حيث وحدة قياس القوة ممثلة بوحدة الأطوال فإن معيار عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ حول أ يساوى .... وحدة عزم.

(أ) ٣ ل (ب) ٦ ل (جـ) ٩ ل (د) ١٢ ل

٢٨ **فى الشكل المقابل :**



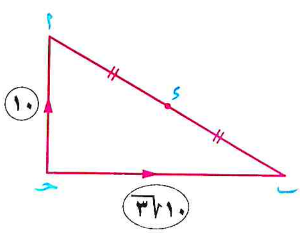
إذا كان القوتان $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ تمثلان بالمتجهان $\overleftarrow{هـ ء}$ ، $\overleftarrow{حـ ب}$ تمثيلًا تامًا حيث وحدة قياس القوة ممثلة بوحدة الأطوال

وكان أ ء : ء ب = ٣ : ٢

فإن : $\frac{\text{معيار عزم } ق_١ \text{ بالنسبة للنقطة أ}}{\text{معيار عزم } ق_٢ \text{ بالنسبة للنقطة أ}}$ = ...

(أ) ٣ : ٢ (ب) ٣ : ٥ (جـ) ٩ : ٤ (د) ٩ : ٢٥

٢٩ (تجريبى ٢٠٢١) **فى الشكل المقابل :**



أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٢ ق (∠ ب)

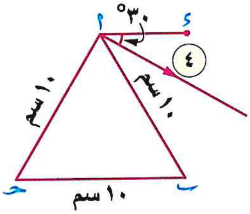
، ء منتصف $\overline{أ ب}$ ، وأثرت القوتان اللتان مقدارهما

١٠ نيوتن ، ١٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن فى $\overleftarrow{حـ أ}$ ، $\overleftarrow{حـ ب}$ على الترتيب.

فإذا كانت محصلة القوتين تمر بالنقطة ء فإن ق (∠ ب) = ...°

(أ) ٩٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٤٥ (د) ٣٠

(٣٠) (دور أول ٢٠٢١) في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٠ سم

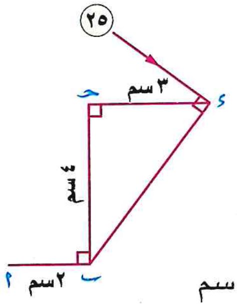
أثرت قوة $\overrightarrow{ق}$ التى مقدارها ٤ نيوتن فى نقطة أ

وتصنع مع $\overrightarrow{أ ء}$ زاوية قياسها ٣٠° ، $\overrightarrow{أ ء}$ // $\overline{حـ ب}$

فإن القياس الجبرى لعزم $\overrightarrow{ق}$ حول نقطة ب = ... نيوتن.سم.

(أ) ٢٠ (ب) −٢٠ (جـ) ٤٠ (د) −٤٠

(٣١) (دور ثان ٢٠٢١) في الشكل المقابل :



قوة $\overrightarrow{ق}$ مقدارها ٢٥ نيوتن تؤثر فى نقطة ء ،

حيث $\overrightarrow{ق}$ ⊥ $\overline{ء ب}$ ، فإذا كان ء حـ = ٣ سم

، ب حـ = ٤ سم ، أ ب = ٢ سم

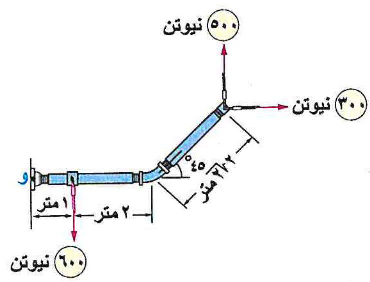
فإن القياس الجبرى لعزم $\overrightarrow{ق}$ حول أ يساوى .... نيوتن.سم

(أ) ١٢٥ (ب) ١٥٥ (جـ) −١٥٥ (د) −١٢٥

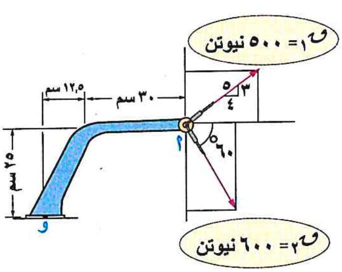
---

٢ في كل من الأشكال الآتية أوجد القياس الجبرى لمجموع عزوم القوى حول النقطة (و) :

(١)



(٢)



---

٣ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم . أثرت قوى مقاديرها ٣ ، ٥ ، ٨ ، ٥ ، ٢√٢ نيوتن فى اتجاهات $\overrightarrow{أ ب}$ ، $\overrightarrow{ب حـ}$ ، $\overrightarrow{حـ ء}$ ، $\overrightarrow{ء أ}$ ، $\overrightarrow{أ حـ}$ على الترتيب. أوجد مجموع عزوم القوى :

(١) بالنسبة للنقطة أ

(٢) بالنسبة للنقطة ب

(٣) بالنسبة لمركز المربع.

(٤) بالنسبة للنقطة هـ حيث هـ منتصف $\overline{ب حـ}$

«−١٣٠ ، −٣٠ ، −٨٠ ، −٣٠ نيوتن.سم»

٤ أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع ، طول ضلعه ٢٠ سم ، تؤثر القوى التى مقاديرها ١٠٠ ، ٢٠٠ ، ٣٠٠ نيوتن فى أ ب ، ب حـ ، أ حـ على الترتيب. **أوجد المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى :**

(١) حول نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث. (٢) حول منتصف ب حـ

«صفر ، ١٠٠٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن.سم»

---

٥ أ ب حـ ء معين طول ضلعه ١٢ سم ، ق (∠ أ) = ٦٠° ، أثرت القوى التى مقاديرها ١١ ، ٦ ، ٥ ، ٧ نيوتن فى ب أ ، ب حـ ، ء حـ ، ء ب على الترتيب.

أوجد المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى :

(١) حول أ (٢) حول م نقطة تقاطع قطرى المعين.

«٣٦ $\sqrt{٣}$ ، ٣٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن.سم»

---

٦ أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم طول ضلعه ١٠ سم أثرت قوى مقاديرها ٣ ، ٧ ، ٤ ، ٢ نيوتن فى أ ب ، حـ ب ، حـ ء ، هـ ء على الترتيب.

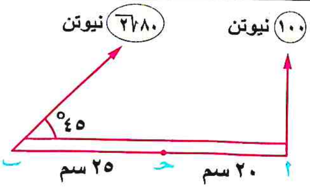
أوجد مجموع عزوم هذه القوى حول الرأس (و)

«٢٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن. سم»

---

٧ **فى الشكل المقابل :**

أثبت أن محصلة القوتين اللتان مقداراهما ١٠٠ نيوتن ، ٨٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن تمر بالنقطة حـ



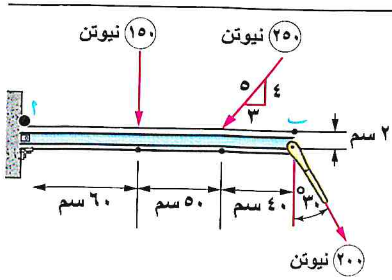
---

٨ **فى الشكل المقابل :**

ثلاث قوى تؤثر فى قضيب

أوجد مجموع عزوم القوى

بالنسبة لكل من النقطتين : أ ، ب



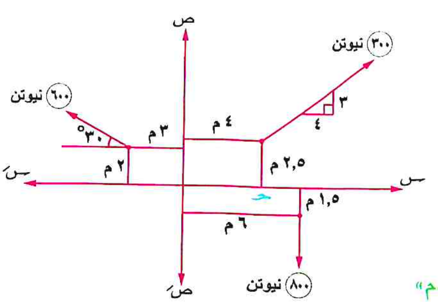
«−٨ , ٥٦٧٨٠ ، ٢١٧٠٠ نيوتن.سم»

---

٩ **فى الشكل المقابل :**

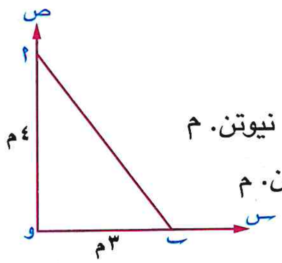
أوجد القياس الجبرى لمجموع عزوم القوى

بالنسبة للنقطة حـ



«−٨ , ٣٢٦٠ نيوتن.م»

١٠ في الشكل المقابل :



تؤثر القوة $\overleftarrow{ق}$ في المستوى س ص على المثلث أ و ب

فإذا كان القياس الجبرى لعزم $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة و يساوى ٨٤ نيوتن. م

، القياس الجبرى لعزمها بالنسبة للنقطة أ يساوى − ١٠٠ نيوتن. م

، والقياس الجبرى لعزمها بالنسبة للنقطة ب يساوى صفر.

عيِّن $\overleftarrow{ق}$

«٥٤ نيوتن ، تميل على $\overleftrightarrow{و س}$ بزاوية قياس ٤٠َ ١٤٨°»

---

١١ (دورأول ٢٠١١) أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه : ق (∠ أ) = ١٢٠° تؤثر قوى مقاديرها ٤ ، ٤ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ث. كجم في $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{أ حـ}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ على الترتيب. أثبت باستخدام العزوم أن خط عمل المحصلة يمر بمنتصف $\overline{ب حـ}$ ويوازى $\overleftrightarrow{أ حـ}$

---

١٢ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٦ سم ، هـ ∈ $\overline{ب حـ}$ حيث : ب هـ = ١ سم ، أثرت قوى مقاديرها ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ق نيوتن في $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ ، $\overleftarrow{ء أ}$ ، $\overleftarrow{أ حـ}$ على الترتيب

إذا كان خط عمل المحصلة يمر بالنقطة هـ **أوجد قيمة : ق**

«٨ $\sqrt{٢}$ نيوتن»

---

١٣ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم أثرت القوى التي مقاديرها ٥ ، ٨ ، ٦ ، ١٠ ثقل جم في $\overleftarrow{ب أ}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ ، $\overleftarrow{حـ أ}$ على الترتيب.

أوجد نقطة و ∈ $\overleftrightarrow{ب حـ}$ بحيث يكون مجموع عزوم القوى حول و = ٤٥ ثقل جم.سم في اتجاه أ ب حـ ء

«و ∈ $\overline{ب حـ}$ ، ب و = ٣ سم»

---

١٤ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، القوى التي مقاديرها ١٦ ، ١٤ ، ق ، ك ث.جم تؤثر في $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ ، $\overleftarrow{أ ء}$ على الترتيب . فإذا كان المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول كلٍ من حـ ومركز المستطيل يساوى صفرًا.

أوجد : ق ، ك

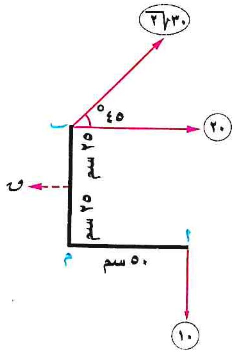
« $٩\frac{١}{٣}$ ، ٢٤ ث.جم»

---

١٥ (دورأول ٢٠٢٠) أ ب حـ ء شبه منحرف قائم الزاوية في ب ، $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب حـ}$ ، أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١٥ سم ، أ ء = ٩ سم ، أثرت قوى مقاديرها ق ، ٤٤ ، ٦٨ ث.جم في $\overleftarrow{ء أ}$ ، $\overleftarrow{ء حـ}$ ، $\overleftarrow{أ حـ}$ على الترتيب إذا كان خط عمل محصلة مجموعة القوى يمر بنقطة ب **فأوجد قيمة : ق**

«١٢٦ ث.جم»

١٦ ثنى قضيب $\overline{أب}$ طوله ١٠٠ سم عند نقطة منتصفه م بحيث أصبح $\overline{أم}$ عموديًا على $\overline{مب}$ أثرت القوى التى مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ $\sqrt{٢}$ ث. كجم عند الطرفين أ ، ب كما هو مبين بالشكل المقابل. ما هو مقدار القوة $\overleftarrow{ق}$ التى يجب أن تؤثر عند منتصف $\overline{مب}$ وفى الاتجاه الموضح بالشكل بحيث ينعدم المجموع الجبرى لعزوم القوى حول نقطة م ؟



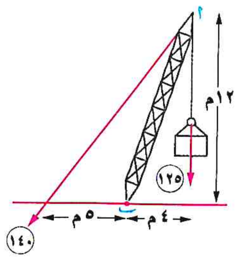
«١٢٠ ث.كجم»

---

١٧ في الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ تمثل رافعة لرفع البضائع إذا كان مقدار الشد فى الخيط يساوى ١٤٠ نيوتن ، وزن الصندوق ١٢٥ نيوتن.

أوجد مجموع عزمى القوتين بالنسبة للنقطة ب

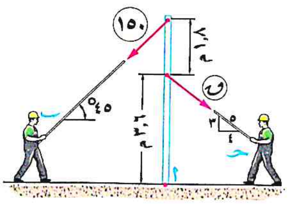


«٦٠ نيوتن.م»

---

١٨ في الشكل المقابل :

رجل عند الموضع ب يشد الحبل بقوة مقدارها ١٥٠ نيوتن فما هو مقدار القوة ق التى يجب أن يشد بها رجل أخر الحبل عند الموضع حـ بحيث يحفظ العمود من الدوران. أى يكون مجموع عزمى الشدين حول أ = صفر



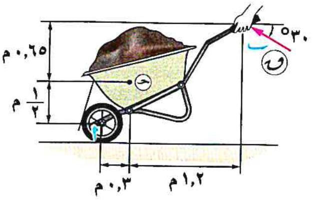
«١٩٨,٩ نيوتن»

---

١٩ في الشكل المقابل :

إذا كان مركز ثقل عجلة يدوية ومحتوياتها هو النقطة (حـ) وكان مقدار ق = ١٠٠ ث.كجم وكان مجموع عزمى قوة الوزن والقوة ق حول النقطة (أ) يساوى صفر.

احسب وزن العربة اليدوية بمحتوياتها.



«٥٨٢ ث.كجم»

٢٠ $\overset{\triangle}{}$ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ فى مستوى المثلث بحيث كان $ج_{أ}$ = $ج_{ب}$ = ٦٠ نيوتن. سم ، $ج_{حـ}$ = −٦٠ نيوتن.سم. أوجد مقدار $\overleftarrow{ق}$ وعيِّن خط عملها. «١٥ نيوتن»

---

٢١ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ١٦ سم أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ فى مستوى المستطيل ، فإذا كان عزم $\overleftarrow{ق}$ حول ب = عزم $\overleftarrow{ق}$ حول ء = −٢٤٠ نيوتن.سم ، عزم $\overleftarrow{ق}$ حول أ = ٢٤٠ نيوتن. سم فعيِّن مقدار واتجاه وخط عمل $\overleftarrow{ق}$ «ق = ٥٠ نيوتن»

---

٢٢ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٤,٥ سم ، ب حـ = ٦ سم ، أثرت مجموعة من القوى المستوية فى مستوى المستطيل فإذا كان المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول كلٍ من أ ، حـ يساوى ٧٢٠ ثقل كجم. سم ، المجموع الجبرى لعزومها حول ب يساوى −٢٤٠ ثقل كجم. سم فعيِّن مقدار واتجاه وخط عمل محصلة هذه القوى.

«ح = $\frac{٢}{٣}$٢٦٦ ثقل كجم ، توازى $\overline{أ حـ}$ ، تقطع $\overline{ب حـ}$ فى ن حيث ب ن = ١,٥ سم»

---

٢٣ النقط أ (٢ ، ٧) ، ب (٢ ، ١٠) ، حـ (س ، ص) هى رؤوس مثلث قائم الزاوية فى ب أثرت القوى التى مقاديرها ١٥ ، ١٤ ، ق ثقل كجم فى الأضلاع $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{حـ أ}$ على الترتيب ، فإذا كانت المحصلة تساوى ٦ ثقل كجم وتعمل فى الاتجاه الموجب لمحور السينات فأوجد باستخدام العزوم إحداثيي النقطة حـ وقيمة ق «(−٢ ، ١٠) ، ٢٥ ث.كجم»

---

٢٤ (مصر ١٩٩٣) أ ب حـ ء شبه منحرف قائم الزاوية عند كلٍ من أ ، ء فيه :

أ ء = حـ ء = ٤٠ سم ، أ ب = ٧٠ سم ، م ∈ $\overline{أ ب}$

بحيث : أ م = ٤٠ سم أثرت قوى مقاديرها ٢٥ ، ق ، $١٠\sqrt{٢}$ ، ٣٥ ث.جم

فى $\overleftarrow{حـ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ م}$ ، $\overleftarrow{حـ أ}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ على الترتيب وكان معيار محصلة هذه القوى ٥٠ ث.جم

أوجد ق ومعيار عزم محصلة المجموعة بالنسبة لنقطة أ «١٠ ث.جم ، ٤٠٠ ث.جم.سم»

مسائل تقيس مهارات التفكير

٢٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت معادلة خط عمل القوة $\overrightarrow{ق}$ هى $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، ٣) + ك (٤ ، ٥)

فإن عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة أ (١٠ ، ١٣) هو ....

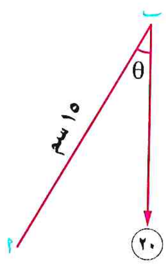
(أ) $\overrightarrow{صفر}$　(ب) ٢ $\overrightarrow{ع}$　(جـ) −٢ $\overrightarrow{ع}$　(د) −٤ $\overrightarrow{ع}$

(٢) تؤثر القوة $\overrightarrow{ق}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ − ٤ $\overrightarrow{ص}$ فى نقطة أ (٠ ، ٢) وكانت $\overrightarrow{ب حـ}$ = (−٤ ، −٢)

وكان طول العمود المرسوم من النقطة ب على خط عمل $\overrightarrow{ق}$ يساوى طول العمود المرسوم من النقطة حـ على خط عمل $\overrightarrow{ق}$ فإن : $\overrightarrow{ج_{ب}}$ + $\overrightarrow{ج_{حـ}}$ = ...

(أ) ٢ $\overrightarrow{ج_{ب}}$　(ب) $\frac{١}{٢}$ $\overrightarrow{ج_{ب}}$　(جـ) ٢ $\overrightarrow{ج_{حـ}}$　(د) $\overrightarrow{صفر}$

(٣) **فى الشكل المقابل :**

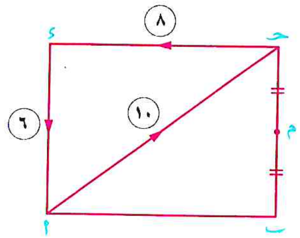


مقدار عزم القوة التى مقدارها ٢٠ نيوتن حول النقطة أ ∈ .... نيوتن.سم.

(أ) [٠ ، ١٥]　(ب) [٠ ، ٢٠]

(جـ) [٠ ، ٣٠]　(د) [٠ ، ٣٠٠]

(٤) **فى الشكل المقابل :**



أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ١٦ سم

، ب حـ = ١٢ سم ، م منتصف $\overline{ب حـ}$

، أثرت القوى التى مقاديرها ٦ ، ١٠ ، ٨ نيوتن

فى الاتجاهات $\overrightarrow{أ ء}$ ، $\overrightarrow{أ حـ}$ ، $\overrightarrow{حـ ء}$ على الترتيب

كما أثرت قوة مقدارها ٥ نيوتن عند م فإذا كان مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول ب يساوى ١١١ وحدة عزم فإن قياس الزاوية الحادة التى تميل بها القوة التى مقدارها ٥ نيوتن على $\overleftrightarrow{ب حـ}$ يساوى ....

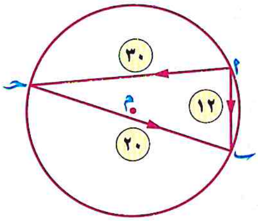
(أ) ٣٠°　(ب) ٦٠°　(جـ) ٤٥°　(د) طا$^{-١}$ $\frac{٤}{٣}$

(٥) إذا كانت : أ ، ب ، حـ ، ء نقط تقع على المستقيم ل واثرت قوة $\overrightarrow{ق}$ بحيث $\overrightarrow{ق}$ // المستقيم ل وكان : ٣ $ج_{أ}$ + ٢ $ج_{ب}$ = ٣٠ نيوتن.سم.

فإن : ٣ $ج_{ب}$ − ٢ $ج_{حـ}$ + $ج_{ء}$ = ... نيوتن.سم.

(أ) ١٢　(ب) ١٥　(جـ) ١٨　(د) ٢٤

⑥ في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة فيه :

أ ب = ١٠ سم ، أ حـ = ٢٤ سم

، ب حـ = ٨ $\sqrt{١٠}$ سم.

وطول نصف قطرها ١٣ سم أثرت القوى ١٢ ، ٣٠ ، ٢٠ ثقل جرام

في $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{أ حـ}$ ، $\overleftarrow{حـ ب}$ على الترتيب فإن المجموع الجبري لعزوم هذه القوى حول مركز الدائرة = ... وحدة عزم.

(أ) ٣٣ (ب) ١٣٢ (جـ) ٦٦ (د) ٣٥٤

⑦ إذا أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ في مستوى Δ أ ب حـ وكان $ج_م$ = ٢ $ج_ب$ وكانت ء منتصف $\overline{أ ب}$

فإن : $ج_ب$ − $ج_م$ = ... $ج_ء$

(أ) $\frac{-١}{٢}$ (ب) $\frac{-٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) ٢

⑧ إذا أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ في مستوى المستطيل أ ب حـ ء وكانت م هي نقطة تقاطع قطريه

وكان $ج_أ$ = −٢٨ نيوتن.متر ، $ج_م$ = ٢٤ نيوتن.متر

فإن : $ج_{حـ}$ = ... نيوتن.متر.

(أ) −٤ (ب) ١٠ (جـ) ٢٠ (د) ٧٦

⑨ إذا كانت $\overleftarrow{ق}$ قوة في مستوى متوازي الأضلاع أ ب حـ ء وكان $ج_أ$ = −١٨ وحدة عزم

، $ج_ب$ = $ج_ء$ = ٣٢ وحدة عزم. فإن : $ج_{حـ}$ = ... وحدة عزم.

(أ) ٥٠ (ب) ٨٢ (جـ) ٤٦ (د) ١٤

⑩ إذا أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ في مستوى Δ أ ب حـ وكانت ء ∈ $\overline{ب حـ}$ حيث $\frac{ب ء}{ء حـ} = \frac{١}{٥}$

وكان : $ج_ب$ = ١٠ نيوتن.سم ، $ج_ء$ = ٦ نيوتن.سم.

فإن : $ج_{حـ}$ = ... نيوتن.سم.

(أ) ١٦ (ب) ١٤ (جـ) −١٤ (د) −٤٠

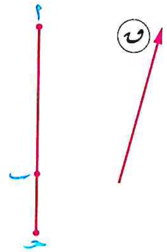
⑪ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب ، أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٤ سم ، $\overleftarrow{ق}$ قوة تؤثر

في مستوى المثلث وتوازي $\overline{أ حـ}$ فإذا كان : ق = ١٥ نيوتن

فإن : $\| \overleftarrow{ج_ب} - \overleftarrow{ج_أ} \|$ = ... نيوتن.سم.

(أ) ٣٦ (ب) ١٢ (جـ) ٤٥ (د) ٦٠

(١٢) في الشكل المقابل :



أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة

فإذا كان : $\overleftarrow{\text{ج}}_{\text{أ}} = ٢\ \overleftarrow{\text{ج}}_{\text{ب}} = ٣\ \overleftarrow{\text{ج}}_{\text{جـ}}$

فإن : أ ب : ب جـ = ...

(أ) ٣ : ١ (ب) ٣ : ٢ (جـ) ٤ : ٣ (د) ٢ : ١

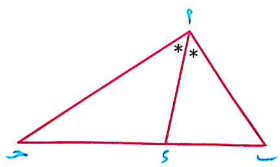
(١٣) أ ب جـ ء هـ و شكل سداسي منتظم ، القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ تؤثر في مستوى الشكل

وكان : $\text{ج}_{\text{أ}}$ = −٢٠ نيوتن. سم ، $\text{ج}_{\text{ء}}$ = ٨٠ نيوتن.سم.

فإن : $\text{ج}_{\text{أ}} + \text{ج}_{\text{ب}} + \text{ج}_{\text{ء}} + \text{ج}_{\text{هـ}}$ = ... نيوتن.سم.

(أ) −٢٠٠ (ب) ٢٠٠ (جـ) ٦٠ (د) ١٢٠

(١٤) في الشكل المقابل :



إذا كان $\overleftarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ أ والقوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ تقع في مستوى

المثلث أ ب جـ وكان : $\text{ج}_{\text{ب}}$ = ٥ وحدة عزم

، $\text{ج}_{\text{جـ}}$ = ١٠ وحدة عزم ، $\text{ج}_{\text{ء}}$ = ٧ وحدة عزم وكان : أ ب = ٨ سم

فإن : أ جـ = ... سم.

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٦

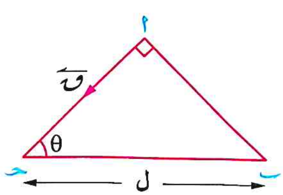
(١٥) إذا كانت : أ ، ب نقطتين في مستوى خط عمل القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ بحيث كان : $\overleftarrow{\text{ج}}_{\text{أ}} = -٨\ \overleftarrow{\text{ى}}$

، $\overleftarrow{\text{ج}}_{\text{ب}} = ١٢\ \overleftarrow{\text{ى}}$ فإن خط عمل $\overleftarrow{\text{ق}}$ يقطع $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ في جـ حيث ....

(أ) أ جـ : جـ ب = ٢ : ١ (ب) أ جـ : أ ب = ٢ : ٥

(جـ) أ جـ : جـ ب = ٣ : ٢ (د) أ جـ : أ ب = ٢ : ٣

(١٦) في الشكل المقابل :



أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ ، القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ ممثلة

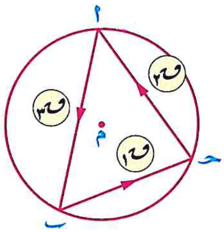
تمثيلًا تامًا بالمتجه $\overleftarrow{\text{أجـ}}$ فإذا كان طول كل من

$\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ يتغير بتغير θ فإن أكبر عزم للقوة $\overleftarrow{\text{ق}}$

حول النقطة ب يكون عندما θ = ...

(أ) ٩٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ٣٠°

(١٧) فى الشكل المقابل :



إذا أثرت القوى التى مقاديرها $ق_1$ ، $ق_2$ ، $ق_3$ فى الأضلاع $\overleftarrow{ب ح}$ ، $\overleftarrow{ح أ}$ ، $\overleftarrow{أ ب}$ على الترتيب فى Δ أ ب ح وكانت محصلة هذه القوى تمر بالنقطة «م» مركز الدائرة الخارجة للمثلث فأى من العلاقات الآتية تكون صحيحة ؟

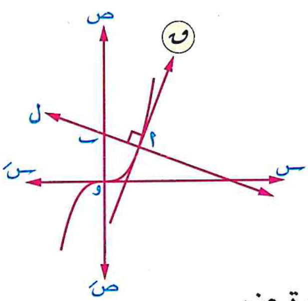
(أ) $ق_1$ جتا أ + $ق_2$ جتا ب + $ق_3$ جتا ح = ٠

(ب) $ق_1$ جا أ + $ق_2$ جا ب + $ق_3$ جا ح = ٠

(ﺟ) ($ق_1$ + $ق_2$ + $ق_3$) (جتا أ + جتا ب + جتا ح) = ٠

(د) $ق_1$ $ق_2$ جتا ح + $ق_2$ $ق_3$ جتا أ + $ق_3$ $ق_1$ جتا ب = ٠

(١٨) فى الشكل المقابل :

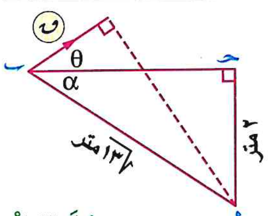


إذا أثرت قوة مقدارها ٦ $\sqrt{١٠}$ نيوتن فى اتجاه المماس للمنحنى ص = س^٣ عند النقطة أ (١ ، ١) كما بالشكل المقابل وإذا كان المستقيم ل عمودى على مماس المنحنى عند النقطة (١ ، ١) فإن مقدار عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة ب يساوى .... وحدة عزم.

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (ﺟ) ٢ $\sqrt{١٠}$ (د) ١٨٠

---

(٢٦) فى الشكل المقابل :



إذا كانت القوة ق = ٤٠٠ نيوتن ، ٠° ≤ θ ≤ ١٨٠°

أوجد قياس الزاوية θ التى تجعل معيار عزم القوة ق حول أ أصغر ما يمكن.

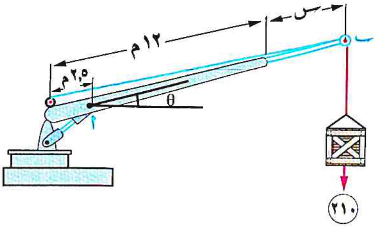
«١٤٦° ١٩َ»

---

(٢٧) أ ب ح مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٢٠ سم ، ء منتصف $\overline{أ ب}$ رسم $\overleftarrow{ء هـ}$ ⊥ $\overleftarrow{ب ح}$ يقطعه فى هـ ، أثرت القوى $ق_1$ ، $ق_2$ ، $ق_3$ فى أضلاع المثلث فإذا كانت محصلة هذه القوى تساوى ١٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن وخط عملها $\overleftarrow{ء هـ}$ أوجد هذه القوى مقدارًا واتجاهًا.

«١٨ ، ٦ ، ٦ نيوتن»

٢٨ الشكل المقابل يوضح رافعة يمكن تعديل زاوية ميلها θ حيث $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ والجزء الأمامى منها يتمدد بطول ـس متر حيث $0 \leq$ ـس ≤ 4 معلق فيها صندوق كتلته ٢١٠ كجم

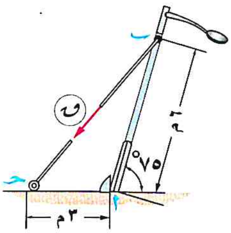


أوجد معيار العزم المتولد عند نقطة أ كدالة فى θ ، ـس ، أوجد كذلك قيم كل من θ ، ـس عندما يأخذ العزم عند أ أكبر قيمة له وأوجد هذه القيمة. «٢٨٣٥ ث.كجم.متر»

---

٢٩ فى الشكل المقابل :

أوجد مقدار القوة ف التى يجب أن تؤثر فى الكابل لتعطى عزم حول نقطة أ مقداره ١٥٠٠ نيوتن.متر «٦٣٦ نيوتن»



الوحدة الثانية

القوى المستوية

الدرس 1 محصلة القوى المتوازية المستوية.

الدرس 2 اتزان مجموعة من القوى المستوية.

الدرس **1**

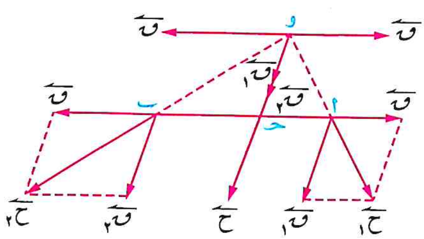
محصلة القوى المتوازية المستوية.

القوى المتوازية المستوية هى القوى التى تتوازى خطوط عملها وتقع جميعًا فى مستوى واحد.

وسوف نتعرف فى هذا الدرس على كيفية تعيين محصلة القوى المتوازية المستوية التى تؤثر فى جسم متماسك تعيينًا تامًا (مقدارًا واتجاهًا ونقطة تأثير).

أولًا محصلة قوتين متوازيتين مستويتين

الحالة الأولى القوتان متحدتا الاتجاه :



بفرض أن $\overrightarrow{\text{ق}}_1$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_2$ قوتان متوازيتان ويعملان فى نفس الاتجاه ويؤثران فى جسم متماسك فى نقطتين أ ، ب ومحصلتهما $(\overrightarrow{\text{ح}})$

ولتحديد المحصلة تحديدًا تامًا نقوم بالخطوات التالية :

* نفرض قوتين $\overrightarrow{\text{ق}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}$ تؤثران فى أ ، ب «متساويتان فى المقدار ومتضادين فى الاتجاه» أى ليس لهما تأثير
* $\overrightarrow{\text{ح}}_1$ هى محصلة $\overrightarrow{\text{ق}}_1$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}$ عند أ   * $\overrightarrow{\text{ح}}_2$ هى محصلة $\overrightarrow{\text{ق}}_2$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}$ عند ب
* نفرض أن خطى عمل $\overrightarrow{\text{ح}}_1$ ، $\overrightarrow{\text{ح}}_2$ يتقاطعان فى النقطة (و)
* استبدل $\overrightarrow{\text{ح}}_1$ عند النقطة (و) بمركبتيها $\overrightarrow{\text{ق}}_1$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}$

* استبدل $\overrightarrow{ح_٢}$ عند النقطة (و) بمركبتيها $\overrightarrow{ق_٢}$ ، $\overrightarrow{ق}$

* نلاحظ أن القوى المؤثرة عند (و) هى :

- $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ وتعملان فى اتجاه $\overrightarrow{وحـ}$ الموازى لخط عمل القوتين الأصليتين.
- $\overrightarrow{ق}$ ، $\overrightarrow{ق}$ وتعملان فى اتجاهين متضادين أى ليس لهما تأثير

$\therefore$ تأثير $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ عند النقطة (و) هو نفس تأثير $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ عند أ ، ب

وبالتالى $\boxed{\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢}}$ ويؤثر فى اتجاه $\overrightarrow{وحـ}$

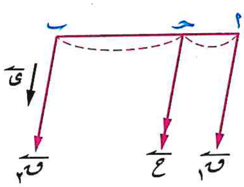
وحيث أن القوى $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ ، $\overrightarrow{ح}$ متوازية فإن : $\frac{ق}{ق_١} = \frac{أحـ}{وحـ}$ (١) ، $\frac{ق}{ق_٢} = \frac{بحـ}{وحـ}$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) : $\therefore \frac{ق_١}{ق_٢} = \frac{بحـ}{أحـ}$ $\therefore$ $\boxed{ق_١ \times أحـ = ق_٢ \times بحـ}$

قاعدة

محصلة قوتين متوازيتين ومتحدتى الاتجاه هى قوة لها نفس اتجاه القوتين ومعيارها يساوى مجموع معيارى القوتين ويقسم خط عملها المسافة بين خطى عمل القوتين بنسبة عكسية لمعياريهما.

إذا كانت القوتان $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ فى نفس الاتجاه وتؤثران فى النقطتين أ ، ب على الترتيب من جسم متماسك فإن : $\overrightarrow{ح}$ (محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$) $= \overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢}$



فإذا كان : $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه القوتين

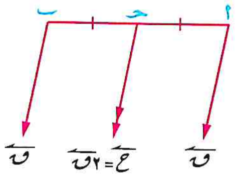
فإن : $\overrightarrow{ح} = ق_١ \overrightarrow{ى} + ق_٢ \overrightarrow{ى} = (ق_١ + ق_٢) \overrightarrow{ى}$

وتتعين المحصلة تعييناً تاماً كما يلى :

- مقدار المحصلة : $\boxed{ح = ق_١ + ق_٢}$ • اتجاه المحصلة : $\boxed{\text{فى نفس اتجاه القوتين}}$
- نقطة تأثير المحصلة : حـ تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بحيث $\boxed{ق_١ \times أحـ = ق_٢ \times بحـ}$
- ومن قوانين التناسب يمكن استنتاج أن : $\boxed{\frac{ق_١}{بحـ} = \frac{ق_٢}{أحـ} = \frac{ح}{أب}}$

ملاحظة

إذا كانت القوتان $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ متحدتين فى الاتجاه ومتساويتين فى المقدار ومقدار كل منهما يساوى $ق$ تؤثران فى نقطتين مختلفتين أ ، ب من جسم متماسك



فإن : • مقدار المحصلة : $ح = ٢ ق$

• اتجاه المحصلة : فى نفس اتجاه القوتين

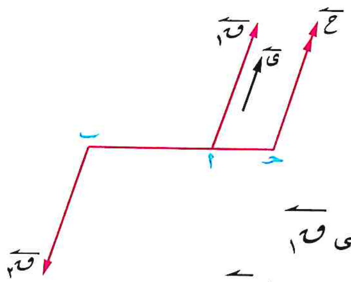
• نقطة تأثير المحصلة : حـ منتصف $\overline{أب}$

الحالة الثانية القوتان متضادتان فى الاتجاه :

قاعدة

محصلة قوتين متوازيتين ومتضادتين فى الاتجاه وغير متساويتين فى المعيار هى قوة فى اتجاه القوة الأكبر معيارًا ويساوى معيارها الفرق بين معياريهما ويقسم خط عملها المسافة بين خطى عمل القوتين من الخارج من ناحية القوة الأكبر معيارًا بنسبة عكسية لمعياريهما.

إذا كانت القوتان $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ متضادتين فى الاتجاه وتؤثران فى النقطتين أ ، ب على الترتيب من جسم متماسك وكان $ق_١ > ق_٢$



فإن : $\overleftarrow{ح}$ (محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$) $= \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢}$

فإذا كان : $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه القوة الأكبر معيارًا وهى $\overleftarrow{ق_١}$

فإن : $\overleftarrow{ح} = ق_١ \overleftarrow{ى} + ق_٢ (-\overleftarrow{ى}) = ق_١ \overleftarrow{ى} - ق_٢ \overleftarrow{ى} = (ق_١ - ق_٢) \overleftarrow{ى}$

وتتعين المحصلة تعيينًا تامًا كما يلى :

• مقدار المحصلة : $ح = |ق_١ - ق_٢|$

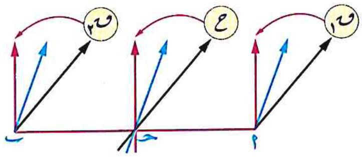
• اتجاه المحصلة : فى اتجاه القوة الأكبر مقدارًا

• نقطة تأثير المحصلة : حـ تقسم $\overline{أب}$ من الخارج بحيث $ق_١ \times أحـ = ق_٢ \times بحـ$

• ومن قوانين التناسب نجد أن : $\frac{ق_١}{بحـ} = \frac{ق_٢}{أحـ} = \frac{ح}{أب}$

ملاحظة

إذا كانت ا ، ب هما نقطتى تأثير القوتين المتوازيتين اللتين مقداراهما $ق_١$ ، $ق_٢$ ومحصلتهما (ع) وفى كل حالة يتغير فيها ميل القوتين يتغير ميل المحصلة تبعًا لذلك ونلاحظ أن جميع خطوط عمل المحصلة الناتجة من كل حالة تتقاطع جميعًا فى نقطة واحدة تقع على $\overleftrightarrow{اب}$ وتسمى نقطة تأثير المحصلة.



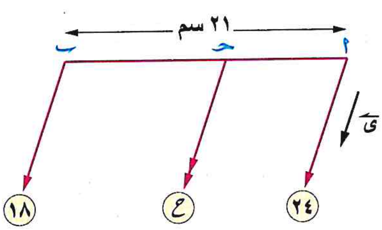
مثال ١

قوتان متوازيتان مقداراهما ٢٤ ، ١٨ نيوتن تؤثران فى النقطتين ا ، ب على الترتيب من جسم متماسك حيث : اب = ٢١ سم. أوجد مقدار واتجاه محصلتهما وبُعد نقطة تأثيرها عن النقطة ا إذا كانت :

(١) القوتان فى اتجاه واحد. (٢) القوتان فى اتجاهين متضادين.

الحـــل

(١) القوتان فى اتجاه واحد :



بفرض أن $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه القوتين

∴ $\overleftarrow{ق_١}$ = ٢٤ $\overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = ١٨ $\overleftarrow{ى}$

∴ $\overleftarrow{ع}$ = $\overleftarrow{ق_١}$ + $\overleftarrow{ق_٢}$ = ٢٤ $\overleftarrow{ى}$ + ١٨ $\overleftarrow{ى}$ = ٤٢ $\overleftarrow{ى}$

∴ مقدار المحصلة ع = ٤٢ نيوتن ، اتجاه المحصلة فى نفس اتجاه القوتين

وبفرض أن المحصلة تؤثر فى النقطة ح ∈ $\overline{اب}$

∴ $ق_١$ × ا ح = $ق_٢$ × ب ح

∴ ٢٤ × ا ح = ١٨ × (٢١ − ا ح) ، وبالقسمة على ٦

∴ ٤ × ا ح = ٣ (٢١ − ا ح) ∴ ٤ ا ح = ٦٣ − ٣ ا ح

∴ ٧ ا ح = ٦٣ ∴ ا ح = ٩ سم

∴ بُعد نقطة تأثير المحصلة عن النقطة ا = ٩ سم

حل آخر

$\frac{٢٤}{ب ح} = \frac{١٨}{ا ح} = \frac{٤٢}{٢١}$

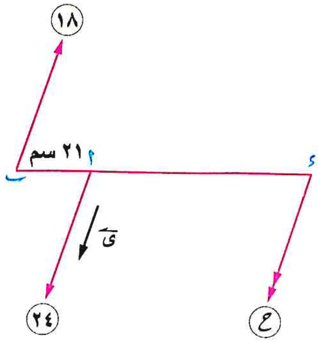
∴ ا ح = ٩ سم.

٢) القوتان فى اتجاهين متضادين :

بفرض أن $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه القوة الأكبر مقدارًا أى القوة التى مقدارها ٢٤ نيوتن

لاحظ أن

المحصلة تكون أقرب إلى القوة الأكبر مقدارًا



$\therefore$ $\overleftarrow{ق_{١}} = ٢٤ \, \overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ق_{٢}} = -١٨ \, \overleftarrow{ى}$

$\therefore$ $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق_{١}} + \overleftarrow{ق_{٢}} = ٢٤ \, \overleftarrow{ى} + (-١٨ \, \overleftarrow{ى}) = ٦ \, \overleftarrow{ى}$

$\therefore$ مقدار المحصلة : ح = ٦ نيوتن

، اتجاه المحصلة فى اتجاه القوة التى مقدارها ٢٤ نيوتن

وبفرض أن المحصلة تؤثر فى النقطة ء $\in \overleftrightarrow{ب أ}$ بحيث ء $\notin \overline{أ ب}$

$\therefore$ $ق_{١} \times$ أء $= ق_{٢} \times$ ءب

$\therefore$ ٢٤ × أء = ١٨ × (٢١ + أء) ، بالقسمة على ٦

$\therefore$ ٤ × أء = ٣ × (٢١ + أء) $\therefore$ ٤ أء = ٦٣ + ٣ أء

$\therefore$ أء = ٦٣ سم

$\therefore$ بُعد نقطة تأثير المحصلة عن النقطة أ = ٦٣ سم

حل آخر

$\frac{٦}{٢١} = \frac{١٨}{أء} = \frac{٢٤}{ءب}$

$\therefore$ أء = ٦٣ سم.

ملاحظة

يمكن تحديد مقدار واتجاه محصلة قوتين متوازيتين دون الإشارة إلى متجه الوحدة $\overleftarrow{ى}$ وذلك بتطبيق قاعدتى إيجاد المحصلة السابق ذكرهما ، ففى المثال السابق :

١) إذا كانت القوتان فى اتجاه واحد فإن : ح = $ق_{١} + ق_{٢}$ = ٢٤ + ١٨ = ٤٢ نيوتن

واتجاه المحصلة فى نفس اتجاه القوتين.

٢) إذا كانت القوتان فى اتجاهين متضادين فإن : ح = $ق_{١} - ق_{٢}$ حيث $ق_{١} > ق_{٢}$

$\therefore$ ح = ٢٤ − ١٨ = ٦ نيوتن

واتجاه المحصلة فى نفس اتجاه القوة ذات المقدار الأكبر وهو ٢٤ نيوتن.

مثال ٢

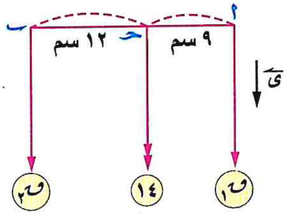
قوتان $\overleftarrow{ق}_{١}$ ، $\overleftarrow{ق}_{٢}$ متوازيتان وخط عمل محصلتهما يبعد عن خط عمل الأولى بمقدار ٩ سم وعن خط عمل الثانية بمقدار ١٢ سم فإذا كان مقدار المحصلة ١٤ نيوتن

فأوجد $\overleftarrow{ق}_{١}$ ، $\overleftarrow{ق}_{٢}$ إذا كانتا :

(١) في اتجاه واحد. (٢) في اتجاهين متضادين.

الحل

(١) $\overleftarrow{ق}_{١}$ ، $\overleftarrow{ق}_{٢}$ في اتجاه واحد :



∴ المحصلة في اتجاههما وخط عملها يقع بين خطى عملهما

وبفرض أن $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة في اتجاه القوتين

∴ $\overleftarrow{ق}_{١} = ق_{١}\,\overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ق}_{٢} = ق_{٢}\,\overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ح} = ١٤\,\overleftarrow{ى}$

∴ $١٤\,\overleftarrow{ى} = (ق_{١} + ق_{٢})\,\overleftarrow{ى}$ ∴ $ق_{١} + ق_{٢} = ١٤$ (١)

، $ق_{١} \times ٩ = ق_{٢} \times ١٢$ ∴ $ق_{٢} = \frac{٣}{٤}\,ق_{١}$ (٢)

وبالتعويض من (٢) في (١) :

∴ $ق_{١} + \frac{٣}{٤}\,ق_{١} = ١٤$ ∴ $\frac{٧}{٤}\,ق_{١} = ١٤$

∴ $ق_{١} = ٨$ نيوتن ، $ق_{٢} = ٦$ نيوتن

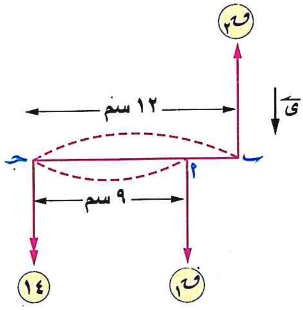
∴ $\overleftarrow{ق}_{١} = ٨\,\overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ق}_{٢} = ٦\,\overleftarrow{ى}$

حل آخر

∵ $\frac{ق_{١}}{١٢} = \frac{ق_{٢}}{٩} = \frac{١٤}{٢١}$

∴ $ق_{١} = ٨$ ، $ق_{٢} = ٦$

(٢) $\overleftarrow{ق}_{١}$ ، $\overleftarrow{ق}_{٢}$ في اتجاهين متضادين :



∵ خط عمل المحصلة أقرب للقوة الأولى منه للقوة الثانية

∴ $ق_{١} > ق_{٢}$ ، $\overleftarrow{ق}_{١}$ في اتجاه $\overleftarrow{ح}$

وبفرض أن $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة في اتجاه $\overleftarrow{ح}$

∴ $\overleftarrow{ح} = ١٤\,\overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ق}_{١} = ق_{١}\,\overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ق}_{٢} = -ق_{٢}\,\overleftarrow{ى}$

∴ $١٤\,\overleftarrow{ى} = ق_{١}\,\overleftarrow{ى} - ق_{٢}\,\overleftarrow{ى} = (ق_{١} - ق_{٢})\,\overleftarrow{ى}$

∴ $ق_{١} - ق_{٢} = ١٤$ (١)

، $\text{ق}_1 \times ٩ = \text{ق}_2 \times ١٢$ $\therefore \text{ق}_2 = \frac{٣}{٤}\,\text{ق}_1$ (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) :

$\therefore \text{ق}_1 - \frac{٣}{٤}\,\text{ق}_1 = ١٤$ $\therefore \text{ق}_1 = ٥٦$ نيوتن

، $\text{ق}_2 = ٤٢$ نيوتن

$\therefore \overleftarrow{\text{ق}_1} = ٥٦\,\overleftarrow{\text{ى}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2} = -٤٢\,\overleftarrow{\text{ى}}$

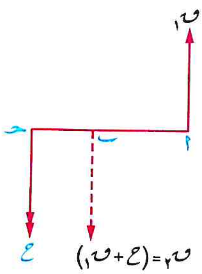
حل آخر

$\because \frac{\text{ق}_1}{١٢} = \frac{\text{ق}_2}{٩} = \frac{١٤}{٣}$

$\therefore \text{ق}_1 = ٥٦$ ، $\text{ق}_2 = ٤٢$

ملاحظة هامة

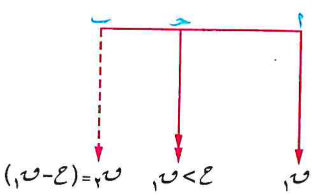
إذا عُلمت إحدى قوتين متوازيتين $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ وعُلمت محصلتهما $\overleftarrow{\text{ح}}$ فلتعيين القوة الثانية $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ نراعى مايلى :



أولاً : إذا كانت $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{ح}}$ فى اتجاهين متضادين فإن :

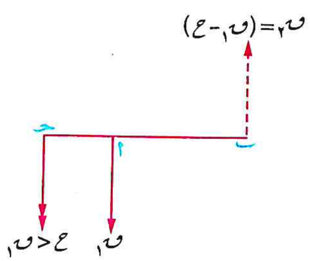
* $\text{ق}_2 = \text{ح} + \text{ق}_1$
* خط عمل $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ يقع بين خطى عمل $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{ح}}$
* $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ فى نفس اتجاه $\overleftarrow{\text{ح}}$

ثانيًا : إذا كانت $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{ح}}$ فى اتجاه واحد :



(أ) وكان $\text{ح} > \text{ق}_1$ فإن :

* $\text{ق}_2 = \text{ح} - \text{ق}_1$
* خط عمل $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ يقع خارج خطى عمل $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{ح}}$ من ناحية $\overleftarrow{\text{ح}}$
* $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ فى نفس اتجاه $\overleftarrow{\text{ح}}$



(ب) وكان $\text{ح} < \text{ق}_1$ فإن :

* $\text{ق}_2 = \text{ق}_1 - \text{ح}$
* خط عمل $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ يقع خارج خطى عمل $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{ح}}$ من ناحية $\overleftarrow{\text{ق}_1}$
* $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ فى اتجاه مضاد لاتجاه $\overleftarrow{\text{ق}_1}$

مثال ٣

قوتان متوازيتان $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ ومقداراهما ٩ ، ق نيوتن على الترتيب ومقدار محصلتهما ٢١ نيوتن ، فإذا كان البُعد بين خطى عمل $\overrightarrow{ق_١}$ والمحصلة $\overrightarrow{ح}$ يساوى ٢٤ سم

فعيِّن مقدار واتجاه خط عمل $\overrightarrow{ق_٢}$ فى الحالتين :

① $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ح}$ فى اتجاه واحد. ② $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ح}$ فى اتجاهين متضادين.

الحل

① $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ح}$ فى اتجاه واحد :

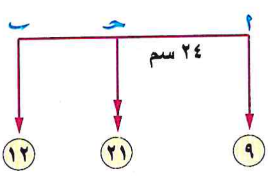
بفرض أن $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه المحصلة $\overrightarrow{ح}$ ∴ $\overrightarrow{ح} = ٢١\ \overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ق_١} = ٩\ \overrightarrow{ى}$

، ∵ $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢}$ ∴ $٢١\ \overrightarrow{ى} = ٩\ \overrightarrow{ى} + \overrightarrow{ق_٢}$

∴ $\overrightarrow{ق_٢} = ٢١\ \overrightarrow{ى} - ٩\ \overrightarrow{ى} = ١٢\ \overrightarrow{ى}$ ∴ $ق_٢ = ١٢$ نيوتن

∴ $\overrightarrow{ق_٢}$ مقدارها ١٢ نيوتن واتجاهها فى نفس اتجاه $\overrightarrow{ق_١}$

وبفرض أن $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ ، $\overrightarrow{ح}$ تؤثر فى النقط أ ، ب ، حـ بحيث حـ ∈ $\overline{أب}$



∴ $ق_١ \times أحـ = ق_٢ \times بحـ$

∴ $٩ \times ٢٤ = ١٢ \times بحـ$

∴ $بحـ = \frac{٩ \times ٢٤}{١٢} = ١٨$ سم

∴ خط عمل $\overrightarrow{ق_٢}$ يبعد ١٨ سم عن خط عمل $\overrightarrow{ح}$

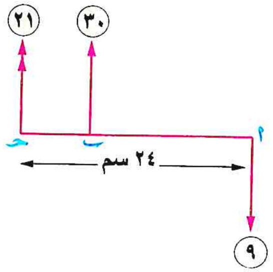
② $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ح}$ فى اتجاهين متضادين :

بفرض أن $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه المحصلة $\overrightarrow{ح}$ ∴ $ح = ٢١\ \overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ق_١} = -٩\ \overrightarrow{ى}$

، ∵ $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢}$ ∴ $٢١\ \overrightarrow{ى} = -٩\ \overrightarrow{ى} + \overrightarrow{ق_٢}$

∴ $\overrightarrow{ق_٢} = ٢١\ \overrightarrow{ى} + ٩\ \overrightarrow{ى} = ٣٠\ \overrightarrow{ى}$ ∴ $ق_٢ = ٣٠$ نيوتن

∴ $\overrightarrow{ق_٢}$ مقدارها ٣٠ نيوتن وفى عكس اتجاه $\overrightarrow{ق_١}$ أى فى اتجاه المحصلة $\overrightarrow{ح}$



وبفرض أن $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ ، $\overleftarrow{ح}$ تؤثر فى النقط أ ، ب ، جـ

على الترتيب حيث جـ $\in$ $\overleftrightarrow{أب}$ ، جـ $\notin$ $\overline{أب}$

$\therefore$ ق$_1$ × أ جـ = ق$_2$ × ب جـ

$\therefore$ ٩ × ٢٤ = ٣٠ × ب جـ

$\therefore$ ب جـ = $\frac{٩ \times ٢٤}{٣٠}$ = ٧,٢ سم

$\therefore$ خط عمل $\overleftarrow{ق_2}$ يبعد ٧,٢ سم عن خط عمل المحصلة $\overleftarrow{ح}$

مثال ٤

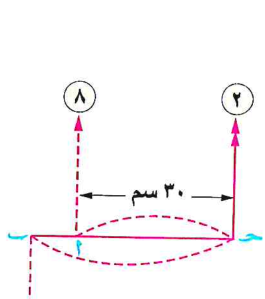
قوتان مقداراهما ٨ ، ق نيوتن متوازيتان ومحصلتهما مقدارها ٢ نيوتن وخط عملها يبعد عن خط عمل القوة الأولى مسافة ٣٠ سم ، بيِّن أن ق لها قيمتان وأوجد البُعد بين خطى عمل القوتين فى الحالتين.

الحـــل

$\because$ ح = ٢ نيوتن أصغر من معيار القوة الأولى وهو ٨ نيوتن

$\therefore$ القوتان اللتان مقداراهما ٨ ، ق متضادتان فى الاتجاه (إذ لو كانتا فى اتجاه واحد لكان مقدار المحصلة يساوى ٨ + ق أى أكبر من ٨) وعلى ذلك يكون هناك احتمالان :

إما ق > ٨ أ، ق < ٨



فى الحالة الأولى أى ق < ٨

$\therefore$ ح = ٨ − ق أى ٢ = ٨ − ق $\therefore$ ق = ٦ نيوتن

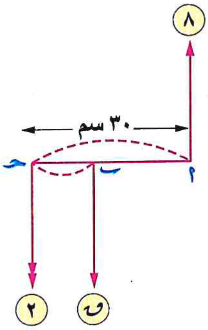
ويكون : ٨ × ٣٠ = ق × ب جـ

أى : ٨ × ٣٠ = ٦ × ب جـ

$\therefore$ ب جـ = ٤٠ سم

$\therefore$ البعد بين خطى عمل القوتين = ٤٠ − ٣٠ = ١٠ سم.

في الحالة الثانية أي ق < ٨



∴ ع = ق − ٨ أي ٢ = ق − ٨ ∴ ق = ١٠ نيوتن

ويكون : ٨ × ٣٠ = ق × ب حـ

أي : ٨ × ٣٠ = ١٠ × ب حـ ∴ ب حـ = ٢٤ سم

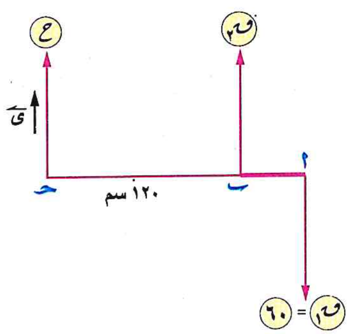
∴ البُعد بين خطي عمل القوتين = ٣٠ − ٢٤ = ٦ سم.

مثال ٥

قوتان متوازيتان مقدار أصغرهما ٦٠ نيوتن وتؤثر في الطرف أ من قضيب خفيف $\overline{أب}$ والكبرى تؤثر في الطرف الآخر ب فإذا كان مقدار محصلتهما ٢٠ نيوتن ويبعد خط عملها عن الطرف ب بمقدار ١٢٠ سم فما طول القضيب ؟

الحل

بفرض أن $ق_١$ = ٦٠ نيوتن ، $ق_٢$ = ق نيوتن



، ∵ ع < $ق_١$

∴ القوتان $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ في اتجاهين متضادين

، ∵ $ق_٢$ > $ق_١$ ∴ المحصلة $\overleftarrow{ع}$ في اتجاه $\overleftarrow{ق_٢}$

وبفرض أن $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة في اتجاه المحصلة $\overleftarrow{ع}$

∴ $\overleftarrow{ع}$ = ٢٠ $\overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ق_١}$ = −٦٠ $\overleftarrow{ى}$

، ∵ $\overleftarrow{ع}$ = $\overleftarrow{ق_١}$ + $\overleftarrow{ق_٢}$ ∴ ٢٠ $\overleftarrow{ى}$ = − ٦٠ $\overleftarrow{ى}$ + $\overleftarrow{ق_٢}$

∴ $\overleftarrow{ق_٢}$ = ٢٠ $\overleftarrow{ى}$ + ٦٠ $\overleftarrow{ى}$ = ٨٠ $\overleftarrow{ى}$ ∴ $ق_٢$ = ٨٠ نيوتن

وبفرض أن المحصلة $\overleftarrow{ع}$ تؤثر في حـ حيث حـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ ، حـ ∉ $\overline{أب}$

، ∵ $ق_١$ × أ حـ = $ق_٢$ × ب حـ ∴ ٦٠ × (أ ب + ١٢٠) = ٨٠ × ١٢٠ وبالقسمة على ٦٠

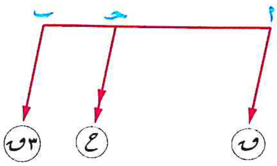
∴ أ ب + ١٢٠ = ٨٠ × ٢ ∴ أ ب + ١٢٠ = ١٦٠

∴ أ ب = ٤٠ سم ∴ طول القضيب = ٤٠ سم.

مثال ٦

قوتان متوازيتان فى اتجاه واحد مقداراهما ق ، ٣ ق نيوتن تؤثران فى النقطتين أ ، ب على الترتيب فإذا تحركت القوة $\overleftarrow{ق}$ بحيث تظل موازية لنفسها مسافة قدرها س على $\overleftarrow{ب أ}$ فأثبت أن محصلة القوتين تتحرك مسافة قدرها $\frac{١}{٤}$ س فى نفس الاتجاه.

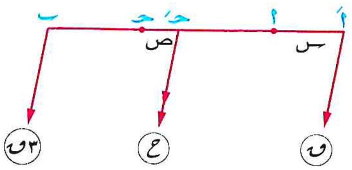
الحل



• قبل تحريك القوة $\overleftarrow{ق}$:

ق × أ حـ = ٣ ق × ب حـ ، بالقسمة على ق

∴ أ حـ = ٣ ب حـ (١)



• بعد تحريك القوة $\overleftarrow{ق}$ مسافة س فى اتجاه $\overleftarrow{ب أ}$:

بفرض أن المحصلة تتحرك مسافة ص فى نفس الاتجاه

∴ ق × أَ حَ = ٣ ق × ب حَ

∴ ق × (س + أ حـ − ص) = ٣ ق × (حـ ب + ص) ، بالقسمة على ق

∴ س + أ حـ − ص = ٣ حـ ب + ٣ ص

وبالتعويض من (١) : ∴ س − ص + أ حـ = أ حـ + ٣ ص

∴ س = ٤ ص ∴ ص = $\frac{١}{٤}$ س

∴ المحصلة تتحرك مسافة $\frac{١}{٤}$ س فى نفس الاتجاه.

عزوم القوى المتوازية

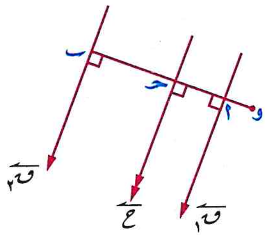
نظرية

المجموع الجبرى لعزوم عدة قوى متوازية مستوية حول أية نقطة فى مستويها يساوى عزم محصلتها حول نفس النقطة.

سوف نبرهن النظرية باستخدام قوتين فقط أما إذا كانت مجموعة القوى مكونة من أكثر من قوتين فيمكن تحصيل كل قوتين (لا تنعدم محصلتهما) منهم إلى أن تؤول المجموعة إلى قوتين متوازيتين فقط.

البرهان : (لا يمتحن فيه الطالب)

أولاً : القوتان فى اتجاه واحد :



نفرض أية نقطة مثل (و) فى مستوى القوتين ونرسم منها عمودًا على خطوط عمل القوتين ومحصلتهما كما فى الشكل المقابل

∴ المجموع الجبرى لعزمى $\overleftarrow{ق}_1$ ، $\overleftarrow{ق}_2$ حول و

= ق$_1$ × و أ + ق$_2$ × و ب

= ق$_1$ (و حـ − أ حـ) + ق$_2$ (و حـ + حـ ب)

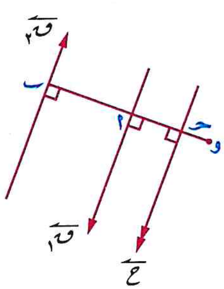
= ق$_1$ × و حـ − ق$_1$ × أ حـ + ق$_2$ × و حـ + ق$_2$ × حـ ب

لكن ق$_1$ × أ حـ = ق$_2$ × حـ ب لأن حـ نقطة تأثير المحصلة ، ح = ق$_1$ + ق$_2$

∴ المجموع الجبرى لعزمى $\overleftarrow{ق}_1$ ، $\overleftarrow{ق}_2$ حول و = ق$_1$ × و حـ + ق$_2$ × و حـ

= (ق$_1$ + ق$_2$) و حـ = ح × و حـ = عزم المحصلة حول (و) (وهو المطلوب)

ثانيًا : القوتان فى اتجاهين متضادين :



نفرض أية نقطة (و) فى المستوى ونرسم منها عمودًا على خطوط عمل القوتين ومحصلتهما كما فى الشكل المقابل

∴ المجموع الجبرى لعزمى $\overleftarrow{ق}_1$ ، $\overleftarrow{ق}_2$ حول و

= ق$_1$ × و أ − ق$_2$ × و ب

= ق$_1$ (و حـ + حـ أ) − ق$_2$ (و حـ + حـ ب)

= ق$_1$ × و حـ + ق$_1$ × حـ أ − ق$_2$ × و حـ − ق$_2$ × حـ ب

لكن ق$_1$ × حـ أ = ق$_2$ × حـ ب لأن حـ نقطة تأثير المحصلة ، ح = ق$_1$ − ق$_2$

∴ المجموع الجبرى لعزمى $\overleftarrow{ق}_1$ ، $\overleftarrow{ق}_2$ حول و = ق$_1$ × و حـ − ق$_2$ × و حـ

= (ق$_1$ − ق$_2$) و حـ = ح × و حـ = عزم المحصلة حول و (وهو المطلوب)

ملاحظة

النظرية السابقة صحيحة فى حالة كون القوى المستوية غير متوازية.

ثانيًا محصلة عدة قوى متوازية مستوية

إذا كانت : $\overleftarrow{\text{ق}}_{1}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{2}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{3}$ ، ... ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{\text{ن}}$ عدة قوى متوازية مستوية فإن :

(١) لتعيين مقدار واتجاه المحصلة نستخدم العلاقة :

$$\overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{\text{ق}}_{1} + \overleftarrow{\text{ق}}_{2} + \dots + \overleftarrow{\text{ق}}_{\text{ن}}$$

(٢) لتعيين نقطة تأثير المحصلة نستخدم نظرية العزوم.

مثال ٧

أربع قوى متوازية ومتحدة الاتجاه مقاديرها ٨ ، ١٠ ، ٥ ، ٧ ثقل كجم تؤثر عند النقط

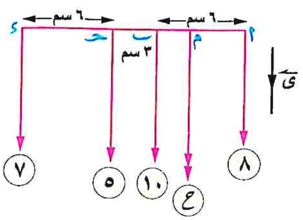
أ ، ب ، حـ ، ء على الترتيب الواقعة على خط مستقيم واحد عمودى على اتجاه القوى.

فإذا كان : أب = ٢ ب حـ = حـ ء = ٦ سم ، أ ء = ١٥ سم فأوجد محصلة هذه القوى.

الحل

- لتحديد مقدار واتجاه المحصلة :

نفرض $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة فى اتجاه القوى



$\therefore$ $\overleftarrow{\text{ح}} = ٨\,\overleftarrow{\text{ى}} + ١٠\,\overleftarrow{\text{ى}} + ٥\,\overleftarrow{\text{ى}} + ٧\,\overleftarrow{\text{ى}}$

$\therefore$ $\overleftarrow{\text{ح}} = ٣٠\,\overleftarrow{\text{ى}}$

$\therefore$ المحصلة مقدارها ٣٠ ث.كجم وفى اتجاه القوى.

- لتحديد نقطة تأثير المحصلة :

نفرض أن خط عمل المحصلة يمر بالنقطة م $\in \overleftrightarrow{\text{أء}}$

$\because$ القياس الجبرى لعزم المحصلة حول أ = مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول أ

$\therefore$ عزم المحصلة حول أ = ٨ × ٠ + ١٠ × ٦ + ٥ × ٩ + ٧ × ١٥ = ٢١٠ ث.كجم.سم

$\therefore$ المحصلة تعمل على الدوران حول أ فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة أى أن خط عملها

يقع إلى اليسار من النقطة أ أى أن م $\in \overline{\text{أء}}$

$\therefore$ ح × أم = ٢١٠ أى ٣٠ × أم = ٢١٠ $\therefore$ أم = ٧ سم.

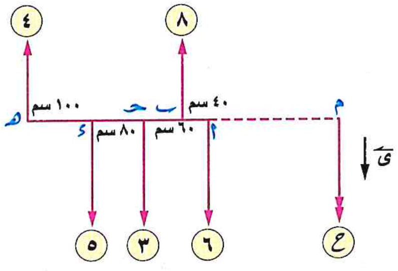
$\therefore$ خط عمل المحصلة يمر بنقطة م $\in \overline{\text{أء}}$ حيث : أم = ٧ سم.

مثال ٨

أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ خمس نقط تقع على خط مستقيم ومرتبة فى اتجاه واحد حيث :

أب = ٤٠ سم ، ب حـ = ٦٠ سم ، حـ ء = ٨٠ سم ، ء هـ = ١٠٠ سم. أثرت قوى مقاديرها ٦ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ٤ نيوتن فى النقط أ ، حـ ، ء ، ب ، هـ على الترتيب وفى اتجاه عمودى على $\overleftrightarrow{أهـ}$ بحيث كانت القوى الثلاثة الأولى متحدة الاتجاه والقوتان الأخيرتان فى الاتجاه المضاد. عيِّن محصلة هذه القوى.

الحل



نفرض $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه القوى الثلاث الأولى

∴ $\overleftarrow{ح} = ٦\,\overleftarrow{ى} + ٣\,\overleftarrow{ى} + ٥\,\overleftarrow{ى} - ٨\,\overleftarrow{ى} - ٤\,\overleftarrow{ى}$

∴ $\overleftarrow{ح} = ٢\,\overleftarrow{ى}$

∴ المحصلة مقدارها ٢ نيوتن وفى اتجاه القوى الثلاث الأولى ونفرض أن خط عمل المحصلة يمر بالنقطة م $\in \overleftrightarrow{أهـ}$

∵ القياس الجبرى لعزم المحصلة حول أ = مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول أ

∴ عزم المحصلة حول أ = ٦ × ٠ + ٣ × ١٠٠ + ٥ × ١٨٠ − ٨ × ٤٠ − ٤ × ٢٨٠

= −٢٤٠ ث.كجم.سم

∴ المحصلة تعمل على الدوران حول أ فى اتجاه دوران عقارب الساعة

∴ خط عمل المحصلة يجب أن يقع على اليمين من نقطة أ

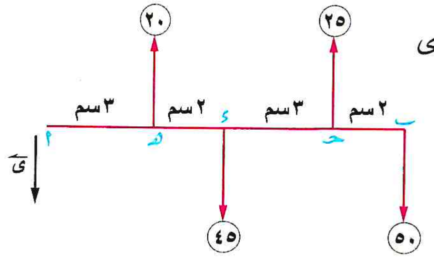
أى أن : م $\in \overleftarrow{هـ أ}$ ، م $\notin \overline{أهـ}$

∴ − ح × أم = −٢٤٠ أى −٢ × أم = −٢٤٠ ∴ أم = ١٢٠ سم

∴ خط عمل المحصلة يمر بنقطة م $\in \overleftarrow{هـ أ}$ ، م $\notin \overline{أهـ}$ بحيث أم = ١٢٠ سم

مثال ٩

الشكل المقابل يوضح قضيب أفقى $\overline{أب}$ ، أثرت ٤ قوى متوازية عمودية على القضيب كما هو موضح بالشكل مقاسه بالنيوتن.



أوجد مقدار واتجاه ونقطة تأثير المحصلة.

الحل

نفرض $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه رأسى لأسفل

$\therefore$ $\overleftarrow{ح} = -٢٠ \overleftarrow{ى} + ٤٥ \overleftarrow{ى} - ٢٥ \overleftarrow{ى} + ٥٠ \overleftarrow{ى} = ٥٠ \overleftarrow{ى}$

$\therefore$ المحصلة مقدارها ٥٠ نيوتن وفى اتجاه رأسى لأسفل وبفرض أن خط عمل المحصلة يمر بنقطة تبعد مسافة ـس سم عن أ

، $\because$ عزم المحصلة حول أ = مجموع عزوم القوى حول أ

$\therefore$ $-٥٠ \times ـس = ٢٠ \times ٣ - ٤٥ \times ٥ + ٢٥ \times ٨ - ٥٠ \times ١٠$

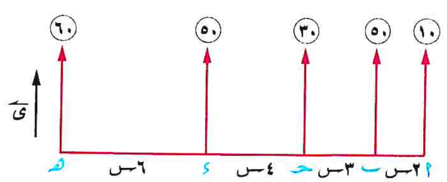
$\therefore$ ـس = ٩,٣ سم

أى أن : خط عمل المحصلة يمر بنقطة على القضيب تبعد مسافة ٩,٣ سم من أ

مثال ١٠

إذا كانت أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ خمس نقط على استقامة واحدة ومرتبة فى اتجاه واحد

بحيث : أب : بحـ : حء : ءهـ = ٢ : ٣ : ٤ : ٦



وأثرت خمس قوى متوازية وفى نفس الاتجاه مقاديرها ١٠ ، ٥٠ ، ٣٠ ، ٥٠ ، ٦٠ نيوتن فى النقط أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ على الترتيب عمودية على $\overleftrightarrow{أهـ}$

أثبت أن : المحصلة تقسم $\overline{أهـ}$ بنسبة ٨ : ٧

الحـــل

نفرض أن $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه القوى

، أب = ٢ س ، ب حـ = ٣ س ، حـ ء = ٤ س ، ء هـ = ٦ س

∴ $\overleftarrow{ح}$ = ١٠ $\overleftarrow{ى}$ + ٥٠ $\overleftarrow{ى}$ + ٣٠ $\overleftarrow{ى}$ + ٦٠ $\overleftarrow{ى}$ = ٢٠٠ $\overleftarrow{ى}$

∴ المحصلة مقدارها ٢٠٠ نيوتن وفى نفس اتجاه القوى

وبفرض أن المحصلة توثر فى نقطة و ∈ $\overline{\text{أهـ}}$

، ∵ عزم المحصلة حول أ = مجموع عزوم القوى حول أ

∴ − ٢٠٠ × أ و = − ٥٠ × ٢ س − ٣٠ × ٥ س − ٥٠ × ٩ س − ٦٠ × ١٥ س

∴ أ و = ٨ س ∴ و هـ = ١٥ س − ٨ س = ٧ س

∴ $\frac{\text{أ و}}{\text{و هـ}} = \frac{\text{٨ س}}{\text{٧ س}} = \frac{٨}{٧}$

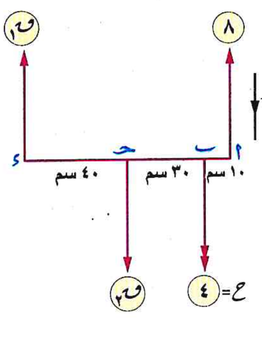
∴ المحصلة تؤثر فى نقطة (و) التى تقسم $\overline{\text{أهـ}}$ من الداخل بنسبة ٨ : ٧

مثال ١١

أ ، ب ، حـ ، ء أربع نقط على استقامة واحدة ومرتبة فى اتجاه واحد بحيث :

أب = ١٠ سم ، ب حـ = ٣٠ سم ، حـ ء = ٤٠ سم أثرت قوتان مقداراهما ٨ ، ق$_{١}$ ث.كجم فى النقطتين أ ، ء فى اتجاه واحد عمودى على $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ كما أثرت قوة قدرها ق$_{٢}$ ث.كجم فى نقطة حـ فى اتجاه مضاد لاتجاه القوتين السابقتين فإذا كان محصلة القوى الثلاث مقدارها ٤ ث.كجم وتعمل فى اتجاه $\overleftarrow{ق_{٢}}$ وخط عملها يمر بالنقطة ب **فأوجد مقدار كل من : ق$_{١}$ ، ق$_{٢}$**

الحـــل



نعتبر $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{ح}$

∴ ٤ $\overleftarrow{ى}$ = ق$_{٢}$ $\overleftarrow{ى}$ − ٨ $\overleftarrow{ى}$ − ق$_{١}$ $\overleftarrow{ى}$

= (ق$_{٢}$ − ٨ − ق$_{١}$) $\overleftarrow{ى}$

∴ ق$_{٢}$ − ٨ − ق$_{١}$ = ٤

∴ ق$_{٢}$ − ق$_{١}$ = ١٢ (١)

∵ القياس الجبرى لعزم المحصلة حول ء = مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول ء

∴ $-٤ \times ٧٠ = ٨ \times ٨٠ - \text{ق}_{٢} \times ٤٠$ ∴ $٤٠\,\text{ق}_{٢} = ٦٤٠ + ٢٨٠ = ٩٢٠$

∴ $\text{ق}_{٢} = ٢٣$ ث.كجم

وبالتعويض فى (١) : ∴ $\text{ق}_{١} = ١١$ ث.كجم.

ملاحظة

إذا كان : $\overrightarrow{\text{ق}_{١}} \,//\, \overrightarrow{\text{ق}_{٢}}$ فإن :

(١) $\overrightarrow{\text{ق}_{١}} = \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ق}_{٢}}$ حيث ك ثابت لا يساوى الصفر

ويكون : $\overrightarrow{\text{ق}_{١}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_{٢}}$ فى اتجاه واحد إذا كان ك > ٠

، $\overrightarrow{\text{ق}_{١}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_{٢}}$ فى اتجاهين متضادين إذا كان ك < ٠

(٢) ميل المتجه $\overrightarrow{\text{ق}_{١}}$ = ميل المتجه $\overrightarrow{\text{ق}_{٢}}$

(٣) $\overrightarrow{\text{ق}_{١}} \times \overrightarrow{\text{ق}_{٢}} = \overrightarrow{٠}$

مثال ١٢

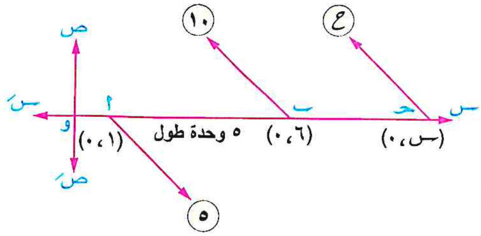
$\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ متجها وحدة متعامدان فى اتجاهى محورى الإحداثيات $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ص}}$

، القوتان $\overrightarrow{\text{ق}_{١}} = ٣\,\overrightarrow{\text{س}} + \text{ل}\,\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_{٢}} = -٦\,\overrightarrow{\text{س}} + ٨\,\overrightarrow{\text{ص}}$ متوازيتان.

عيِّن قيمة الثابت ل وإذا أثرت القوتان فى النقطتين أ (١ ، ٠) ، ب (٦ ، ٠) على الترتيب

فأوجد نقطة تقاطع خط عمل محصلتهما مع $\overleftarrow{\text{و س}}$

الحل



∵ $\overrightarrow{\text{ق}_{١}} \,//\, \overrightarrow{\text{ق}_{٢}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ق}_{١}} = \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ق}_{٢}}$

∴ $٣\,\overrightarrow{\text{س}} + \text{ل}\,\overrightarrow{\text{ص}} = \text{ك}\,(-٦\,\overrightarrow{\text{س}} + ٨\,\overrightarrow{\text{ص}})$

∴ $٣\,\overrightarrow{\text{س}} + \text{ل}\,\overrightarrow{\text{ص}} = -٦\,\text{ك}\,\overrightarrow{\text{س}} + ٨\,\text{ك}\,\overrightarrow{\text{ص}}$

$\therefore$ $-٦ ك = ٣$

$\therefore$ $ك = \frac{-١}{٢}$ ، $ل = ٨ ك$

$\therefore$ $ل = ٨ \times \frac{-١}{٢} = -٤$

$\therefore$ $\overrightarrow{ق_١} = ٣ \overrightarrow{س} - ٤ \overrightarrow{ص}$

$\therefore$ $ق_١ = \|\overrightarrow{ق_١}\| = \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$

، $\because$ $\overrightarrow{ق_٢} = -٦ \overrightarrow{س} + ٨ \overrightarrow{ص}$

$\therefore$ $ق_٢ = \|\overrightarrow{ق_٢}\| = \sqrt{٣٦ + ٦٤} = \sqrt{١٠٠} = ١٠$ $\therefore$ $ق_٢ > ق_١$

، $\because$ $\overrightarrow{ق_١} = -\frac{١}{٢} \overrightarrow{ق_٢}$ $\therefore$ $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ فى اتجاهين متضادين

وبفرض أن المحصلة $\overrightarrow{ح}$ تؤثر فى نقطة جـ حيث جـ $\in \overleftrightarrow{أب}$ ، جـ $\notin \overline{أب}$

$\therefore$ جـ $\in \overleftrightarrow{وس}$ وبفرض أن جـ $(س ، ٠)$

$\therefore$ $ق_١ \times أجـ = ق_٢ \times بجـ$ $\therefore$ $٥ \times (٥ + بجـ) = ١٠ \times بجـ$

$\therefore$ $٢٥ + ٥ بجـ = ١٠ بجـ$ $\therefore$ $بجـ = ٥$

$\therefore$ $س = ١ + ٥ + ٥ = ١١$ $\therefore$ جـ $= (١١ ، ٠)$

$\therefore$ نقطة تقاطع خط عمل المحصلة مع $\overleftrightarrow{وس}$ هى جـ $(١١ ، ٠)$

لاحظ أن

$\because$ $\overrightarrow{ق_١} // \overrightarrow{ق_٢}$

$\therefore$ ميل المتجه $\overrightarrow{ق_١}$ = ميل المتجه $\overrightarrow{ق_٢}$

$\therefore$ $\frac{ل}{٣} = \frac{٨}{-٦}$ $\therefore$ $ل = -٤$

حل آخر :

$\because$ $\overrightarrow{ق_١} // \overrightarrow{ق_٢}$

$\therefore$ $\overrightarrow{ق_١} \times \overrightarrow{ق_٢} = \overrightarrow{٠}$

$\therefore$ $(٣ ، ل) \times (-٦ ، ٨) = \overrightarrow{٠}$

$\therefore$ $٣ \times ٨ + ل \times ٦ = ٠$

$\therefore$ $ل = -٤$ $\therefore$ $\overrightarrow{ق_١} = ٣ \overrightarrow{س} - ٤ \overrightarrow{ص}$

$\therefore$ $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢} = -٣ \overrightarrow{س} + ٤ \overrightarrow{ص}$

لاحظ أن

إذا كان : $\overrightarrow{ق_١} // \overrightarrow{ق_٢}$

فإن : $\overrightarrow{ق_١} \times \overrightarrow{ق_٢} = \overrightarrow{٠}$

، ∵ $\overleftarrow{و أ} \times \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{و ب} \times \overleftarrow{ق_٢} = \overleftarrow{و حـ} \times \overleftarrow{ع}$

∴ $(١ ، ٠) \times (٣ ، -٤) + (٦ ، ٠) \times (-٦ ، ٨) = (س ، ٠) \times (-٣ ، ٤)$

∴ $-٤ + ٤٨ = ٤ س$ ∴ $س = ١١$

∴ نقطة تقاطع خط عمل المحصلة مع $\overleftrightarrow{و س}$ هى $(١١ ، ٠)$

معلومة إثرائية

إذا كان $ق_١ ، ق_٢ ، ... ، ق_ن$ هى القياسات الجبرية لعدة قوى متوازية تؤثر فى النقط

$أ_١ (س_١ ، ص_١) ، أ_٢ (س_٢ ، ص_٢) ، ... ، أ_ن (س_ن ، ص_ن)$ على الترتيب

فإن القياس الجبرى للمحصلة $ع = ق_١ + ق_٢ + ... + ق_ن$

وتؤثر المحصلة فى نقطة ب $(س ، ص)$ وباستخدام مبدأ ونظرية العزوم نجد أن :

$$س = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} ق_ر س_ر}{\sum_{ر=١}^{ن} ق_ر} \quad ، \quad ص = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} ق_ر ص_ر}{\sum_{ر=١}^{ن} ق_ر}$$

فمثلًا : إذا أثرت القوى المتوازية التى مقاديرها ٥ ، ١١ ، ١٤ نيوتن فى اتجاه واحد

فى النقطة $أ = (١ ، -٢)$ ، $ب = (٠ ، ٣)$ ، $حـ = (٥ ، -١)$ على الترتيب.

أوجد نقطة تأثير محصلة هذه القوى.

فإن المحصلة $(ع) = ٥ + ١١ + ١٤ = ٣٠$ نيوتن

وبفرض أن نقطة تأثير المحصلة هى $(س ، ص)$ فإن :

$$س = \frac{\sum_{ر=١}^{٣} ق_ر س_ر}{\sum_{ر=١}^{٣} ق_ر} = \frac{ق_١ س_١ + ق_٢ س_٢ + ق_٣ س_٣}{ق_١ + ق_٢ + ق_٣} = \frac{٥ \times ١ + ١١ \times ٠ + ١٤ \times ٥}{٣٠} = ٢,٥$$

$$، ص = \frac{\sum_{ر=١}^{٣} ق_ر ص_ر}{\sum_{ر=١}^{٣} ق_ر} = \frac{ق_١ ص_١ + ق_٢ ص_٢ + ق_٣ ص_٣}{ق_١ + ق_٢ + ق_٣} = \frac{٥ \times -٢ + ١١ \times ٣ + ١٤ \times -١}{٣٠} = ٠,٣$$

∴ نقطة تأثير المحصلة هى $(٢,٥ ، ٠,٣)$

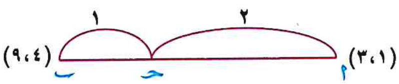
مثال ١٣

تؤثر القوتان $\overleftarrow{ق_١} = ٢\,\overleftarrow{س} - ٣\,\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢} = ٤\,\overleftarrow{س} - ٦\,\overleftarrow{ص}$ فى النقطتين أ(١ ، ٣) ، ب(٤ ، ٩) على الترتيب.

أوجد محصلة القوتين ونقطة تقاطع خط عملها مع $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

الحــل

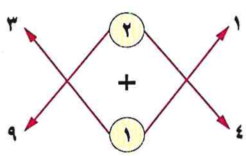
$\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢} = ٦\,\overleftarrow{س} - ٩\,\overleftarrow{ص}$



نلاحظ أن $\overleftarrow{ق_٢} = ٢\,\overleftarrow{ق_١}$

أى أن : القوتين متوازيتان وفى نفس الاتجاه

نفرض المحصلة تؤثر فى نقطة حـ $\in \overline{\text{أب}}$ حيث : $\frac{\text{أحـ}}{\text{حـب}} = \frac{٢}{١}$

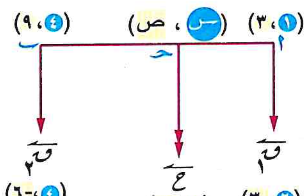


ومن قانون نقطة التقسيم

$\therefore$ حـ $= \left(\frac{٢ \times ٤ + ١ \times ١}{٢ + ١} ، \frac{٢ \times ٩ + ١ \times ٣}{٢ + ١}\right) = (٣ ، ٧)$

حل آخر :

بفرض أن إحدى نقط تأثير المحصلة هى حـ(س ، ص) $\in \overline{\text{أب}}$ فإن :



٦ × س = ٢ × ١ + ٤ × ٤

$\therefore$ س = ٣

، −٩ × ص = −٣ × ٣ − ٦ × ٩

$\therefore$ ص = ٧

$\therefore$ نقطة تقاطع المحصلة $\overleftarrow{ح}$ مع $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ هى (٣ ، ٧)

تمارين 2 على محصلة القوى المتوازية المستوية

من أسئلة الكتاب المدرسى | • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا تمارين على محصلة قوتين متوازيتين

١ إذا كانت $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ قوتين متوازيتين ومتحدتى الاتجاه تؤثران فى النقطتين أ ، ب حيث أ ب = ٥٧ سم وكان $ق_١$ = ٢٣ نيوتن ، $ق_٢$ = ١٥ نيوتن فأوجد محصلة هاتين القوتين.

«٣٨ نيوتن ، تبعد نقطة تأثيرها عن أ مسافة $٢٢\frac{١}{٢}$ سم»

---

٢ (دورثان ٢٠٢٠) (مصر ١٩٨٨) $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ قوتان متوازيتان ومتضادتان فى الاتجاه تؤثران فى النقطتين أ ، ب حيث : أ ب = ١٢,٥ سم فإذا كان : $ق_١$ = ٨٠ نيوتن ، $ق_٢$ = ٣٠ نيوتن فأوجد محصلة هاتين القوتين.

«٥٠ نيوتن ، نقطة تأثيرها تبعد عن أ مسافة ٧,٥ سم»

---

٣ **قوتان متوازيتان مقداراهما ٣٠ ، ٧٠ نيوتن تؤثران فى نقطتين أ ، ب حيث : أ ب = ٢٠٠ سم ، أوجد محصلة القوتين وبُعد نقطة تأثيرها عن أ إذا كانت القوتين :**

(١) فى اتجاه واحد. (٢) فى اتجاهين متضادين.

«١٠٠ نيوتن ، ١٤٠ سم ، ٤٠ نيوتن ، ٣٥٠ سم»

---

٤ إذا كان $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ قوتين متوازيتين متضادتين فى الاتجاه وتؤثران فى النقطتين أ ، ب وكانت $\overleftarrow{ح}$ محصلتهما تؤثر فى نقطة حـ $\in \overleftrightarrow{أب}$ **أجب عما يأتى :**

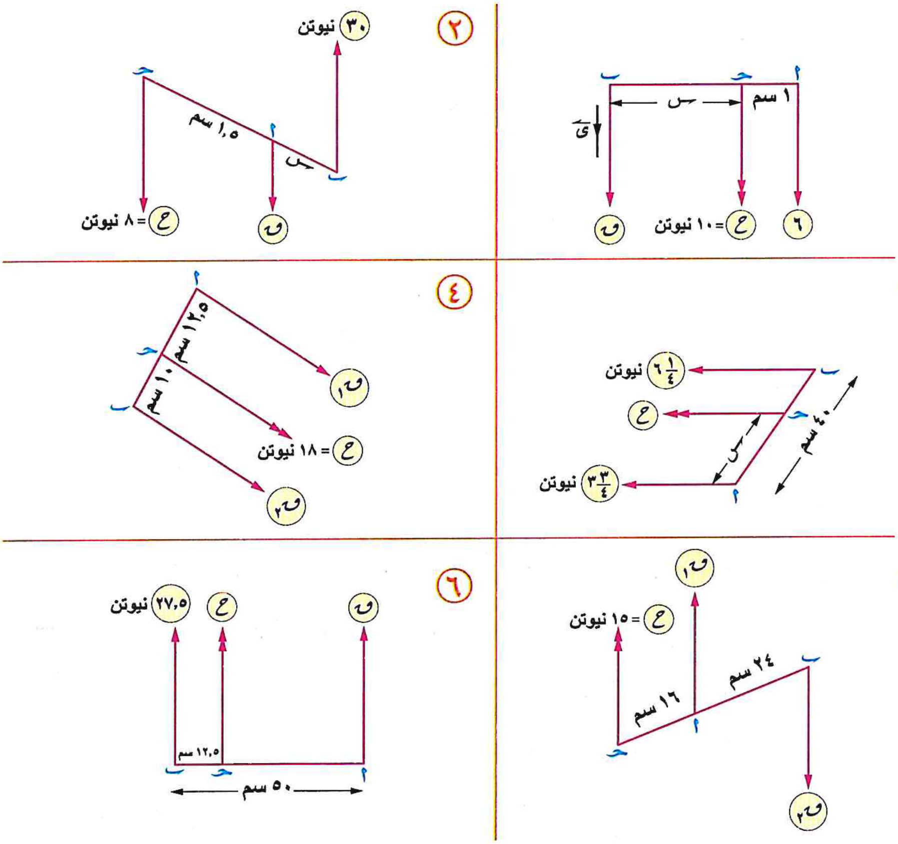
(١) $ق_١$ = ١٥ نيوتن ، ح = ٢٠ نيوتن ، أ حـ = ٧٠ سم

أوجد : $ق_٢$ ، أ ب

(٢) $ق_٢$ = ٦ نيوتن ، أ حـ = ٢٤ سم ، حـ $\notin \overline{أب}$ ، أ ب = ٥٦ سم

أوجد : $ق_١$ ، ح

٥ في كل مما يأتي عيّن مقادير القوى والأبعاد المجهولة الموضحة في الأشكال المرسومة والتي كل منها يبين قوتين متوازيتين ومحصلتهما ح:

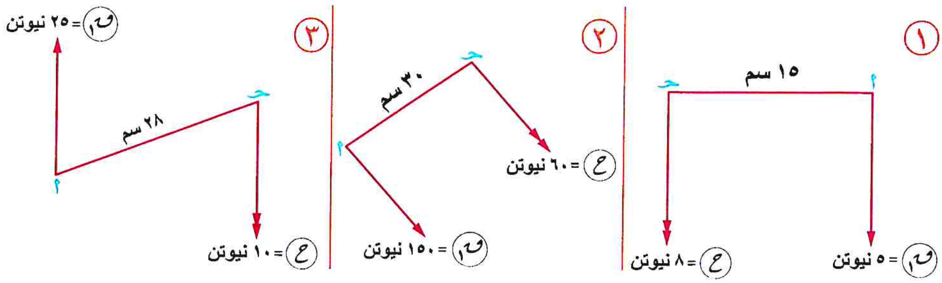


٦ قوتان متوازيتان ومتضادتان في الاتجاه مقداراهما ٩ ، ١٥ نيوتن تؤثران في النقطتين أ ، ب حيث $\overline{أب}$ عمودى على خط عمل القوتين فإذا كان خط عمل المحصلة يبعد ٩ متر عن أ أوجد طول : $\overline{أب}$ «٣,٦ م»

٧ إذا كانت محصلة القوتين المتوازيتين ٧ $\overleftarrow{ى}$ ، ٥ $\overleftarrow{ى}$ نيوتن تؤثر في نقطة تبعد $٢\frac{١}{٣}$ متر عن خط عمل القوة الصغرى. أوجد المسافة بين خطى عمل القوتين. «٤ م»

٨ إذا كانت محصلة القوتين ٩ $\overleftarrow{ى}$ ، −٧ $\overleftarrow{ى}$ تؤثر في نقطة تبعد $٤\frac{١}{٢}$ سم عن خط عمل القوة الصغرى. أوجد المسافة بين خطى عمل القوتين. «١ سم»

٩ في كل مما يأتي الشكل المرسوم يوضح معيارى قوتين متوازيتين $\overleftarrow{ق}_{١}$ ، $\overleftarrow{ق}_{٢}$ ومحصلتهما $\overleftarrow{ح}$ عيِّن $\overleftarrow{ق}_{٢}$:



---

١٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت القوتان $\overleftarrow{ق}_{١}$ ، $\overleftarrow{ق}_{٢}$ متوازيتين وفى اتجاهين متضادين وكان : $ق_{١}$ = ١٤ نيوتن ، $ق_{٢}$ = ١٠ نيوتن فإن مقدار محصلتهما = ... نيوتن.

(أ) ٢٤ (ب) ٤ (جـ) ١٤٠ (د) ١,٤

(٢) قوتان متوازيتان متحدتا الاتجاه مقدار إحداهما ضعف مقدار الأخرى ومقدار محصلتهما = ٣٩ نيوتن فإن مقدار أصغرهما = ... نيوتن.

(أ) ١٩,٥ (ب) ٣٩ (جـ) ٢٦ (د) ١٣

(٣) $\overleftarrow{ق}_{١}$ ، $\overleftarrow{ق}_{٢}$ قوتان متوازيتان محصلتهما $\overleftarrow{ح}$ إذا كان : $ق_{١}$ = ٨ نيوتن ، ح = ١١ نيوتن فإن : $ق_{٢}$ = ... نيوتن.

(أ) ٣ فقط (ب) ١٩ فقط (جـ) ١٦ أ، ٢٢ (د) ٣ أ، ١٩

(٤) إذا كانت : $\overleftarrow{ق}_{١}$ // $\overleftarrow{ق}_{٢}$ وفى اتجاه واحد حيث : $ق_{١}$ = ٥٠ ث.جم ، $ق_{٢}$ = ٦٠ ث.جم والبُعد بينهما ٤٤ سم فإن بُعد $\overleftarrow{ح}$ عن $\overleftarrow{ق}_{١}$ = ... سم.

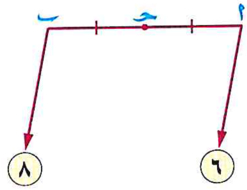
(أ) ١٦ (ب) ١٨ (جـ) ٢٠ (د) ٢٤

(٥) قوتان متوازيتان مقدارهما $ق_{١}$ ، $ق_{٢}$ تؤثران فى نفس الاتجاه ومقدار محصلتيهما ح فإن : ح ....

(أ) أكبر من $ق_{١}$ (ب) أقل من $ق_{٢}$

(جـ) تساوى $ق_{١}$ − $ق_{٢}$ (د) تساوى $ق_{٢}$ − $ق_{١}$

⑥ في الشكل المقابل :



قوتان $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ متوازيتان تؤثران فى نقطتين أ ، ب وكانت جـ منتصف $\overline{\text{أب}}$ فإن محصلة القوتين تؤثر فى نقطة ء $\in \overleftrightarrow{\text{أب}}$ حيث ....

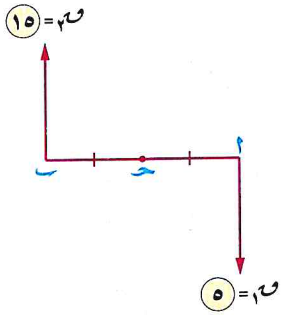
(أ) ء $\in \overline{\text{أجـ}}$

(ب) ء $\in \overline{\text{بجـ}}$

(جـ) ء هى نفس جـ

(د) ء $\in \overleftarrow{\text{أب}}$ ، ء $\notin \overline{\text{أب}}$

⑦ في الشكل المقابل :



قوتان $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ متوازيتان تؤثران فى نقطتين أ ، ب وكانت جـ منتصف $\overline{\text{أب}}$ فإن محصلة القوتين تؤثر فى نقطة ء $\in \overleftrightarrow{\text{أب}}$ حيث ....

(أ) ء $\in \overline{\text{أجـ}}$

(ب) ء $\in \overline{\text{بجـ}}$

(جـ) ء هى نفس جـ

(د) ء $\in \overleftarrow{\text{أب}}$ ، ء $\notin \overline{\text{أب}}$

⑧ قوتان متوازيتان ويعملان فى نفس الاتجاه مقداراهما ق ، ٣ ق وتؤثران في النقطتين أ ، ب على الترتيب حيث أب = ٦٠ سم فإن المحصلة تؤثر فى نقطة جـ $\in \overleftrightarrow{\text{أب}}$ حيث أجـ = ... سم.

(أ) ٣٦ (ب) ٤٠ (جـ) ٤٥ (د) ٥٠

⑨ إذا كانت $\overleftarrow{\text{ح}}$ هى محصلة القوتان المتوازيتان $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ وكان : $\text{ق}_1 < \text{ح} < \text{ق}_2$ فإن : ....

(أ) $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ فى نفس الاتجاه.

(ب) $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ متضادان فى الاتجاه.

(جـ) $\overleftarrow{\text{ح}}$ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{ق}_1}$

(د) $\overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{\text{ق}_1} - \overleftarrow{\text{ق}_2}$

⑩ إذا كانت ح هى محصلة القوتين المتوازيتين ٣٠ ، ق نيوتن وكانت ح = ١٠ نيوتن فيمكن أن يكون ....

(أ) ق = ٢٠ نيوتن وتعمل عكس اتجاه القوة ٣٠ نيوتن.

(ب) ق = ٢٠ نيوتن وتعمل فى نفس اتجاه القوة ٣٠ نيوتن.

(جـ) ق = ٤٠ نيوتن وتعمل عكس اتجاه المحصلة.

(د) ق = ٤٠ نيوتن وتعمل فى نفس اتجاه القوة ٣٠ نيوتن.

(١١) (استرشادى ٢٠٢٥) قوتان متوازيتان $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ تؤثران فى النقطتين أ ، ب على الترتيب ، ومحصلتهما تؤثر فى النقطة حـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ ، كان $\frac{ق_١}{أحـ} = \frac{ق_٢}{بحـ}$ فإن : ....

(أ) $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ فى اتجاهين متضادين (ب) $ق_١ = ق_٢$

(جـ) $ق_١ > ق_٢$ (د) $ق_١ < ق_٢$

(١٢) إذا كانت $ق_١$ ، $ق_٢$ قوتين متوازيتين تؤثران فى النقطتين أ ، ب حيث $ق_١$ = ٣٠ ث.كجم ، $ق_١ > ق_٢$ وكانت محصلتهما ح مقدارها ١٠ ث.كجم وتؤثر فى نقطة حـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ حيث بحـ = ٩٠ سم فإن : أب = ...

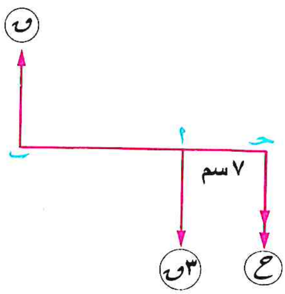
(أ) ٣٠ سم. (ب) ٤٥ سم. (جـ) ٦٠ سم. (د) ١٢٠ سم.

(١٣) (دور أول ٢٠٢٥) فى الشكل المقابل :

أثرت قوتان متوازيتان مقداراهما ٨ ، ١٢ نيوتن فى النقطتين أ ، ب على الترتيب حيث أب = ٢٠ سم وتعملان فى نفس الاتجاه ، فإذا كانت محصلة القوتين تؤثر فى النقطة حـ ∈ $\overline{أب}$ ، فإن بحـ = ... سم.

(أ) ٨ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (د) ١٢

(١٤) (دور أول ٢٠٢٢) فى الشكل المقابل :



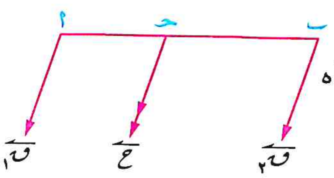
$\overleftarrow{ح}$ هى محصلة القوتين المتوازيتين اللتين مقداراهما ٣ ق ، ق نيوتن فإذا كان أحـ = ٧ سم

، فإن : أب = ... سم.

(أ) ٧ (ب) ١٤

(جـ) ٢١ (د) ٢٨

(١٥) (دور أول ٢٠١٩) فى الشكل المقابل :



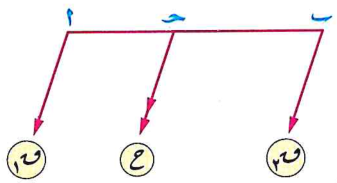
إذا كان : $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ قوتان متوازيتان فى نفس الاتجاه تؤثران عند أ ، ب على الترتيب ، محصلتهما $\overleftarrow{ح}$ ، تؤثر عند نقطة حـ ∈ $\overline{أب}$ حيث $ق_١$ = ٨ نيوتن

، ح = ١٣ نيوتن ، أحـ = ١٠ سم

فإن : أب = ... سم

(أ) ١٦ (ب) ١٣ (جـ) ٢٦ (د) ٦

١٦ (دورثان ٢٠١٩) في الشكل المقابل :



ق١ ، ق٢ قوتان متوازيتان في نفس الاتجاه تؤثران عند ا ، ب على الترتيب ، محصلتهما ع تؤثر عند نقطة حـ ∈ اب ، إذا كانت ق٢ = ٦ نيوتن ، احـ = ٢٤ سم ، اب = ٥٦ سم فإن : ....

(أ) ق١ = ٨ نيوتن ، ع = ١٤ نيوتن
(ب) ق١ = ٢٤ نيوتن ، ع = ٣٢ نيوتن
(جـ) ق١ = ٣٢ نيوتن ، ع = ٣٨ نيوتن
(د) ق١ = ٨ نيوتن ، ع = ٢ نيوتن

١٧ (استرشادى ٢٠٢٥) قوتان متوازيتان ومقدار محصلتها ٦ نيوتن تؤثر في نقطة حـ ومقدار إحدى القوتين ١٨ نيوتن وتؤثر في نقطة ا حيث احـ = ٤٠ سم ، فإذا كانت القوة المعطاه والمحصله في اتجاهين متضادين وكانت القوة الأخرى تؤثر في نقطة ب حيث ا ، ب ، حـ على استقامه واحدة فإن : اب = ... سم.

(أ) ١٠
(ب) ٣٠
(جـ) ٥٠
(د) ٦٠

١٨ قوتان متوازيتان مقداراهما ق١ ، ق٢ ومتحدتا الاتجاه مقدار محصلتهما ٢٥ نيوتن وتؤثر في نقطة تبعد ٤ سم عن القوة الأولى و ٦ سم عن القوة الثانية فإن : ق١ − ق٢ = ... نيوتن.

(أ) ٢٠
(ب) ١٥
(جـ) ١٠
(د) ٥

١٩ ق١ ، ق٢ قوتان متوازيتان في نفس الاتجاه يؤثران في ا ، ب على الترتيب ومحصلتهما تؤثر في نقطة حـ ∈ اب فإذا زاد مقدار القوة ق١ فإن ....

(أ) مقدار المحصلة يزداد ونقطة تأثيرها تتحرك نحو ب
(ب) مقدار المحصلة يزداد ونقطة تأثيرها تتحرك نحو ا
(جـ) مقدار المحصلة لا يزداد ونقطة تأثيرها تتحرك نحو ب
(د) مقدار المحصلة لا يزداد ونقطة تأثيرها تتحرك نحو ا

٢٠ قوتان متوازيتان مقداراهما ١٥ ، ق نيوتن فإذا كان مقدار محصلتهما ٢٥ نيوتن وكانت القوة المعلومة والمحصلة في عكس الاتجاه فإن مقدار القوة ق بالنيوتن تساوى ....

(أ) ١٠
(ب) ٢٠
(جـ) ٣٠
(د) ٤٠

(٢١) $\overleftarrow{\text{ق}}_1$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_2$ قوتان متوازيتان فى نفس الاتجاه يؤثران فى أ ، ب على الترتيب وكان $\text{ق}_1 > \text{ق}_2$ فإذا تضاعف مقدار كل من القوتين فإن ....

(أ) المحصلة تتضاعف ولا تتغير نقطة تأثيرها.

(ب) المحصلة تتضاعف وتقترب نقطة تأثيرها من $\overleftarrow{\text{ق}}_1$

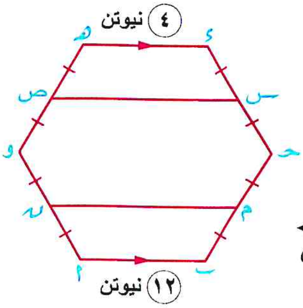
(جـ) المحصلة تتضاعف وتقترب نقطة تأثيرها من $\overleftarrow{\text{ق}}_2$

(د) المحصلة لا تتضاعف ولا تتغير نقطة تأثيرها.

(٢٢) قوتان متوازيتان وفى اتجاه واحد مقداراهما ق ، ٢ ق نيوتن تؤثران فى أ ، ب حيث أ ب = ٦٠ سم ونقطة تأثير المحصلة $\in$ $\overline{\text{أ ب}}$ فإذا بدلت القوتان مكانيهما فإن نقطة تأثير المحصلة تتحرك مسافة = ... سم.

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٣٠ (د) ٤٠

(٢٣) (تجريبى ٢٠٢٣) فى الشكل المقابل :



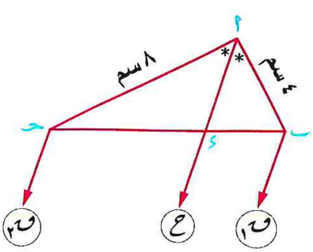
أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم س ، ص ، م ، ن منتصفات $\overline{\text{ء حـ}}$ ، $\overline{\text{هـ و}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{أ و}}$

فإن محصلة القوى تعمل فى ....

(أ) $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{ص س}}$

(جـ) $\overleftarrow{\text{و حـ}}$ (د) $\overleftarrow{\text{ن م}}$

(٢٤) فى الشكل المقابل :



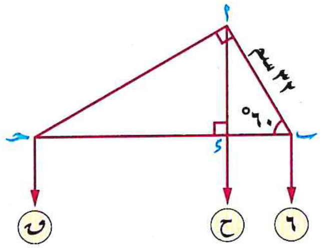
إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف $\angle$ أ وكانت ق_1 ، ق_2 قوتان متوازيتان تؤثران فى ب ، حـ وكانت محصلتهما تؤثر فى نقطة ء

فإن : ق_1 = ...

(أ) ق_2 (ب) $\frac{1}{2}$ ق_2

(جـ) ٢ ق_2 (د) $\frac{1}{3}$ ق_2

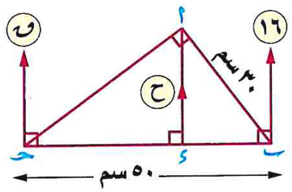
(٢٥) (دور أول ٢٠٢٤) في الشكل المقابل :



قوتان متوازيتان مقداراهما ٦ ، ق نيوتن تؤثران في ب ، حـ علي الترتيب وكانت محصلتهما تعمل في اتجاه $\overleftarrow{أء}$ ، فإن : ق = ... نيوتن

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٨

(٢٦) (دور ثان ٢٠٢٤) في الشكل المقابل :



قوتان متوازيتان مقداراهما ١٦ ، ق نيوتن تؤثران عند ب ، حـ على الترتيب فإذا كانت محصلتهما تعمل في اتجاه $\overleftarrow{أء}$ ، فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٢

(٢٧) إذا أثرت القوتان المتوازيتان $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ في النقطتين أ ، ب على الترتيب فكانت محصلتهما تؤثر في نقطة حـ $\ni$ $\overleftrightarrow{أب}$ وإذا أثرت القوتان المتوازيتان $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ في النقطتين أ ، ب على الترتيب كانت محصلتهما تؤثر في نقطة حـ أيضًا فإن ....

(أ) $ق_١ = ق_٢ = ق_٣$ (ب) $ق_١ + ق_٣ = ٢ ق_٢$

(جـ) $ق_١ \times ق_٣ = ق_٢^٢$ (د) $\frac{١}{ق_١} + \frac{١}{ق_٣} = \frac{٢}{ق_٢}$

---

(١١) قوتان متوازيتان مقدار محصلتهما ٢٥٠ نيوتن وإحدى القوتين مقدارها ١٥٠ نيوتن وخط عملها يبعد ٤٠ سم عن خط عمل المحصلة. أوجد القوة الثانية وكذا البُعد بين القوتين إذا كانت القوة المعلومة والمحصلة تعملان :

(١) في اتجاه واحد. (٢) في اتجاهين متضادين.

«١٠٠ نيوتن ، ١٠٠ سم ، ٤٠٠ نيوتن ، ٢٥ سم»

---

(١٢) قوتان متوازيتان $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ مقدار الأولى ٥٠ نيوتن ومقدار محصلتهما ٧٥ نيوتن والبُعد بين خطي عمل القوة الأولى والمحصلة ٢٥ سم. عيِّن مقدار واتجاه وخط عمل $\overleftarrow{ق_٢}$ إذا كان :

(١) $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ح}$ في اتجاه واحد. (٢) $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ح}$ في اتجاهين متضادين.

«٢٥ نيوتن ، ٧٥ سم ، ١٢٥ نيوتن ، ١٥ سم»

١٣ قوتان متوازيتان مقدار محصلتهما ٣٥٠ نيوتن ومقدار إحدى القوتين ٥٠٠ نيوتن وتعمل على بُعد ٥١ سم من المحصلة. أوجد القوة الثانية والبُعد بين خطى عمل القوتين إذا كانت القوة المعلومة والمحصلة تعملان :

(١) فى اتجاه واحد. (٢) فى اتجاهين متضادين.

«١٥٠ نيوتن ، ١١٩ سم ، ٨٥٠ نيوتن ، ٢١ سم»

---

١٤ (دور أول ١٩٩٥) قوتان متوازيتان مقداراهما ١٥ ، ق نيوتن حيث ق > ١٥ وتؤثران فى النقطتين أ ، ب على الترتيب ، إذا كان مقدار المحصلة يساوى ٥ نيوتن وتؤثر فى نقطة ح ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ حيث : ب ح = ٤٥ سم فأوجد : أ ب

«١٥ سم»

---

١٥ قوتان متوازيتان أصغرهما ٣٠ نيوتن وتؤثر فى الطرف أ عموديًا على قضيب خفيف $\overline{\text{أ ب}}$ والكبرى تؤثر فى الطرف الآخر ب فإذا كان مقدار محصلتهما ١٠ نيوتن ويبعد خط عملها عن الطرف ب بمقدار ٩٠ سم ، فما طول القضيب ؟

«٣٠ سم»

---

١٦ $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ قوتان متوازيتان متحدتان فى الاتجاه والبُعد بين خطى عملهما ٢٠ سم فإذا كان مقدار محصلتهما يساوى ٥٠ نيوتن ويبعد خط عملها عن خط عمل $\overleftarrow{ق_1}$ مسافة ٤ سم ، أوجد مقدار كل من القوتين.

«٤٠ ، ١٠ نيوتن»

---

١٧ (دور أول ١٩٩١) $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ قوتان متوازيتان ومتضادتان فى الاتجاه تؤثران فى النقطتين أ ، ب على الترتيب ، $ق_1 > ق_2$ إذا كانت محصلة $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ قوة معيارها ٩٠ ثقل كجم وتؤثر فى النقطة ح ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ حيث : أ ب = ٣٦ سم ، أ ح = ١٦ سم.

فأوجد : $ق_1$ ، $ق_2$

«١٣٠ ، ٤٠ ثقل كجم»

---

١٨ قوتان متوازيتان تؤثران فى نقطتين أ ، ب فإذا كانت محصلتهما = ٢٠ نيوتن وتؤثر فى نقطة ح ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ حيث : أ ب = ٤٠ سم ، أ ح = ١٠ سم. **أوجد مقدار كل من القوتين :**

(١) إذا كانتا فى اتجاه واحد. (٢) إذا كانتا فى اتجاهين متضادين.

«١٥ ، ٥ ، ٢٥ ، ٥ نيوتن»

١٩ أ ، ب ، ح ثلاث نقط على استقامة واحدة حيث : $\overline{أب}$ = ٦٠ سم ، $\overline{بح}$ = ٤٠ سم ، أثرت قوتان متوازيتان فى النقطتين أ ، ب فإذا كان مقدار محصلتهما = ٢٤ نيوتن وتؤثر فى نقطة ح فأوجد مقدار كل من القوتين. «١٦ ، ٨ أ، ١٦ ، ٤٠ نيوتن»

---

٢٠ قوتان متوازيتان تؤثران فى نقطتين أ ، ب حيث : أب = ١٠٠ سم ، وتؤثر محصلتهما فى نقطة ح ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ ، فإذا كانت القوتان فى اتجاه واحد فإن : بح = ٢٥ سم ، وإذا كانتا متضادتين فى الاتجاه فإن المحصلة = ١٠ نيوتن. أوجد مقدار كل من القوتين. «٥ ، ١٥ نيوتن»

---

٢١ قوتان متوازيتان ومتحدتا الاتجاه مقاديرها ٥ ، ٨ نيوتن تؤثران فى نقطتين أ ، ب حيث : أب = ٣٩ سم. إذا اضيف للقوة الأولى قوة أخرى مقدارها ق فى نفس الاتجاه فإن المحصلة تتحرك ٨ سم. **أوجد :** ق «٦,٥ نيوتن»

---

٢٢ قوتان متوازيتان وفى اتجاه واحد مقداراهما ق ، ق تؤثران فى النقطتين أ ، ب فإذا تحركت إحداهما موازية لنفسها مسافة قدرها س على المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ فأثبت أن محصلتهما تتحرك مسافة قدرها $\frac{١}{٢}$ س فى نفس الاتجاه.

---

٢٣ قوتان متوازيتان وفى نفس الاتجاه مقداراهما ق ، ٢ ق تؤثران فى نقطتين أ ، ب إذا تحركت القوة ٢ ق موازية نفسها فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$ مسافه س سم. أثبت أن محصلة القوتين تتحرك فى نفس الاتجاه مسافة قدرها $\frac{٢}{٣}$ س

---

٢٤ قوتان متوازيتان فى اتجاهين متضادين مقداراهما ٥ ، ٩ نيوتن تؤثران فى النقطتين أ ، ب على الترتيب من جسم متماسك. فإذا انتقلت نقطة تأثير القوة ٩ نيوتن مسافة قدرها س سم على الشعاع $\overleftarrow{أب}$ بحيث تظل هذه القوة موازية للقوة الأخرى. أثبت أن نقطة تأثير محصلتها تنتقل مسافة $\frac{٩}{٤}$ س

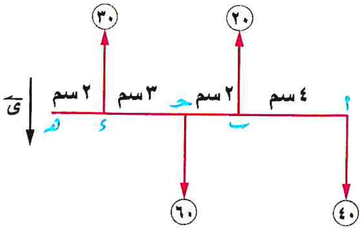
---

٢٥ قوتان متوازيتان وفى اتجاه واحد مقداراهما ق ، ك تؤثران فى النقطتين أ ، ب على الترتيب. فإذا تحركت القوة ق موازية لنفسها مسافة قدرها س على الشعاع $\overleftarrow{أب}$ فأثبت أن محصلتهما تتحرك مسافة قدرها $\frac{ق}{ق + ك}$ × س فى نفس الاتجاه.

ثانيًا تمارين على محصلة عدة قوى متوازية

١ في الشكل المقابل :

أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ خمس نقط تقع على خط مستقيم أفقي واحد أثرت القوتان اللتان مقداراهما ٢٠ ، ٣٠ نيوتن رأسيًا لأعلى عند النقطتين ب ، ء واثرت القوتان اللتان مقداراهما ٤٠ ، ٦٠ نيوتن رأسيًا لأسفل عند النقطتين أ ، حـ



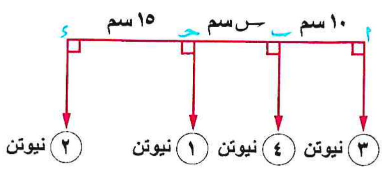
أوجد مقدار واتجاه ونقطة تأثير المحصلة.

«٥٠ ى ، أ م = ٠,٢ سم»

---

٢ (دور أول ٢٠٢٥) في الشكل المقابل :

النقط أ ، ب ، حـ ، ء تقع على خط مستقيم أفقي وتؤثر فيها القوى المتوازية الموضحة ، فإذا كان



أ ب = ١٠ سم ، ب حـ = س سم ، حـ ء = ١٥ سم

وكانت المحصلة تؤثر في م ∈ $\overline{\text{أ ء}}$ حيث أ م = ١٣ سم

، فأوجد قيمة س

«١٠ سم»

---

٣ أ ، ب ، حـ ثلاث نقط تقع على مستقيم أفقي حيث : أ ب = ١ متر ، أ حـ = ٣ متر ، ب ∈ $\overline{\text{أ حـ}}$ أثرت القوى التي مقاديرها ٢ ، $\frac{1}{2}$ نيوتن رأسيًا لاسفل في النقطتين أ ، حـ على الترتيب كما أثرت قوة مقدارها ٤ نيوتن في نقطة ب رأسيًا لأعلى.

أوجد مقدار واتجاه المحصلة وبُعد نقطة تأثيرها عن نقطة أ

«$1\frac{1}{2}$ نيوتن ، $\frac{5}{3}$ م»

---

٤ أربع قوى متوازية ومتحدة في الاتجاه مقاديرها ٣ ، ٤ ، ١ ، ٢ ث.كجم تؤثر عند النقطة أ ، ب ، حـ ، ء على الترتيب على خط مستقيم واحد عمودي على اتجاه القوى. عيِّن محصلة هذه القوى علمًا بأن : أ ب = ب حـ = ١٠٠ سم ، ء ∈ $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ بحيث : حـ ء = ١٥٠ سم.

«ح = ١٠ ث.كجم وتعمل على بُعد ١٣٠ سم من أ»

٥ (دور أول ٢٠٢٠) ؟ ، ب ، حـ ، ء أربع نقط مختلفة على مستقيم واحد بحيث :

؟ب = ب حـ = حـ ء = ٣٠ سم أثرت قوتان مقداراهما ٨ ، ٩ ثقل كجم فى النقطتين ؟ ، ء بالترتيب فى اتجاه واحد عمودى على $\overleftrightarrow{؟ء}$ ، كما أثرت قوتان مقداراهما ٤ ، ٧ ثقل كجم فى النقطتين ب ، حـ على الترتيب فى اتجاه مضاد لاتجاه القوتين السابقتين.

عيِّن محصلة مجموعة هذه القوى. «ح = ٦ ثقل كجم ، ؟م = ٤٥ سم»

---

٦ ؟ ، ب ، حـ ، ء أربع نقط تقع على خط مستقيم واحد حيث : ؟ب = ٣٢ سم ، ب حـ = ٤٠ سم ، حـ ء = ٨ سم أثرت القوتان المتوازيتان اللتان مقداراهما ٨ ، ١٠ نيوتن فى ؟ ، حـ على الترتيب فى اتجاه عمودى على $\overleftrightarrow{؟ء}$ وأثرت القوتان اللتان مقداراهما ٧ ، ٣ نيوتن فى ب ، ء فى اتجاه مضاد للقوتين عند ؟ ، حـ عيِّن محصلة هذه المجموعة وبُعد نقطة تأثيرها عن ؟ «ح = ٨ نيوتن ، ؟م = ٣٢ سم»

---

٧ ؟ ، ب ، حـ ، ء ، هـ نقط تقع على خط مستقيم واحد بحيث :

؟ب = ٤ سم ، ب حـ = ٦ سم ، حـ ء = ٨ سم ، ء هـ = ١٠ سم. أثرت خمس قوى مقاديرها ٦٠ ، ٣٠ ، ٥٠ ، ٨٠ ، ٤٠ ث. كجم فى النقط ؟ ، حـ ، ء ، ب ، هـ على الترتيب فى اتجاه عمودى على $\overleftrightarrow{؟ء}$ وفى اتجاه عمودى على $\overleftrightarrow{؟هـ}$ بحيث كانت القوى الثلاث الأولى متحدة الاتجاه ، القوتان الأخريان فى الاتجاه المضاد. عيِّن محصلة المجموعة.

«ح = ٢٠ ث.كجم ، ؟م = ١٢ سم حيث : م $\in \overleftarrow{هـ؟}$ ، م $\notin \overline{هـ؟}$»

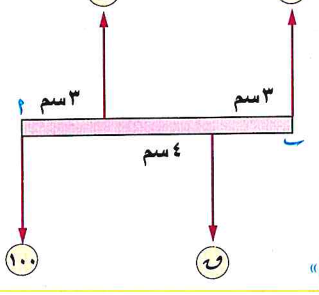
---

٨ إذا كانت حـ ، ء ، هـ $\in \overline{؟ب}$ بحيث : ؟حـ : حـ ء : ء هـ : هـ ب = ١ : ٣ : ٥ : ٧ أثرت قوى متوازية وفى نفس الاتجاه ومتساوية فى المقدار فى النقط ؟ ، حـ ، ء ، هـ ، ب فى اتجاه عمودى على $\overline{؟ب}$ برهن أن خط عمل المحصلة تقسم $\overline{؟ب}$ بنسبة ٣ : ٥

---

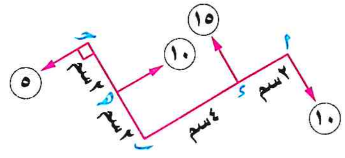
٩ الشكل المقابل يوضح قضيب خفيف $\overline{؟ب}$ أثرت عليه القوى المتوازية الموضحة بالشكل فإذا كانت مقدار المحصلة ٣٠٠ نيوتن وتعمل لأعلى وتؤثر فى نقطة على القضيب تبعد ٤ سم من ؟

أوجد : ىو ، ك



«٣٥٠ ، ٥٥٠ نيوتن»

١٠ **(تجريبى ٢٠٢٣)** **فى الشكل المقابل :**



أثرت القوى كما هو موضح بالرسم

أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

حيث القوى مقدرة بالنيوتن.

«٥ $\sqrt{٢}$ نيوتن فى اتجاه منصف ∠ ء ب حـ»

---

١١ أ ، ب ، حـ ، ء أربع نقط ∈ مستقيم أفقى واحد ومرتبه فى اتجاه واحد بحيث :

أب = ٢ ب حـ = حـ ء = ٤ سم أثرت القوى المتوازية التى مقاديرها ٣ ، ٤ ، ٥ ، ق ثقل كجم عمودية على $\overline{\text{أء}}$ وعند النقط أ ، ب ، حـ ، ء وفى اتجاه واحد فإذا كانت المحصلة تؤثر عند م ∈ $\overline{\text{أء}}$ حيث : أ م = ٨ سم. أوجد قيمة ق ومحصلة هذه القوى.

«٢٥ ث.كجم ، ٣٧ ث.كجم»

---

١٢ أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ خمس نقط ∈ مستقيم واحد ومرتبه فى اتجاه واحد بحيث :

أب = ٢ ب حـ = حـ ء = ٢ ء هـ = ١٠ سم أثرت القوى التى مقاديرها ٦ ، ٢ ، ٣ ، ٨ ، ق نيوتن فى النقط بالترتيب بحيث كانت عمودية على $\overline{\text{أهـ}}$ وكانت القوتان اللتان مقداراهما ٦ ، ٨ فى اتجاه واحد والقوتان اللتان مقداراهما ٢ ، ٣ فى الاتجاه المضاد ، فإذا كانت محصلة هذه القوى تؤثر عند نقطة ں ∈ $\overline{\text{أهـ}}$ حيث أں = ٥ سم. فأوجد مقدار واتجاه كل من القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، المحصلة $\overleftarrow{\text{ح}}$

«ق = ٣,٦ نيوتن فى اتجاه القوتين ٢ ، ٣ ، ح = ٥,٤ نيوتن فى اتجاه القوتين ٦ ، ٨»

---

١٣ ثلاث قوى متوازية مستوية مقاديرها ٨ ، ٧ ، ق ث.كجم تؤثر فى النقط أ ، ب ، حـ على الترتيب من مستقيم معلوم حيث : أب = ١٢ سم ، حـ ∈ $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، حـ ∉ $\overline{\text{أب}}$

فإذا كانت القوتان الأولى والثانية متضادتين فى الاتجاه وكانت محصلة القوى الثلاث معيارها ٤ ث.كجم فى اتجاه القوة الثانية وخط عملها يقطع $\overleftarrow{\text{أب}}$ فى نقطة ء حيث :

أء = ٥٠ سم فأوجد مقدار ق وكذلك طول $\overline{\text{ب حـ}}$ «ق = ٥ ثقل كجم ، ب حـ = ١١,٢ سم»

---

١٤ أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ خمس نقط فى مستقيم أفقى واحد ومرتبه فى اتجاه واحد بحيث :

أب = ١٢ سم ، ب حـ = ٤ سم ، حـ ء = ٦ سم ، ء هـ = ٣ سم.

أثرت القوى التى مقاديرها ٤ ، ق ، ٨ نيوتن رأسيًا لأسفل عند النقط أ ، حـ ، هـ على الترتيب وأثرت القوتان اللتان مقداراهما ٧ ، ل رأسيًا لأعلى عند النقط ب ، ء على الترتيب. فإذا كانت محصلة القوى = ٧ نيوتن وتؤثر عند نقطة ں ∈ $\overline{\text{أهـ}}$

حيث : أں = ١٠ سم وتعمل رأسيًا لأسفل **فأوجد قيمتى : ق ، ل** «١٥ ، ١٣ نيوتن»

ثالثًا تمارين متنوعة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ قوتين متوازيتين : $\overleftarrow{ق_1}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ + ك $\overleftarrow{ص}$

، $\overleftarrow{ق_2}$ = −٦ $\overleftarrow{س}$ + ٨ $\overleftarrow{ص}$ فإن الثابت ك = ...

(أ) ٤ (ب) $\frac{1}{4}$ ٤ (جـ) −٤ (د) −٢

② من بين مجموعات القوى التالية توجد قوتان متوازيتان وتعملان فى اتجاهين متضادين هما ....

(أ) $\overleftarrow{ق_1}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ − ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ = ٤ $\overleftarrow{س}$ − ٦ $\overleftarrow{ص}$

(ب) $\overleftarrow{ق_1}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ − ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ = −٤ $\overleftarrow{س}$ + ٦ $\overleftarrow{ص}$

(جـ) $\overleftarrow{ق_1}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ − ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ = ٦ $\overleftarrow{س}$ − ٤ $\overleftarrow{ص}$

(د) $\overleftarrow{ق_1}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ − ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ = −٦ $\overleftarrow{س}$ + ٤ $\overleftarrow{ص}$

③ إذا كانت : $\overleftarrow{ق_1}$ // $\overleftarrow{ق_2}$ وفى اتجاهين متضادين فإن : $\overleftarrow{ح}$ = ...

(أ) $\overleftarrow{ق_1}$ − $\overleftarrow{ق_2}$ (ب) $\overleftarrow{ق_1}$ + $\overleftarrow{ق_2}$ (جـ) $\overleftarrow{ق_1}$ × $\overleftarrow{ق_2}$ (د) $\overleftarrow{ق_1}$. $\overleftarrow{ق_2}$

④ إذا كان : $\overleftarrow{ق_1}$ // $\overleftarrow{ق_2}$ وكانت محصلتهما القوة $\overleftarrow{ح}$ بحيث :

$\overleftarrow{ق_2}$ = −٩ $\overleftarrow{س}$ + ١٢ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ح}$ = −٢ $\overleftarrow{ق_1}$ فإن : $\overleftarrow{ق_1}$ = ...

(أ) − ١٥ $\overleftarrow{س}$ + ٢٠ $\overleftarrow{ص}$ (ب) −٣ $\overleftarrow{س}$ + ٤ $\overleftarrow{ص}$

(جـ) ٣ $\overleftarrow{س}$ − ٤ $\overleftarrow{ص}$ (د) ١٥ $\overleftarrow{س}$ − ٢٠ $\overleftarrow{ص}$

⑤ قوتان متوازيتان $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ = م $\overleftarrow{س}$ − ١٢ $\overleftarrow{ص}$ ، إذا كانت محصلتهما

$\overleftarrow{ح}$ = −١٥ $\overleftarrow{س}$ + ٢٠ $\overleftarrow{ص}$ فإن : $\overleftarrow{ق_1}$ = ...

(أ) ٦ $\overleftarrow{س}$ − ٨ $\overleftarrow{ص}$ (ب) ٢٤ $\overleftarrow{س}$ − ٣٢ $\overleftarrow{ص}$

(جـ) −٦ $\overleftarrow{س}$ + ٨ $\overleftarrow{ص}$ (د) −٢٤ $\overleftarrow{س}$ + ٣٢ $\overleftarrow{ص}$

⑥ إذا كانت : $\overleftarrow{ق_1}$ // $\overleftarrow{ق_2}$ ، $\overleftarrow{ق_1}$ = $\overleftarrow{س}$ − ٢ $\overleftarrow{ص}$ ، $\|\overleftarrow{ق_2}\|$ = ٤ $\sqrt{٥}$ وحدة

فإن : $\overleftarrow{ق_2}$ = ...

(I) ٤ $\overleftarrow{س}$ − ٨ $\overleftarrow{ص}$ (II) −٤ $\overleftarrow{س}$ + ٨ $\overleftarrow{ص}$ (III) ٢ $\overleftarrow{س}$ − ٤ $\overleftarrow{ص}$

(أ) I فقط (ب) III فقط (جـ) I ، II فقط (د) II ، III فقط

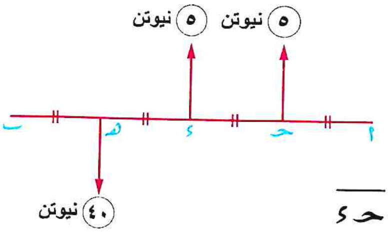
(٧) إذا كان مقدارا قوتان متوازيتان تعملان فى نفس الاتجاه هما $\frac{س}{ص}$ ، $\frac{ص}{س}$ نيوتن ومحصلتهما ٢ نيوتن فإن ....

(أ) $س = ص$ (ب) $س = ٢ ص$ (جـ) $ص = ٢ س$ (د) $س = \frac{١}{٢} ص$

(٨) قوتان $ق_١$ ، $ق_٢$ متوازيتان وتعملان فى نفس الاتجاه إذا بدلت مكانيهما فإن محصلتهما لا تغير مكانها فإن ....

(أ) $ق_١ = ق_٢$ (ب) $ق_١ = ٢ ق_٢$ (جـ) $٢ ق_١ = ق_٢$ (د) $ق_١ = \frac{١}{٢} ق_٢$

(٩) فى الشكل المقابل :



نقطة تأثير محصلة القوى

تنتمى إلى ....

(أ) $\overline{أ حـ}$ (ب) $\overline{حـ ء}$

(جـ) $\overline{ء هـ}$ (د) $\overline{هـ ب}$

(١٠) $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ قوتان متوازيتان البعد بين خطى عمليهما = ١٠ سم وكان خط عمل محصلتهما يبعد عن خط عمل $\overleftarrow{ق_١}$ بمقدار ١٢ سم فإن : ....

(أ) $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ فى نفس الاتجاه. (ب) $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ متضادان فى الاتجاه.

(جـ) $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق_١} - \overleftarrow{ق_٢}$ (د) $ح = ق_١ + ق_٢$

(١١) إذا كانت : $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ قوتان بحيث $٣ \overleftarrow{ق_١} = ٢ \overleftarrow{ق_٢}$ ومحصلتهما تبعد عن $\overleftarrow{ق_١}$ مسافة ١٥ سم فإن بعد المحصلة عن $\overleftarrow{ق_٢}$ = ... سم.

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ٢٥

(١٢) إذا كانت : $ق_١$ ، $ق_٢$ قوتان تؤثران فى نقطتين أ ، ب حيث $٢ \overleftarrow{ق_١} = -٣ \overleftarrow{ق_٢}$ ومحصلتهما تؤثر فى نقطة حـ $\in \overleftrightarrow{أ ب}$ فإن : ....

(أ) أ حـ : حـ ب = ٢ : ١ (ب) أ حـ : أ ب = ٢ : ٣

(جـ) ب حـ : أ حـ = ٣ : ٢ (د) ب حـ : أ ب = ٣ : ٢

(١٣) قوتان متوازيتان فى اتجاه واحد مقداراهما ق ، ٣ ق وتؤثران فى النقطتين أ ، ب على الترتيب فإذا بدلت القوتان مكانيهما فإن محصلتهما تتحرك مسافة ....

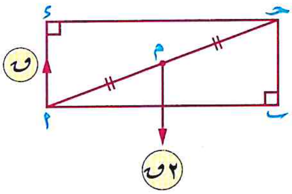
(أ) $\frac{٣}{٤}$ أ ب (ب) $\frac{١}{٢}$ أ ب (جـ) $\frac{١}{٣}$ أ ب (د) $\frac{١}{٤}$ أ ب

(١٤) إذا كان : $\overleftarrow{ق_1} \,//\, \overleftarrow{ق_2}$ ، $ق_1 > ق_2$ وكان مقدار محصلتهما = ع إذا كانتا فى اتجاهين متضادين ومقدار محصلتهما = ٥ ع إذا كان لهم نفس الاتجاه

فإن : $ق_1$ = ... $ق_2$

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٥}{٣}$ (د) $\frac{٧}{٣}$

(١٥) **فى الشكل المقابل :**



أ ب حـ ء مستطيل أثرت القوتان المتوازيتان

التى مقداراهما ق ، ٢ ق

فإن خط عمل المحصلة هو ....

(أ) $\overleftrightarrow{أء}$ (ب) $\overleftrightarrow{حـب}$

(جـ) $\overleftrightarrow{أحـ}$ (د) $\overleftarrow{ءحـ}$

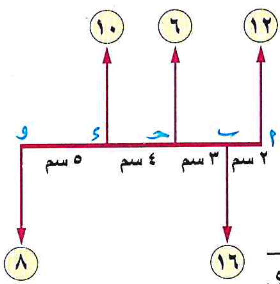
(١٦) إذا كانت : $\overleftarrow{ق_1} = -٢\,\overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص}$ تؤثر فى أ (−٢ ، ٠) ، $\overleftarrow{ق_2} \,//\, \overleftarrow{ق_1}$ حيث $\overleftarrow{ع} = ٦\,\overleftarrow{س} - ٣\,\overleftarrow{ص}$ تؤثر فى حـ (٦ ، ٠) فإن نقطة تقاطع خط عمل $\overleftarrow{ق_2}$ مع $\overleftrightarrow{أحـ}$ هى ....

(أ) (٤ ، ٠) (ب) (٨ ، ٠) (جـ) (٢ ، ٠) (د) (٠ ، ٠)

(١٧) قوتان متوازيتان فى اتجاه واحد مقداراهما ٣ نيوتن ، ٢ نيوتن تؤثران فى أ ، ب على الترتيب بحيث كان : أ ب = ٥ وحدة طول وانتقلت القوة ٣ نيوتن فى الاتجاه $\overleftarrow{بأ}$ ثلاث وحدات طول وانتقلت القوة ٢ نيوتن فى الاتجاه $\overleftarrow{أب}$ وحدتين طول فإن خط عمل المحصلة ينتقل فى اتجاه .... مسافة .... وحدة طول.

(أ) $\overleftarrow{أب}$ ، ١ (ب) $\overleftarrow{بأ}$ ، ١ (جـ) $\overleftarrow{أب}$ ، ٢ (د) $\overleftarrow{بأ}$ ، ٢

(١٨) (تجريبى ٢٠٢١) **فى الشكل المقابل :**

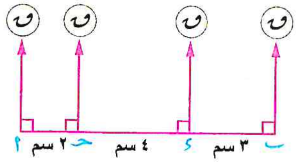


$\overline{أو}$ ساق خفيفة ، أثرت عليها القوى المستوية المتوازية الموضحة بالشكل ، وخط عمل المحصلة يقطع $\overleftrightarrow{أو}$ فى النقطة هـ فإن ....

(أ) هـ $\in \overline{أحـ}$ (ب) هـ $\in \overline{حـو}$

(جـ) هـ $\in \overleftarrow{وأ}$ ، هـ $\notin \overline{وأ}$ (د) هـ $\in \overleftarrow{أو}$ ، هـ $\notin \overline{أو}$

(١٩) في الشكل المقابل :

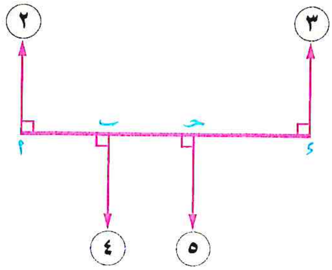


إذا كانت محصلة هذه القوى تؤثر في نقطة م $\in \overline{أب}$

فإن ب م = ... سم.

(أ) ٢,٢٥ (ب) ٣,٢٥ (جـ) ٣,٧٥ (د) ٤,٧٥

(٢٠) (دور أول ٢٠٢١) في الشكل المقابل :

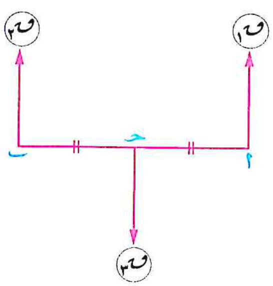


القوى التي مقاديرها ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٣ نيوتن تؤثر عند النقط أ ، ب ، حـ ، ء على الترتيب حيث ء حـ = ٤ سم ، حـ ب = ب أ = ٣ سم ، فإذا كانت محصلة هذه المجموعة تؤثر في نقطة م $\in \overline{أء}$

، فإن : ء م = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٧ (جـ) ٤ (د) ٣,٥

(٢١) في الشكل المقابل :



ثلاث قوى متوازية ومتساوية في المقدار إذا تحركت القوة ق٣ في اتجاه $\overleftarrow{حـ أ}$ مسافة س

فإن المحصلة ....

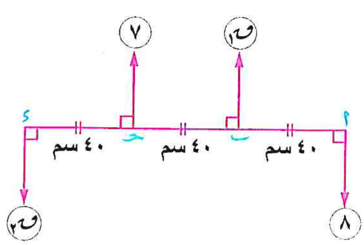
(أ) تظل كما هي.

(ب) تتحرك في اتجاه $\overleftarrow{حـ أ}$ مسافة س

(جـ) تتحرك في اتجاه $\overleftarrow{حـ أ}$ مسافة $\frac{1}{2}$ س

(د) تتحرك في اتجاه $\overleftarrow{حـ ب}$ مسافة س

(٢٢) (دور أول ٢٠٢١) في الشكل المقابل :



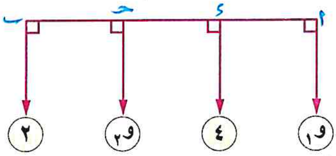
أ ، ب ، حـ ، ء أربع نقاط تنتمي لمستقيم أفقي واحد ، أب = ب حـ = حـ ء = ٤٠ سم

أثرت القوى المتوازية التي مقاديرها

٨ ، ق١ ، ٧ ، ق٢ نيوتن فإذا كانت محصلة هذه القوى ٦ نيوتن وتعمل لأسفل عند نقطة م (حيث م منتصف $\overline{أء}$) ، فإن : ق١ + ق٢ = ... نيوتن.

(أ) ١٢ (ب) ١٠ (جـ) ١٣ (د) ١٦

(٢٣) (دورثان ٢٠٢١) فى الشكل المقابل :



أب مسطرة خفيفة (مهملة الوزن) ، طولها ٣٠٠ سم

، أثرت القوى التى مقاديرها $و_1$ ، ٤ ، $و_2$ ، ٢ ث.جم

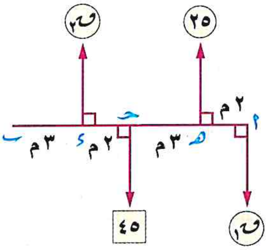
فى اتجاه عمودى على أب حيث أء = ء حـ = حـ ب

، فإذا كانت محصلة هذه القوى ١٠ ث.جم ، وتؤثر فى م حيث أ م = ١٣٠ سم

فإن : $و_1 - و_2$ = ... ث.جم.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣,٥ (د) ٤

(٢٤) (دورثان ٢٠٢١) فى الشكل المقابل :



قضيب منتظم أب وزنه ٤٥ ث.كجم وطوله ١٠ أمتار

، أثرت ثلاث قوى متوازية على القضيب كما هو موضح

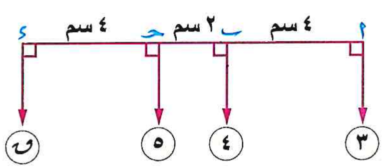
بالشكل ، فإذا كان مقدار المحصلة = ٥٠ ث.كجم

وتؤثر رأسيًا لأسفل فى نقطة ن ∈ أب حيث

أن = ٠,٧ متر. فإن $ق_1$: $ق_2$ = ...

(أ) ٥ : ٢ (ب) ٢ : ٥ (جـ) ٤ : ٩ (د) ٩ : ٤

(٢٥) (دورثان ٢٠٢٢) فى الشكل المقابل :



أ ، ب ، حـ ، ء أربع نقط على مستقيم أفقى

، أثرت القوى المتوازية التى مقاديرها

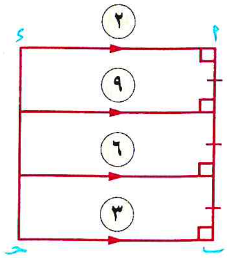
٣ ، ٤ ، ٥ ، ق نيوتن. فى أ ، ب ، حـ ، ء على الترتيب

، فإذا كانت المحصلة تؤثر عند نقطة تبعد عن أ مسافة ٨ سم.

فإن النسبة بين ق ومقدار المحصلة = ...

(أ) ٢ : ٣ (ب) ٣ : ٢ (جـ) ٢٥ : ٣٧ (د) ٥ : ١٧

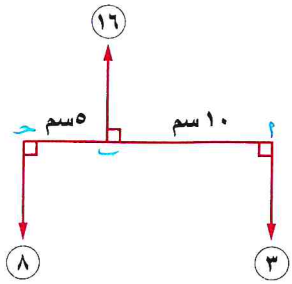
(٢٦) (دور أول ٢٠٢٤) في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ل سم تؤثر فيه القوى الموضحة بالشكل ، إذا كانت القوى مقاسة بوحدة النيوتن ، فإن خط عمل المحصلة يبعد عن نقطة أ مسافة قدرها .... سم.

(أ) $\frac{١}{٤}$ ل (ب) $\frac{١}{٣}$ ل (جـ) $\frac{١}{٢}$ ل (د) $\frac{٢}{٣}$ ل

(٢٧) (دور أول ٢٠٢٢) في الشكل المقابل :



حـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، حيث أ ب = ١٠ سم ، ب حـ = ٥ سم

، أثرت القوى المتوازية التي مقاديرها ٣ ، ١٦ ، ٨ نيوتن

في النقط أ ، ب ، حـ على الترتيب وعمودية على $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

فإذا كانت محصلة هذه القوى هي $\overrightarrow{ح}$ فإن : ....

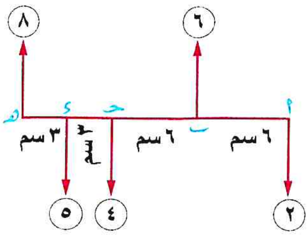
(أ) $\|\overrightarrow{ح}\|$ = ٥ نيوتن ، وتبعد عن أ مسافة = ٧ سم

(ب) $\|\overrightarrow{ح}\|$ = ٢٧ نيوتن ، وتبعد عن أ مسافة = ٨ سم

(جـ) $\|\overrightarrow{ح}\|$ = ٥ نيوتن ، وتبعد عن أ مسافة = ٨ سم

(د) $\|\overrightarrow{ح}\|$ = ٢٧ نيوتن ، وتبعد عن أ مسافة = ٧ سم

(٢٨) (دور ثان ٢٠٢٢) في الشكل المقابل :



إذا أثرت القوى المتوازية الموضحة والعمودية على $\overline{\text{أهـ}}$

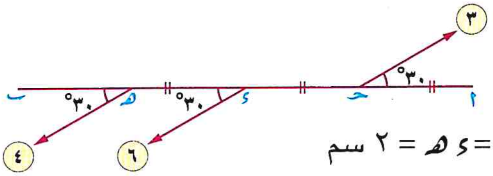
فإن نقطة تأثير المحصلة تقسم $\overleftarrow{\text{أهـ}}$ من جهة أ

بنسبة ....

(أ) ١٩ : ١ من الخارج. (ب) ١ : ١٩ من الخارج.

(جـ) ١٨ : ١٩ من الداخل. (د) ١٩ : ١٨ من الداخل.

(٢٩) (دور ثان ٢٠٢٤) في الشكل المقابل :



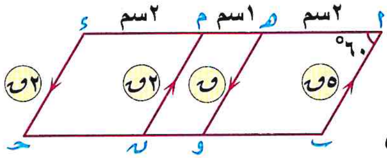
إذا كانت القوى متوازية ومستوية

ومقاسة بوحدة النيوتن ، أ جـ = جـ ء = ء هـ = ٢ سم

، فإن القياس الجبرى لعزم محصلة هذه القوى حول نقطة أ = ... نيوتن.سم.

(أ) ٤٢ (ب) ٢١ (جـ) –٣٣ (د) –٣٩

(٣٠) (دور أول ٢٠٢٤) في الشكل المقابل :



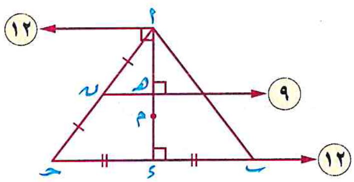
القوى مستوية ومتوازية ومقاسة بوحدة النيوتن ،

فإذا كان القياس الجبرى لعزم محصلة هذه القوى

حول نقطة أ يساوى $150\sqrt{3}$ نيوتن.سم. فإن : ق = ... نيوتن

(أ) $50\sqrt{3}$ (ب) $40\sqrt{3}$ (جـ) ٧٥ (د) ٥٠

(٣١) (دور ثان ٢٠٢١) في الشكل المقابل :



أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = أ جـ = ١٥ سم

، ب جـ = ١٨ سم أثرت القوى المستوية

المتوازية التى مقاديرها ١٢ ، ٩ ، ١٢ نيوتن

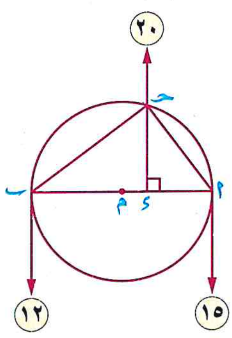
فى النقط أ ، ن ، جـ على الترتيب عموديًا على $\overline{\text{أء}}$

، م نقطة تلاقى متوسطات المثلث أ ب جـ فإن القياس الجبرى لمجموع عزوم القوى

حول نقطة م = ... نيوتن.سم.

(أ) –١٢٦ (ب) ١٦٢ (جـ) –١٦٢ (د) ١٢٦

(٣٢) (دور أول ٢٠٢١) في الشكل المقابل :



توثر القوى المستوية المتوازية التى مقاديرها ٢٠ ، ١٥ ، ١٢ نيوتن

فى النقط جـ ، أ ، ب على الترتيب.

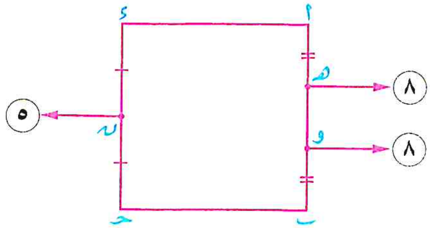
فإذا كانت خطوط عمل القوى عمودية على القطر $\overline{\text{أب}}$

فى الدائرة م ، أ جـ = ٦ سم ، جـ ب = ٨ سم

، فإن القياس الجبرى لعزوم القوى حول مركز الدائرة م = ... نيوتن.سم.

(أ) –١٣ (ب) ٤٣ (جـ) ١٣ (د) –٤٣

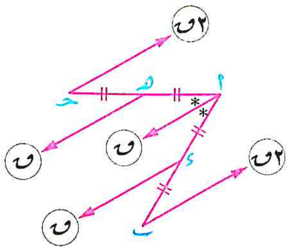
٣٣ (تجريبى ٢٠٢١) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء مربع ، أثرت القوى المستوية المتوازية التى مقاديرها ٨ ، ٨ ، ٥ نيوتن فى النقط هـ ، و ، ن على الترتيب حيث ن منتصف $\overline{\text{ءحـ}}$ ، أ هـ = ب و ، فإن القياس الجبرى لمجموع عزوم القوى حول نقطة تقاطع القطرين = ... نيوتن.سم.

(أ) ١٦ (ب) ٨ (جـ) ٥ (د) صفر

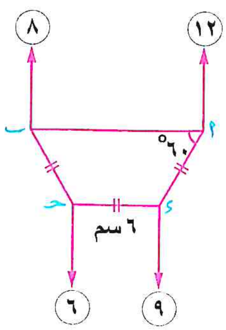
٣٤ (دور أول ٢٠٢٤) فى الشكل المقابل :



القوى متوازية ومستوية ومقاسة بوحدة النيوتن ، إذا كان : أ ب = أ حـ ، فإن القياس الجبرى لعزم محصلة القوى حول النقطة أ = ... نيوتن.سم.

(أ) صفر (ب) ق (جـ) ٢ ق (د) ٧ ق

٣٥ فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شبه منحرف فيه

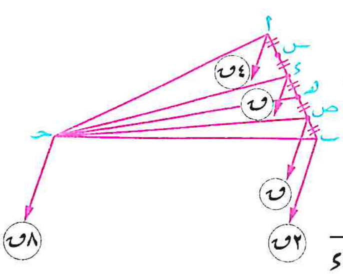
أ ء = ء حـ = حـ ب = ٦ سم

، ق (∠ ء أ ب) = ٦٠°

أثرت قوى متوازية مقاديرها ١٢ ، ٨ ، ٦ ، ٩ نيوتن فى رؤوسه أ ، ب ، حـ ، ء على الترتيب كما بالشكل فإن خط عمل محصلة هذه القوى يبعد عن أ مسافة .... سم.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

٣٦ فى الشكل المقابل :



إذا كان : أ س = س ء = ء هـ = هـ ص = ص ب

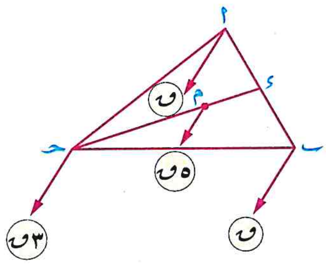
والقوى مقدره بالنيوتن وفى نفس الاتجاه

فإن محصلة القوى تؤثر فى منتصف ....

(أ) $\overline{\text{حـ أ}}$ (ب) $\overline{\text{حـ ء}}$

(جـ) $\overline{\text{حـ هـ}}$ (د) $\overline{\text{حـ ص}}$

(٣٧) فى الشكل المقابل :



أ ب ﺣ مثلث ، م نقطة تلاقى متوسطات Δ أ ب ﺣ

القوى التى مقاديرها ق ، ق ، ٥ ق ، ٣ ق قوى متوازية وفى اتجاه واحد تقع خطوط عملها فى مستوى المثلث فإذا كان طول المتوسط $\overline{\text{ﺣ ء}}$ = ٣٠ سم

فإن محصلة هذه القوى تؤثر فى نقطة تبعد عن ﺣ مسافة = ... سم.

(أ) ١٤ (ب) ١٥ (ﺟ) ١٦ (د) ٢٠

(٣٨) (دور أول ٢٠٢٣) إذا أثرت القوى المستوية والمتوازية :

$\overrightarrow{ق_1}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ − ٣ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = −٦ $\overrightarrow{س}$ + ٩ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ = ٦ $\overrightarrow{س}$ − ٩ $\overrightarrow{ص}$

، فى النقط : أ (١ ، ٢) ، ب (٢ ، ٤) ، ﺣ (−٣ ، −٦) على الترتيب.

فإن متجه عزم المحصلة حول النقطة ء (−١ ، ٠) = ...

(أ) ٥٩ $\overrightarrow{ع}$ (ب) ٩٥ $\overrightarrow{ع}$ (ﺟ) − ٩٥ $\overrightarrow{ع}$ (د) − ٥٩ $\overrightarrow{ع}$

(٣٩) (دور ثان ٢٠٢٢) إذا أثرت القوى المتوازية المستوية $\overrightarrow{ق_1}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ − $\overrightarrow{ص}$

، $\overrightarrow{ق_2}$ = ل $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ = −٤ $\overrightarrow{س}$ + ك $\overrightarrow{ص}$ ، فى النقاط أ $\left(\frac{-ل}{٢} ، ك\right)$

، ب $\left(\frac{ل}{٣} ، \frac{-ك}{٢}\right)$ ، ﺣ (٢ ك ، ٠) على الترتيب ، فإن مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول نقطة الأصل = ... وحدة عزم.

(أ) ١١ (ب) −١٣ (ﺟ) −٣ (د) −١١

---

(٢) (دور أول ٢٠١٠) قوتان $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ تؤثران عند النقطتين أ ، ب على الترتيب فى اتجاه عمودى على $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ حيث أ ب = ٣٠ سم وكانت محصلتهما $\overrightarrow{ح}$ = − ٣ $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$ وتؤثر عند نقطة ﺣ $\in$ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ فإذا علمت أن $\overrightarrow{ق_2}$ = − ٦ $\overrightarrow{س}$ + ٨ $\overrightarrow{ص}$ فعيِّن $\overrightarrow{ق_1}$ واحسب طول $\overline{\text{ب ﺣ}}$

«$\overrightarrow{ق_1}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ − ٤ $\overrightarrow{ص}$ ، ب ﺣ = ٣٠ سم»

---

(٣) (دور أول ١٩٩٣) $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ متجها وحدة متعامدان فى اتجاهى محورى الإحداثيات $\overrightarrow{و س}$ ، $\overrightarrow{و ص}$ والقوتان $\overrightarrow{ق_1}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + أ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = − ٦ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ متوازيتان. عيِّن قيمة أ وإذا أثرت القوتان فى النقطتين (١ ، ٠) ، (٥ ، ٠) على الترتيب. فأوجد نقطة تقاطع خط عمل محصلتهما مع $\overrightarrow{و س}$

«−١ ، (٧ ، ٠)»

٤ تؤثر القوتان $\overrightarrow{ق_1} = ٣\,\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = -٩\,\overrightarrow{س} + ٣\,\overrightarrow{ص}$ فى النقطتين أ (-١ ، ٠) ، ب (١ ، ٢) على الترتيب.
أوجد محصلة القوتين وعين نقطة تقاطع خط عملها مع $\overleftrightarrow{أب}$ «$-٦\,\overrightarrow{س} + ٢\,\overrightarrow{ص}$ ، (٢ ، ٣)»

---

٥ إذا كانت القوتان $\overrightarrow{ق_1} = -٢\,\overrightarrow{س} + ك\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = ٨\,\overrightarrow{س} - ٤\,\overrightarrow{ص}$ متوازيتين.
عيِّن قيمة ك وإذا أثرت $\overrightarrow{ق_1}$ فى النقطة (-٢ ، ٠) وأثرت $\overrightarrow{ق_2}$ فى النقطة (٤ ، ٠) عيِّن نقطة تقاطع خط عمل محصلتهما مع محور السينات وأوجد معادلة خط عمل المحصلة.
«١ ، (٦ ، ٠) ، س + ٢ ص - ٦ = ٠»

---

٦ تؤثر القوتان المتوازيتان $\overrightarrow{ق_1} = ٢\,\overrightarrow{س} - ٣\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ فى النقطتين أ (١ ، ٣) ، ب (٤ ، ٩) على الترتيب فإذا كانت محصلة القوتين تؤثر فى نقطة حـ (٣ ، ٧)
فأوجد : $\overrightarrow{ق_2}$ «$٤\,\overrightarrow{س} - ٦\,\overrightarrow{ص}$»

---

٧ (دور أول ٢٠٢٣) إذا أثرت القوتان $\overrightarrow{ق_1} = ٦\,\overrightarrow{س} + ٤\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = ٣\,\overrightarrow{س} + ٢\,\overrightarrow{ص}$ فى النقطتين أ (١ ، ٢) ، ب على الترتيب ، وكانت محصلة القوتين تؤثر فى النقطة حـ (٢ ، ١) $\in \overleftrightarrow{أب}$ فأوجد إحداثى نقطة ب «(٤ ، -١)»

---

٨ قوتان متوازيتان تؤثران فى نقطتين أ ، ب حيث : أب = ٢٠ سم ، فإذا كانت $\overrightarrow{ق_1} = ٦\,\overrightarrow{س} + ٨\,\overrightarrow{ص}$ وتؤثر فى أ وكانت ع = ٥ نيوتن وتؤثر فى نقطة حـ ، حـ $\in \overleftrightarrow{أب}$
فأوجد كلاً من : $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ع}$ ، وطول $\overline{أحـ}$ فى كل حالة.
«$\overrightarrow{ق_2} = -٣\,\overrightarrow{س} - ٤\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ع} = ٣\,\overrightarrow{س} + ٤\,\overrightarrow{ص}$ ، أحـ = ٢٠ سم
أو $\overrightarrow{ق_2} = -٩\,\overrightarrow{س} - ١٢\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ع} = -٣\,\overrightarrow{س} - ٤\,\overrightarrow{ص}$ ، أحـ = ٦٠ سم»

---

٩ أثرت القوى المتوازية $\overrightarrow{ق_1} = -٢\,\overrightarrow{س} + ٦\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = \overrightarrow{س} - ٣\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_3} = ٥\,\overrightarrow{س} - ١٥\,\overrightarrow{ص}$ فى النقط : أ (٢ ، ٣) ، ب (-٣ ، ١) ، حـ (-١ ، ٢) على الترتيب. أوجد معادلة خط عمل محصلة هذه القوى. «١٢ س + ٤ ص + ٢١ = ٠»

---

١٠ أثرت القوى المتوازية $\overrightarrow{ق_1} = \overrightarrow{س} + م\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = ٣\,\overrightarrow{س} - ١٥\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_3} = ن\,\overrightarrow{س} + ١٠\,\overrightarrow{ص}$ عند النقط أ (٣ ، ١) ، ب (٣ ، ٠) ، حـ (٣ ، ٥) على الترتيب. أوجد قيمتى م ، ن ، معادلة خط عمل محصلة هذه القوى.
«-٥ ، -٢ ، ١٠ س + ٢ ص - ٢١ = ٠»

١١ تؤثر القوى المتوازية التى مقاديرها ٥ ، ٨ ، ١٢ نيوتن فى اتجاه واحد فى النقط ٢ (٢ ، −٢) ، ب (٠ ، ٣) ، حـ (٤ ، −١) على الترتيب.

أوجد نقطة تأثير محصلة هذه القوى. «$\left(\frac{٥٨}{٢٥} ، \frac{٢}{٢٥}\right)$»

---

١٢ ٢ب حـ مثلث أثرت فى رؤوسه ثلاث قوى متوازية ومتساوية فى المقدار ومتحدة الاتجاه. أثبت أن خط عمل محصلتها يمر بنقطة تقاطع متوسطات المثلث.

---

١٣ ٢ب حـ ء مربع تؤثر فى رؤوسه ٢ ، ب ، حـ ، ء أربع قوى متساوية ومتوازية وفى اتجاه واحد. أثبت أن محصلة هذه القوى الأربع تمر بنقطة تقاطع قطرى المربع.

مسائل تقيس مهارات التفكير

١٤ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

① إذا كان : $\overleftarrow{ق_١}$ // $\overleftarrow{ق_٢}$ وتؤثران فى النقطتين ٢ ، ب على الترتيب ومحصلتهما $\overleftarrow{ح}$ تؤثر فى النقطة م ∈ $\overleftrightarrow{٢ب}$

أولاً : إذا كان : ح > ق٢ > ق١ فأى العبارات الآتية غير صحيحة ؟

(أ) ح > ٢ ق١ (ب) ٢م = ٢ب − ب م

(جـ) ح = ق١ + ق٢ (د) $\frac{ق_٢}{ق_١} = \frac{ب م}{٢ م}$

ثانيًا : إذا كان : ق١ > ق٢ > ح فأى العبارات الآتية غير صحيحة ؟

(أ) ٢م > ب م (ب) ٢ب = ب م − ٢م

(جـ) ق١ > ٢ ق٢ (د) ق١ = ح + ق٢

ثالثًا : إذا كان : ق١ > ق٢ ، ق٢ = ح فأى العبارات الآتية غير صحيحة ؟

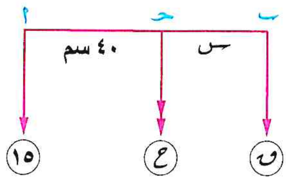
(أ) ح = $\frac{١}{٢}$ ق١ (ب) ح = ق١ − ق٢

(جـ) ب م = ٢ ٢ب (د) ٢م = م ب

رابعًا : إذا كان : ق١ > ح > ق٢ فأى العبارات الآتية غير صحيحة ؟

(أ) $\overleftarrow{ح}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ فى اتجاهين متضادين (ب) ح = ق١ − ق٢

(جـ) ق١ > ٢ ق٢ (د) م ∈ $\overleftarrow{٢ب}$



(٢) فى الشكل المرسوم قوتان متوازيتان مقداراهما ١٥ ، ق نيوتن تؤثران فى النقطتين أ ، ب على الترتيب ومحصلتيهما تؤثر فى النقطة جـ ∈ $\overline{\text{أب}}$ بحيث كان أجـ = ٤٠ سم ، جـ ب = س سم فإذا كانت ق بالنيوتن ∈ [١٠ ، ٢٠]

فإن : س بالسنتيمترات ∈ ....

(أ) [٣٠ ، ٦٠] (ب) [٦٠ ، ٩٠] (جـ) [٢٠ ، ٤٠] (د) [٤٠ ، ٨٠]

(٣) ثلاث قوى $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ متوازية وفى اتجاه واحد أثرت فى النقط أ ، ب ، جـ من رؤوس مثلث أ ب جـ فإذا كانت المحصلة تؤثر فى مركز الدائرة الداخلة للمثلث أ ب جـ فإن ....

(أ) $\frac{ق_1}{\text{ب جـ}} + \frac{ق_2}{\text{أ جـ}} + \frac{ق_3}{\text{أ ب}} = \text{صفر}$

(ب) $ق_1 \times \text{ب جـ} + ق_2 \times \text{أ جـ} + ق_3 \times \text{أ ب} = \text{صفر}$

(جـ) $\frac{ق_1}{\text{ب جـ}} = \frac{ق_2}{\text{أ جـ}} = \frac{ق_3}{\text{أ ب}}$

(د) $ق_1 \times \text{ب جـ} = ق_2 \times \text{أ جـ} = ق_3 \times \text{أ ب}$

---

١٥ ن من القوى المستوية المتوازية المتساوية مقدار كل منها = ق تؤثر فى اتجاه يوازى المحور الصادى وهى بالتتالى متضادة الاتجاه وتؤثر أولها فى الاتجاه الموجب للمحور الصادى وعلى بُعد منه = ٢ سم وكان البُعد بين كل قوة والتالية لها = ٢ سم . فإذا كانت ن عددًا فرديًا . فأثبت أن المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول نقطة الأصل يساوى (ن + ١) × ق

---

١٦ أ ب جـ ء هـ و شكل سداسى منتظم مركزه م ، $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى مستوى الشكل ويوازى $\overline{\text{جـ أ}}$ أثرت القوى ١٦ $\overrightarrow{ى}$ ، −٦ $\overrightarrow{ى}$ ، −٨ $\overrightarrow{ى}$ ، ٣٠ $\overrightarrow{ى}$ ، −١٨ $\overrightarrow{ى}$ فى أ ، ب ، م ، ء ، هـ على الترتيب. أثبت أن محصلة هذه القوى = ١٤ $\overrightarrow{ى}$ وتؤثر فى نقطة على $\overline{\text{ب هـ}}$ وتبعد عن م مسافة تساوى $\frac{٥}{١٤}$ ل حيث ل طول ضلع السداسى.

الدرس

2

اتزان مجموعة من القوى المستوية.

إذا أثرت مجموعة من القوى المستوية فى جسم متماسك وظل هذا الجسم ساكنًا فإنه يُقال أن هذا الجسم متزن تحت تأثير هذه القوى كما يُقال أن مجموعة القوى المؤثرة على الجسم متوازنة.

نظرية

إذا انعدم مجموع القوى لمجموعة ما من القوى المستوية وانعدم عزمها بالنسبة لنقطة واحدة فى مستويها كانت هذه المجموعة متزنة.

البرهان :

نفرض أن عزم المجموعة بالنسبة لنقطة (و) ينعدم أى أن $\overleftarrow{ج}_{و} = \overleftarrow{٠}$

، ∵ متجه مجموع القوى ينعدم $(\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{٠})$

∴ عزم المجموعة لا يتغير من نقطة لأخرى

، فإذا انعدم هذا العزم بالنسبة للنقطة (و) فإنه ينعدم بالنسبة لأى نقطة أخرى

∴ $\overleftarrow{ج}$ ينعدم بالنسبة لأى نقطة أخرى

∴ المجموعة متزنة. (وهو المطلوب)

ملاحظة

عكس النظرية يكون صحيحًا دائمًا :

أى أن : إذا كانت مجموعة القوى متوازنة فإن :

- $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{٠}$ أى ينعدم مجموع (محصلة) القوى.
- $\overleftarrow{ج} = \overleftarrow{٠}$ أى ينعدم عزم مجموعة القوى بالنسبة لأى نقطة.

بناء على النظرية السابقة نستنتج الشروط الكافية واللازمة لاتزان مجموعة من القوى المستوية :

الشروط الكافية واللازمة لاتزان مجموعة من القوى المستوية

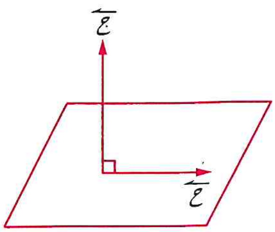
من النظرية السابقة نستنتج أن : لكى تتوازن مجموعة من القوى المستوية لابد أن يتحقق الشرطان التاليان :

(١) ينعدم متجه مجموع القوى. (٢) ينعدم عزم المجموعة بالنسبة لنقطة واحدة.

صياغة مكافئة للشروط الكافية واللازمة للاتزان

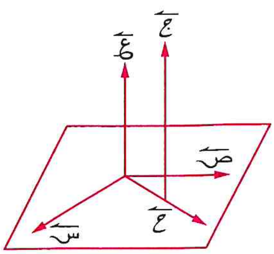
نعلم أن القوى المستوية المؤثرة تقع جميعها فى مستوٍ واحد كما أن النقط التى ننسب إليها عزوم هذه القوى تقع أيضًا فى نفس هذا المستوى.

ومن ذلك نجد أن :



(١) متجه مجموع القوى وهو $\overleftarrow{\text{ح}}$ يقع فى مستوى القوى.

(٢) متجه عزم مجموعة القوى وهو $\overleftarrow{\text{ج}}$ بالنسبة لأى نقطة واقعة فى مستوى القوى يكون عموديًا على هذا المستوى كما هو واضح بالشكل فإذا أدخلنا مجموعة متجهات الوحدة المتعامدة $\{\overleftarrow{\text{س}} ، \overleftarrow{\text{ص}} ، \overleftarrow{\text{ع}}\}$ بحيث يقع $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ فى مستوى القوى وبذلك يكون $\overleftarrow{\text{ع}}$ عموديًا على هذا المستوى وبذلك يمكن تحليل المتجه $\overleftarrow{\text{ح}}$ فى اتجاهى $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ بينما يوازى المتجه $\overleftarrow{\text{ج}}$ متجه الوحدة $\overleftarrow{\text{ع}}$ كما بالشكل الموضح



$\therefore \overleftarrow{\text{ح}} = \text{س}\,\overleftarrow{\text{س}} + \text{ص}\,\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ج}} = \text{ج}\,\overleftarrow{\text{ع}}$

حيث : س = مجموع المركبات الجبرية لقوى المجموعة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{س}}$

، ص = مجموع المركبات الجبرية لقوى المجموعة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{ص}}$

، ج = مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى منسوبة إلى متجه الوحدة $\overleftarrow{\text{ع}}$

ومن ذلك نجد أنه إذا كان س = ص = ج = صفر

فإن : $\overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{0}$ ، $\overleftarrow{\text{ج}} = \overleftarrow{0}$ وحيث أننا لم نحدد اتجاهى $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ فى المستوى فإنه يمكن التوصل إلى الصياغة المكافئة التالية للشروط الكافية واللازمة للاتزان :

لكى تتوازن مجموعة من القوى يكفى ويلزم أن يتحقق الشرطان التاليان :

① ينعدم مجموع المركبات الجبرية للقوى فى أى اتجاهين متعامدين واقعين فى مستويها.

أى أن : $س = ٠$ ، $ص = ٠$

② ينعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة لنقطة واحدة فى مستويها.

أى أن : ع = صفر

ملاحظة

تظل الشروط الكافية واللازمة لتوازن مجموعة من القوى صحيحة فى حالة أن يكون متجها الوحدة $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ غير متوازيين (وليس بالضرورة متعامدين).

والشرط الأول يعنى أن محصلة هذه القوى تنعدم وبالتالى فلا يحدث فى الجسم حركة انتقالية.

والشرط الثانى يعنى أن مجموعة هذه القوى لا تحدث حركة دورانية فى الجسم.

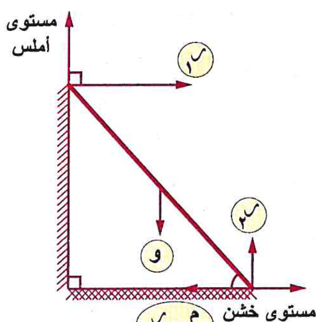
وكما نعلم فإننا فى حالة القوى المتلاقية فى نقطة فإن الشرط الأول يكون كافٍ وحده لحدوث الاتزان. أما بالنسبة للقوى غير المتلاقية فى نقطة فإن الأمر يتطلب توفر الشرط الثانى أيضاً حتى نضمن عدم حدوث حركة دورانية فى الجسم.

ملاحظات (تحديد رد الفعل)

① إذا ارتكز قضيب بطرفه على مستوى أملس كان رد الفعل عموديًا على المستوى.

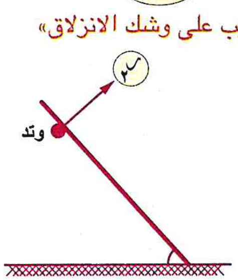
② إذا ارتكز قضيب بطرفه على مستوى خشن كان رد الفعل غير معلوم الاتجاه ويمكن تحليله إلى مركبتين هما رد الفعل العمودى وقوة الاحتكاك.

وإذا كان القضيب على وشك الحركة تكون المركبتين هما رد الفعل العمودى ($ر$) ، قوة الاحتكاك النهائى ($م_س ر$)



«قضيب على وشك الانزلاق»

③ إذا ارتكز قضيب بإحدى نقاطه الداخلية على (وتد - جسم آخر) كان رد الفعل عموديًا على القضيب.

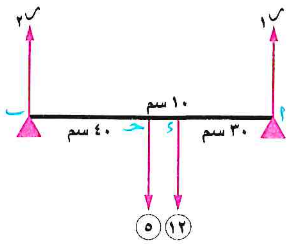


مثال ١

يرتكز قضيب منتظم وزنه ٥ ثقل كجم فى وضع أفقى على حاملين عند طرفيه والبُعد بينهما ٨٠ سم ، علقت كتلة مقدارها ١٢ كجم فى نقطة تبعد عن أحد الحاملين بمقدار ٣٠ سم.

أوجد مقدار الضغط على كل من الحاملين.

الحـــل



القضيب متزن بتأثير ٤ قوى متوازية مستوية هى :

ر١ رد فعل الحامل عند أ ، ر٢ رد فعل الحامل عند ب

، ووزن القضيب ٥ ثقل كجم عند حـ منتصف $\overline{أب}$

، والثقل المعلق ١٢ ثقل كجم عند ء حيث أء = ٣٠ سم

فحسب شروط التوازن يكون :

(١) مجموع القياسات الجبرية للقوى = صفرًا

∴ ر١ + ر٢ − ٥ − ١٢ = ٠ ∴ ر١ + ر٢ = ١٧ (١)

(٢) مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول أ = صفرًا

∴ ١٢ × أء + ٥ × أحـ − ر٢ × أب = ٠

أى : ١٢ × ٣٠ + ٥ × ٤٠ − ر٢ × ٨٠ = ٠

∴ ٨٠ ر٢ = ٣٦٠ + ٢٠٠ = ٥٦٠

∴ ر٢ (رد فعل الحامل عند ب) = ٧ ثقل كجم وهو يساوى الضغط على الحامل عند ب

وبالتعويض فى (١) :

∴ ر١ (رد فعل الحامل عند أ) = ١٧ − ٧ = ١٠ ثقل كجم

وهو يساوى الضغط على الحامل عند أ

ملاحظة

من الممكن الحصول على ر١ ، ر٢ بإيجاد مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى مرة حول أ فنحصل على ر٢ كما سبق ثم بإيجاد مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى مرة أخرى حول ب فنحصل على ر١ إذ نجد أن :

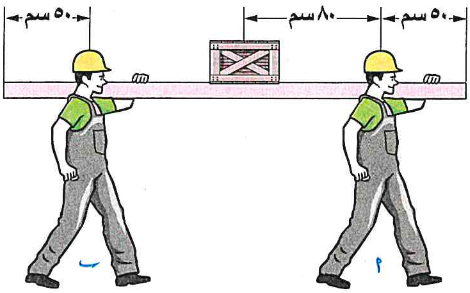
مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول ب = ر١ × ٨٠ − ١٢ × ٥٠ − ٥ × ٤٠ = صفرًا

أى : ٨٠ ر١ = ٨٠٠

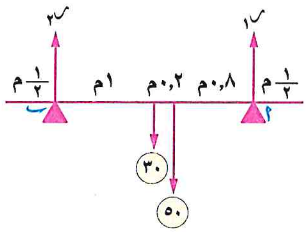
∴ ر١ = ١٠ ثقل كجم وتكون ر٢ = ٧ ثقل كجم.

مثال ٢

رجلان أ ، ب يحملان لوحًا منتظمًا من الخشب طوله ٣ متر ووزنه ١٠ ث.كجم لكل متر من طوله يحمل صندوقًا وزنه ٥٠ ث.كجم كما بالشكل المقابل.
أوجد الضغط على كتف كل رجل ثم عيِّن على اللوح موضع كتف الرجل ب حتى يتساوى الضغطان.



الحـــل



∵ اللوح منتظم فإن وزنه يؤثر فى منتصفه

وزن اللوح = ١٠ × ٣ = ٣٠ ث.كجم

، من شروط الاتزان نجد أن :

$ر_{١} + ر_{٢} = ٥٠ + ٣٠ = ٨٠$ (١)

، $ج_{أ} =$ صفر

∴ $٥٠ × ٠,٨ + ٣٠ × ١ - ر_{٢} × ٢ =$ صفر

∴ $ر_{٢} = ٣٥$ ث.كجم ∴ الضغط على كتف الرجل (ب) = ٣٥ ث.كجم

وبالتعويض فى (١) : ∴ $ر_{١} = ٨٠ - ٣٥ = ٤٥$ ث.كجم

∴ الضغط على كتف الرجل (أ) = ٤٥ ث.كجم

ونفرض أن موضع كتف الرجل (ب) يبعد س سم عن موضع كتف الرجل (أ) فى الحالة التى يتساوى فيها الضغطان أى : $ر_{١} = ر_{٢} = \frac{٨٠}{٢} = ٤٠$ ث.كجم

، ∵ $ج_{أ} = ٠$

∴ $٥٠ × ٠,٨ + ٣٠ × ١ - ٤٠ × س = ٠$ ∴ $س = ١,٧٥$ متر

أى أن : الرجل (ب) يتحرك $\frac{١}{٤}$ متر ناحية الرجل (أ) حتى يتساوى الضغطان.

لاحظ أن

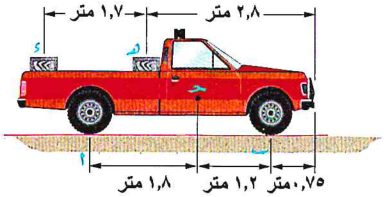
رد فعل كتف الرجل على اللوح يساوى ضغط اللوح على كتف الرجل.

ملاحظة

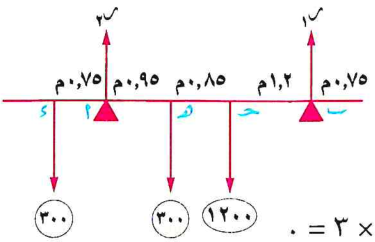
فى المثال السابق كلما اقترب الصندوق من كتف الرجل (أ) كلما زاد الضغط على كتفه وبالتالى زاد رد الفعل عنده وقل الضغط على كتف الرجل (ب) وبالتالى يقل رد الفعل عنده.

مثال ٣

الشكل المقابل يوضح عربة نصف نقل كتلتها ١٢٠٠ كجم ووزنها يؤثر فى الخط الرأسى المار بالنقطة (حـ) ووضع بصندوق العربة صندوقان كتلة كل منهما ٣٠٠ كجم فى الأوضاع المبينة بالشكل. أوجد رد فعل الأرض على كل من العجلتين.



الحل



من شروط الاتزان نجد أن :

ر١ + ر٢ = ١٢٠٠ + ٣٠٠ + ٣٠٠ = ١٨٠٠ ث.كجم (١)

، ∵ جـب = صفر

∴ ١٢٠٠ × ١,٢ + ٣٠٠ × ٢,٠٥ + ٣٠٠ × ٣,٧٥ − ر٢ × ٣ = ٠

∴ ر٢ = ١٠٦٠ ث.كجم

أى أن : رد فعل الأرض على العجلة الخلفية = ١٠٦٠ ث.كم

وبالتعويض فى (١) : ∴ ر١ = ٧٤٠ ث.كجم

أى أن : رد فعل الأرض على العجلة الأمامية = ٧٤٠ ث.كجم.

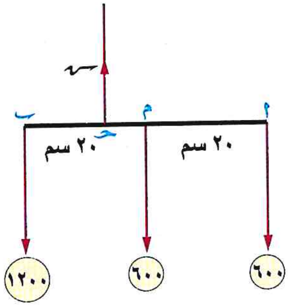
مثال ٤

قضيب منتظم $\overline{\text{أب}}$ طوله ٤٠ سم ووزنه ٦٠٠ ثقل جرام ، علق فى طرفيه أ ، ب جسمان كتلتاهما ٦٠٠ ، ١٢٠٠ جرام على الترتيب فمن أى نقطة على القضيب يجب تعليقه حتى يتزن أفقيًا ؟

الحل

نفرض أن نقطة التعليق هى حـ فيكون القضيب متزنًا بتأثير أربع قوى متوازية مستوية هى : وزنه ٦٠٠ ثقل جرام ويؤثر فى م منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، الثقلين ٦٠٠ ، ١٢٠٠ ثقل جرام المعلقين عند أ ، ب ، الشد فى خيط التعليق عند حـ وليكن ش

فحسب شروط التوازن يكون :



(١) مجموع القياسات الجبرية للقوى = صفرًا

∴ ش − ٦٠٠ − ٦٠٠ − ١٢٠٠ = ٠

∴ ش = ٢٤٠٠ ثقل جرام

(٢) مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول أ = صفرًا

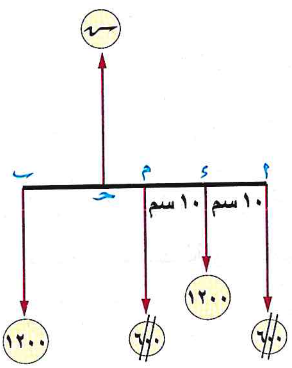
∴ ٦٠٠ × م أ + ١٢٠٠ × أ ب − ش × أ حـ = ٠

أى : ٦٠٠ × ٢٠ + ١٢٠٠ × ٤٠ − ٢٤٠٠ أ حـ = ٠

∴ ٢٤٠٠ أ حـ = ١٢٠٠٠ + ٤٨٠٠٠ = ٦٠٠٠٠ ∴ أ حـ = ٢٥ سم

أى أن : نقطة التعليق تبعد عن الطرف أ بمقدار ٢٥ سم

حل آخر :



∵ محصلة القوتين ٦٠٠ ، ٦٠٠ هى ١٢٠٠

تؤثر فى النقطة ء منتصف $\overline{\text{أم}}$

وكذلك القوتين ١٢٠٠ ، ١٢٠٠

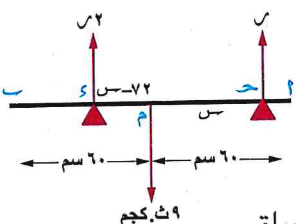
تؤثر فى النقطة حـ منتصف $\overline{\text{ءب}}$

∴ بُعد الشد عن أ = ٢٥ سم.

مثال ٥

ساق من الحديد طولها ١٢٠ سم ووزنها ٩ ث.كجم يؤثر فى منتصفها ، ترتكز فى وضع أفقى على حاملين البُعد بينهما ٧٢ سم فإذا كان مقدار الضغط على أحد الحاملين ضعف مقدار الضغط على الحامل الآخر. فأوجد بُعد كل من الحاملين عن طرفى الساق.

الحـــل



بفرض أن مقدار رد فعل الحامل الأول = ر

وأن الحامل الأول يبعد مسافة س سم عن نقطة منتصف الساق م

∴ مقدار رد فعل الحامل الثانى = ٢ ر

ويبعد الحامل الثانى مسافة (٧٢ − س) سم عن نقطة منتصف الساق

، ∵ الساق متزن تحت تأثير القوى التى مقاديرها ر ، ٢ ر ، ٩ ث.كجم

$\therefore$ س + ٢ س = ٩ $\qquad$ $\therefore$ ٣ س = ٩ $\qquad$ $\therefore$ س = ٣ ث.كجم

، $\because$ مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول م = صفر

$\therefore$ ٣ × ــس − ٦ × (٧٢ − ــس) = صفر $\qquad$ $\therefore$ ــس = ٢ (٧٢ − ــس)

$\therefore$ ــس = ١٤٤ − ٢ ــس $\qquad$ $\therefore$ ٣ ــس = ١٤٤

$\therefore$ ــس = ٤٨ سم $\qquad$ $\therefore$ م حـ = ٤٨ سم ، م ء = ٧٢ − ٤٨ = ٢٤ سم

$\therefore$ بُعد الحامل الأول عن الطرف أ = ٦٠ − ٤٨ = ١٢ سم

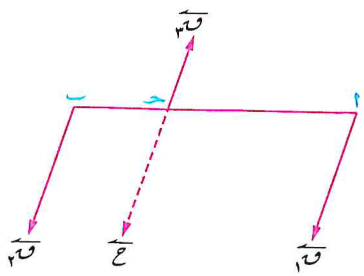
، بُعد الحامل الثانى عن الطرف ب = ٦٠ − ٢٤ = ٣٦ سم

ملاحظة

إذا اتزن جسم متماسك تحت تأثير ثلاث قوى متوازية مستوية فإن كل قوة من القوى الثلاثة تساوى فى المقدار وتضاد فى الاتجاه محصلة القوتين الأخريين ويكون لهما نفس خط العمل.

فإذا أثرت القوى $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ المتوازية المستوية فى النقط أ ، ب ، حـ على الترتيب من جسم متماسك فاتزن الجسم وكانت $\overleftarrow{ح}$ هى محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ فإن :

$\overleftarrow{ق_٣}$ ، $\overleftarrow{ح}$ متساويتان فى المقدار ومتضادتان فى الاتجاه وخط عملهما واحد



، $\because$ ح = ق$_١$ + ق$_٢$

$\therefore$ $\boxed{ق_٣ = ق_١ + ق_٢}$

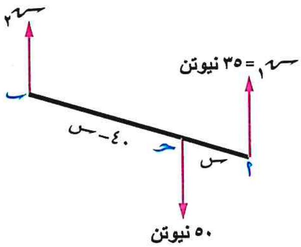
، $\because$ حـ نقطة تأثير المحصلة

$\therefore$ $\boxed{ق_١ \times أحـ = ق_٢ \times بحـ}$

مثال ٦

$\overline{أب}$ قضيب خفيف طوله ٤٠ سم معلق من طرفيه أ ، ب بخيطين رأسيين لا يتحمل أى منها شد يزيد عن ٣٥ نيوتن فعيِّن المواضع من القضيب الذى يمكن تعليق ثقل قدره ٥٠ نيوتن منها دون أن ينقطع الخيط.

الحــل



بفرض أن أقرب نقطة إلى نقطة أ يمكن تعليق الثقل منها دون أن ينقطع الخيط عند أ هى حـ

، بفرض أن : أحـ = س سم ∴ ب حـ = ٤٠ − س سم

∴ الشد عند أ أكبر ما يمكن ∴ $ش_1$ = ٣٥ نيوتن

∴ القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى مقاديرها ٣٥ ، ٥٠ ، $ش_2$ نيوتن

وباستخدام الملاحظة السابقة

∴ ٣٥ + $ش_2$ = ٥٠ ∴ $ش_2$ = ١٥ نيوتن

، $ش_1$ × أحـ = $ش_2$ × ب حـ ∴ ٣٥ × س = ١٥ (٤٠ − س)

∴ ٧ س = ٣ (٤٠ − س) ∴ ٧ س = ١٢٠ − ٣ س

∴ ١٠ س = ١٢٠ ∴ س = ١٢ سم

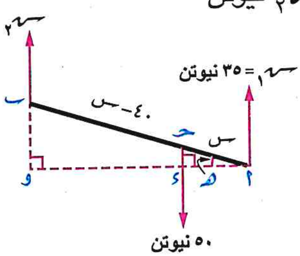
∴ أقرب موضع إلى أ يمكن تعليق الثقل منه دون انقطاع الخيط عند أ يبعد ١٢ سم عن أ

بالمثل أقرب موضع إلى ب يمكن تعليق الثقل منه دون انقطاع الخيط عند ب يبعد ١٢ سم عن ب

∴ الثقل يمكن تعليقه فى أى نقطة على القضيب لا يقل بُعدها عن ١٢ سم عن أ أو ب

حل آخر :

∵ القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى مقاديرها ٣٥ ، ٥٠ ، $ش_2$ نيوتن



∴ ٣٥ + $ش_2$ = ٥٠ ∴ $ش_2$ = ١٥ نيوتن

، ∵ $جـ_أ$ = صفر ∴ ٥٠ × أء − ١٥ × أو = صفر

∴ ٥٠ × س جتا هـ − ١٥ × ٤٠ جتا هـ = ٠

∴ ٥٠ س = ٦٠٠ ∴ س = ١٢ سم

حل ثالث :

$\because$ $ش_١ + ش_٢ = ٥٠$ ، $\because$ أى من الخيطين لا يتحمل شدًا يزيد عن ٣٥ نيوتن

$\therefore$ أقل شد فى الخيط الأخر $= ٥٠ - ٣٥ = ١٥$ نيوتن

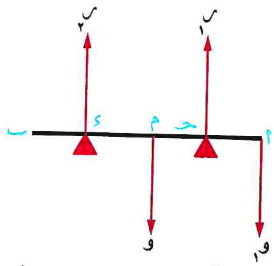
$\therefore$ $١٥ \leq$ الشد فى أى خيط ≤ ٣٥

، $\because$ $ع_م =$ صفر $\therefore$ $ش_٢ \times ٤٠ = ٥٠ \times س$

$\therefore$ $ش_٢ = \frac{٥٠ س}{٤٠} = \frac{٥ س}{٤}$ $\therefore$ $١٥ \leq \frac{٥ س}{٤} \leq ٣٥$ $\therefore$ $١٢ \leq س \leq ٢٨$

أى أن : الثقل يمكن أن يعلق على بُعد بين ١٢ سم ، ٢٨ سم من $أ$ أو عندهما.

ملاحظة



إذا ارتكز قضيب $\overline{أب}$ مقدار وزنه و على حاملين عند نقطتين حـ ، ء منه وعلق ثقل مقداره $و_١$ من أحد طرفيه وليكن $أ$

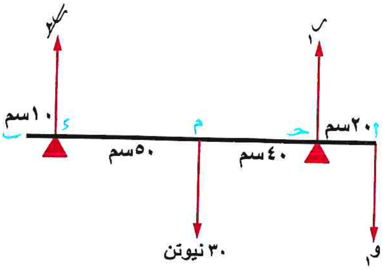
وذكر أن : الثقل المعلق من $أ$ أكبر ثقل يجعل القضيب متزنًا أو يجعل القضيب على وشك الدوران أو الانقلاب حول حـ أو يجعل القضيب على وشك الانفصال عن الحامل ء فهذا يعنى أن : مقدار رد فعل القضيب عند ء = صفر

أى أن : $ر_٢ =$ صفر

مثال ٧

$\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ١٢٠ سم ومقدار وزنه ٣٠ نيوتن يرتكز فى وضع أفقى على حاملين عند نقطتين حـ ، ء منه بحيث : $أحـ = ٢٠$ سم ، $بء = ١٠$ سم فأوجد أكبر ثقل يمكن تعليقه من $أ$ ، ب كل على حدة دون أن يختل توازن القضيب وأوجد مقدار رد الفعل على القضيب فى كل حالة.

الحــل



- **الحالة الأولى (أكبر ثقل معلق عند $أ$) :**

بفرض أن مقدار أكبر ثقل معلق عند $أ$

ويجعل الجسم متزن $= و_١$

$\therefore$ مقدار رد الفعل عند ء = صفر أى أن : $ر_٢ = ٠$

∴ القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى مقاديرها $و_1$ ، $ر_1$ ، ٣٠ نيوتن

∴ $ر_1 = و_1 + ٣٠$ (١)

، $و_1 \times$ أحـ $= ٣٠ \times$ م حـ

∴ $و_1 \times ٢٠ = ٣٠ \times ٤٠$

∴ $و_1 = \frac{٣٠ \times ٤٠}{٢٠} = ٦٠$ نيوتن

لاحظ أن

$\frac{و_1}{٤٠} = \frac{٣٠}{٢٠} = \frac{ر_1}{٦٠}$

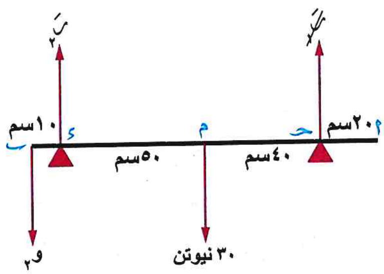
∴ $و_1 = ٦٠$ نيوتن ، $ر_1 = ٩٠$ نيوتن.

وبالتعويض فى (١) : ∴ $ر_1 = ٦٠ + ٣٠ = ٩٠$ نيوتن

∴ مقدار أكبر ثقل يمكن تعليقه عند أ دون أن يختل توازن القضيب = ٦٠ نيوتن

، رد فعل الحامل عند حـ على القضيب = ٩٠ نيوتن.

- **الحالة الثانية (أكبر ثقل معلق عند ب) :**



بفرض أن مقدار أكبر ثقل معلق عند ب

ويجعل الجسم متزن = $و_2$

∴ مقدار رد الفعل عند حـ = صفر

أى أن : $ر'_1 = ٠$.

∴ القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى مقاديرها $و_2$ ، $ر'_2$ ، ٣٠ نيوتن

∴ $ر'_2 = ٣٠ + و_2$ (٢)

، $و_2 \times$ ب د $= ٣٠ \times$ م د

∴ $و_2 \times ١٠ = ٣٠ \times ٥٠$

∴ $و_2 = \frac{٣٠ \times ٥٠}{١٠} = ١٥٠$ نيوتن

لاحظ أن

$\frac{٣٠}{١٠} = \frac{و_2}{٥٠} = \frac{ر'_2}{٦٠}$

∴ $و_2 = ١٥٠$ نيوتن ، $ر'_2 = ١٨٠$ نيوتن.

وبالتعويض فى (٢) : ∴ $ر'_2 = ٣٠ + ١٥٠ = ١٨٠$ نيوتن

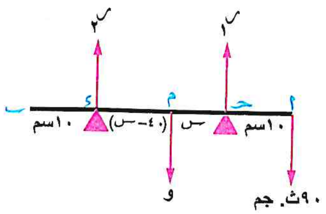
∴ مقدار أكبر ثقل يمكن تعليقه من ب دون أن يختل توازن القضيب = ١٥٠ نيوتن

، رد فعل الحامل عند د على القضيب = ١٨٠ نيوتن.

مثال ٨

$\overline{\text{أب}}$ قضيب غير منتظم طوله ٦٠ سم يرتكز فى وضع أفقى على وتدين حـ ، د حيث :
أحـ = ب د = ١٠ سم فإذا عُلق من أ ثقل قدره ٩٠ ثقل جرام يصبح القضيب على وشك الدوران حول حـ وإذا علق من ب ثقل قدره ١٥٠ ثقل جرام يصبح القضيب على وشك الدوران حول د
أوجد مقدار وزن القضيب وبُعد نقطة تأثيره عن الطرف أ

الحـــل



بفرض أن مقدار وزن القضيب = و ث.جم

ويؤثر فى نقطة م حيث : حـ م = س سم

• عند تعليق الثقل ٩٠ ث.جم من أ :

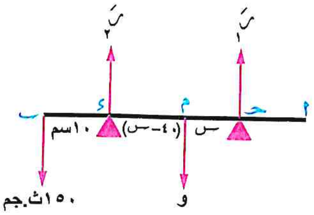
∵ القضيب على وشك الدوران حول حـ

∴ ر٢ = صفر

∴ القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى مقاديرها ر١ ، ٩٠ ، و ث.جم

∴ ٩٠ × أ حـ = و × س　　∴ ٩٠ × ١٠ = و × س

∴ و س = ٩٠٠　　(١)



• عند تعليق الثقل ١٥٠ ث.جم من ب :

∵ القضيب على وشك الدوران حول ء

∴ ر١َ = صفر

∴ القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى مقاديرها

ر٢َ ، و ، ١٥٠ ث.جم

∴ و × ء م = ١٥٠ × ب ء　　∴ و (٤٠ − س) = ١٥٠ × ١٠

∴ ٤٠ و − و س = ١٥٠٠　　(٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) : ∴ ٤٠ و − ٩٠٠ = ١٥٠٠

∴ ٤٠ و = ٢٤٠٠　　∴ و = ٦٠ ث.جم

وبالتعويض فى (١) : ∴ ٦٠ × س = ٩٠٠　　∴ س = ١٥ سم

∴ مقدار وزن القضيب = ٦٠ ث.جم

وبُعد نقطة تأثير وزنه عن أ = ١٥ + ١٠ = ٢٥ سم.

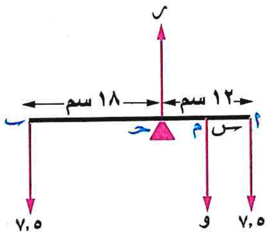
مثال ٩

ساق غير منتظمة $\overline{\text{أب}}$ طولها ٣٠ سم عُلق من طرفيها ثقلان متساويان كل منهما ٧,٥ ثقل كجم فاتزنت الساق فى وضع أفقى عند ارتكازها على محور عند نقطة حـ حيث : أ حـ = ١٢ سم وعندما أُضيف إلى كلٍ من الثقلين المعلقين من الطرفين ثقلُ آخر قدره ١٠,٥ ثقل كجم اتزنت الساق فى وضع أفقى عند تعليقها من نقطة ء حيث : أ ء = ١٣ سم. أوجد وزن الساق وبُعد نقطة تأثير الوزن عن الطرف أ

الحــل

نفرض أن وزن الساق = و ثقل كجم وأنه يؤثر فى نقطة م حيث أ م = س سم

فى الحالة الأولى : الساق متزنة بتأثير أربع قوى هى :



الثقلين ٧,٥ ، ٧,٥ ثقل كجم المعلقين عند الطرفين

ووزن الساق و عند م ، ورد فعل الحامل عند حـ وليكن ر

فحسب شروط التوازن يكون :

(١) مجموع القياسات الجبرية للقوى = صفرًا

∴ ر − و − ٧,٥ − ٧,٥ = ٠   أى : ر − و = ١٥   (١)

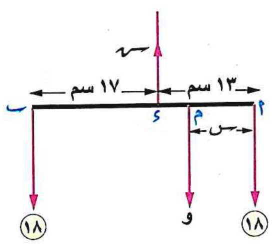
(٢) مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول حـ = صفرًا

∴ −٧,٥ × أ حـ − و × م حـ + ٧,٥ × حـ ب = صفرًا

∴ −٧,٥ × ١٢ − و (١٢ − س) + ٧,٥ × ١٨ = ٠

∴ −٩٠ − و (١٢ − س) + ١٣٥ = ٠   أى : و (١٢ − س) = ٤٥   (٢)

فى الحالة الثانية : الساق متزنة بتأثير أربع قوى هى :



الثقلين ١٨ ، ١٨ ثقل كجم عند الطرفين ، وزن الساق و عند م

، الشد فى خيط التعليق عند ء وليكن ش

فحسب شروط التوازن يكون :

(١) مجموع القياسات الجبرية للقوى = صفرًا

∴ ش − ١٨ − و − ١٨ = ٠   أى : ش − و = ٣٦   (٣)

(٢) مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول ء = صفرًا

∴ −١٨ × أ ء − و × م ء + ١٨ × ب ء = صفرًا

∴ −١٨ × ١٣ − و (١٣ − س) + ١٨ × ١٧ = ٠

∴ −٢٣٤ − و (١٣ − س) + ٣٠٦ = ٠   أى : و (١٣ − س) = ٧٢   (٤)

من (٢) ، (٤) بالقسمة :

∴ $\frac{١٢ - س}{١٣ - س} = \frac{٤٥}{٧٢}$ ∴ $\frac{١٢ - س}{١٣ - س} = \frac{٥}{٨}$

∴ ٦٥ − ٥ س = ٩٦ − ٨ س ∴ ٨ س − ٥ س = ٩٦ − ٦٥

∴ ٣ س = ٣١ ∴ س (بُعد نقطة تأثير وزن الساق عن أ) = $١٠ \frac{١}{٣}$ سم

وبالتعويض فى (٢) :

∴ و $\left(١٢ - ١٠ \frac{١}{٣}\right)$ = ٤٥ ∴ $\frac{٥}{٣}$ و = ٤٥

∴ و (وزن الساق) = ٤٥ × $\frac{٣}{٥}$ = ٢٧ ثقل كجم

وإذا أريد الحصول على رد فعل الحامل عند حـ نعوض فى المعادلة (١)

وإذا أريد إيجاد الشد فى الخيط المعلق عند ء نعوض فى المعادلة (٣)

مثال ١٠

$\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٤٠ سم ووزنه ٤ ثقل كجم يرتكز أفقيًا على حاملين أحدهما عند حـ حيث :

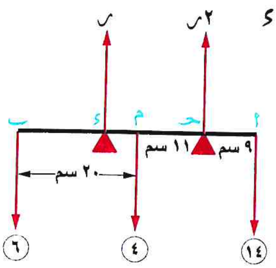
أحـ = ٩ سم والثانى عند ء ، عُلق من طرفيه أ ، ب الثقلان ١٤ ، ٦ ثقل كجم على الترتيب.

أوجد موضع النقطة ء إذا كان الضغط على الحامل عند حـ ضعف الضغط على الحامل عند ء

أوجد أيضًا أكبر ثقل يُضاف إلى الثقل المعلق عند أ دون أن يختل توازن القضيب.

الحـــل

(١) ∵ الضغط على الحامل عند حـ ضعف الضغط على الحامل عند ء



∴ رد فعل الحامل عند حـ ضعف رد فعل الحامل عند ء

وبفرض أن رد فعل الحامل عند ء = ر

يكون رد فعل الحامل عند حـ = ٢ ر

ويكون القضيب متزنًا بتأثير خمس قوى متوازية هى :

الثقلين ١٤ ، ٦ ثقل كجم المعلقين عند الطرفين أ ، ب ، وزن القضيب ٤ ثقل كجم عند م منتصف $\overline{أب}$ ، ردى فعل الحاملين عند حـ ، ء وهما ٢ ر ، ر

∴ حسب شروط الاتزان يكون :

(١) المجموع الجبرى لقياسات القوى = صفر

∴ ٢ ر + ر − ١٤ − ٤ − ٦ = ٠ أى : ٣ ر = ٢٤ ∴ ر = ٨

(٢) المجموع الجبرى لقياسات عزوم القوى حول أ = صفرًا

∴ ٤ × أم + ٦ × أب − ٢ ر × أحـ − ر × أء = صفرًا

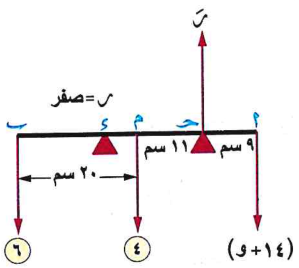
∴ ٤ × ٢٠ + ٦ × ٤٠ − ٢ ر × ٩ − ر × أء = صفرًا

وبالتعويض عن ر = ٨ ∴ ٨٠ + ٢٤٠ − ١٤٤ − ٨ أء = ٠

∴ ٨ أء = ١٧٦ ∴ أء = ٢٢ سم

أى أن : ء تبعد عن الطرف أ مسافة ٢٢ سم.

(٣) نفرض أن أكبر ثقل يضاف إلى الثقل ١٤ ثقل كجم عند أ ويحفظ توازن القضيب هو و ثقل كجم.



فى هذه الحالة ينعدم الضغط على الحامل عند ء ويصبح القضيب متزنًا بتأثير أربع قوى متوازية هى :

الثقل (١٤ + و) ثقل كجم عند أ ، ٦ ثقل كجم عند ب

، وزن القضيب ٤ ثقل كجم عند م منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، رد فعل الحامل عند حـ وليكن رَ

∴ حسب شروط الاتزان يكون :

(١) المجموع الجبرى لقياسات القوى = صفر

∴ رَ − (١٤ + و) − ٤ − ٦ = ٠ ∴ رَ − و = ٢٤ (١)

(٢) المجموع الجبرى لقياسات عزوم القوى حول حـ = صفرًا

∴ − (١٤ + و) × أحـ + ٤ × حـم + ٦ × حـب = ٠

∴ − (١٤ + و) × ٩ + ٤ × ١١ + ٦ × ٣١ = ٠

∴ − ١٢٦ − ٩ و + ٤٤ + ١٨٦ = ٠ ∴ ٩ و = ١٠٤

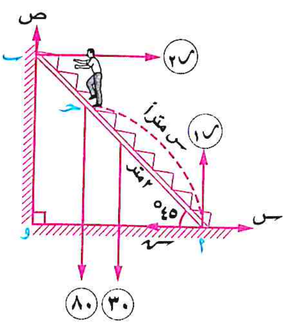
∴ و = ١١ $\frac{٥}{٩}$ ثقل كجم

مثال (١١)

$\overline{\text{أب}}$ سلم منتظم وزنه ٣٠ ثقل كجم وطوله ٤ أمتار يرتكز بطرفه أ على مستوٍ أفقى أملس وبطرفه ب على حائط رأسى أملس. حفظ السلم فى مستوٍ رأسى وفى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° بواسطة حبل أفقى يصل الطرف أ بنقطة من المستوى الأفقى تقع رأسيًا أسفل ب

تمامًا ، فإذا صعد رجل وزنه ٨٠ ثقل كجم على هذا السلم فأثبت أن مقدار الشد فى الحبل يزداد كلما صعد الرجل وإذا كان الحبل لا يتحمل شدًا يزيد مقداره على ٦٧ ثقل كجم فأوجد طول أكبر مسافة يمكن أن يصعدها الرجل دون أن ينقطع الحبل.

الحـــل



السلم متزن تحت تأثير القوى الآتية :

(١) قوة وزن السلم ومقدارها ٣٠ ثقل كجم وتعمل رأسيًا لأسفل عند نقطة منتصفه (لأن السلم منتظم).

(٢) قوة وزن الرجل الصاعد على السلم ومقدارها ٨٠ ثقل كجم وتعمل رأسيًا لأسفل عند نقطة من نقط السلم مثل حـ

(٣) قوة رد فعل المستوى الأفقى (الأرض) عند الطرف ا ومقدارها $ر_١$ واتجاهها لأعلى عمودية على الأرض.

(٤) قوة رد فعل الحائط عند الطرف ب ومقدارها $ر_٢$ واتجاهها أفقيًا وعمودية على الحائط

(٥) قوة الشد فى الحبل (ش) وبأخذ الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{\text{وس}}$ ، $\overleftarrow{\text{وص}}$ حيث و نقطة فى المستوى الأفقى تقع رأسيًا أسفل ب ونفرض أن الرجل صعد مسافة س مترًا على السلم.

وبالتحليل فى الاتجاهين $\overleftarrow{\text{وس}}$ ، $\overleftarrow{\text{وص}}$ مع كتابة الشروط الكافية لاتزان السلم نجد أن :

$ر_٢$ − ش = ٠ ∴ $ر_٢$ = ش (١)

، $ر_١$ − ٣٠ − ٨٠ = ٠ ∴ $ر_١$ = ١١٠ (٢)

، ∵ مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة للنقطة ا = صفر

∴ ٣٠ × ٢ جتا ٤٥° + ٨٠ × س جتا ٤٥° − $ر_٢$ × ٤ جا ٤٥° = صفر

∴ ٦٠ + ٨٠ س − ٤ $ر_٢$ = صفر ولكن $ر_٢$ = ش

∴ ٦٠ + ٨٠ س − ٤ ش = صفر

∴ ٤ ش = ٦٠ + ٨٠ س ∴ ش = ١٥ + ٢٠ س

ومن هذه العلاقة نلاحظ أن مقدار الشد $\sim$ يزداد كلما ازدادت قيمة $س$ أى كلما صعد الرجل لمسافة أكبر على السلم ويكون مقدار $س$ أكبر ما يمكن عندما يكون مقدار $\sim$ أكبر ما يمكن وهو ٦٧ ثقل كجم.

∴ ٦٧ = ١٥ + ٢٠ س ∴ ٢٠ س = ٥٢ ∴ س = ٢,٦ مترًا

∴ أطول مسافة يمكن أن يصعدها الرجل دون أن ينقطع الحبل تساوى ٢,٦ مترًا.

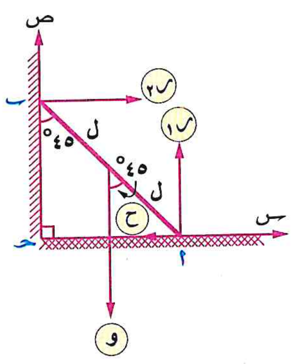
مثال ١٢

$\overline{أب}$ سلم منتظم وزنه (و) يستند بطرفه أ على أرض أفقية خشنة وبطرفه ب على حائط رأسى أملس بحيث يقع السلم فى مستوٍ رأسى ويميل على الحائط بزاوية قياسها ٤٥° فإذا كان السلم متزنًا

فأثبت أن : ① معامل الاحتكاك السكونى بين السلم والأرض لا يمكن أن يكون أقل من $\frac{1}{2}$

② إذا كان معامل الاحتكاك السكونى يساوى $\frac{2}{3}$ فإن مقدار القوة الأفقية التى تؤثر عند أ وتجعله على وشك الحركة نحو الحائط تعادل $\frac{7}{6}$ و

الحل



① ليكن السلم هو $\overline{أب}$ وطوله ٢ ل ، $ر_1$ قوة رد الفعل العمودى عند الطرف أ المستند على الأرض الخشنة ، $ر_2$ قوة رد الفعل عند الطرف ب المستند على الحائط الأملس ، ح قوة الاحتكاك عند أ ، نعتبر المستوى الرأسى الذى يتزن فيه السلم ونأخذ فيه اتجاهين متعامدين.

$\overleftarrow{حـ س}$ ، $\overleftarrow{حـ ص}$ (كما بالشكل) حيث حـ نقطة على الأرض الأفقية تقع رأسيًا أسفل ب نلاحظ أن الاتجاه المحتمل لحركة الطرف أ يكون بعيدًا عن الحائط ولذلك يجب أن تكون قوة الاحتكاك ح موجهة نحو الحائط.

بتحليل القوى فى اتجاه $\overleftarrow{حـ س}$: ∴ $ر_2$ − ح = ٠ ∴ $ر_2$ = ح (١)

بتحليل القوى فى اتجاه $\overleftarrow{حص}$: ∴ $ر_{١} - و = ٠$ ∴ $ر_{١} = و$ (٢)

، ∵ مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة للنقطة أ = صفر

∴ $و \times ل$ حا $٤٥^\circ - ر_{٢} \times ٢$ ل حتا ٤٥° = صفر (وبقسمة الطرفين على ل حا ٤٥°)

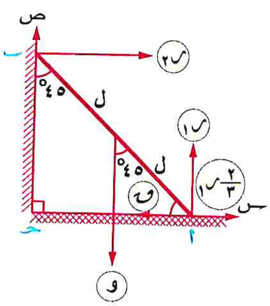
∴ $و - ٢ ر_{٢} = ٠$ ∴ $ر_{٢} = \frac{و}{٢}$ (٣)

من (١) ، (٣) : ∴ $ح = \frac{و}{٢}$ ولكن $ح \leq م_{س} ر_{١}$

وبالتعويض فى هذه المتباينة عن كلٍ من $ر_{١}$ ، ح :

∴ $\frac{و}{٢} \leq م_{س} و$ ∴ $م_{س} \geq \frac{١}{٢}$

∴ معامل الاحتكاك السكونى بين السلم والأرض لا يمكن أن يكون أقل من $\frac{١}{٢}$ (المطلوب أولًا)



٢ السلم على وشك الحركة نحو الحائط :

نفرض أن ق مقدار القوة المطلوبة وتكون هذه القوة موجهة نحو الحائط أما قوة الاحتكاك النهائية فتكون موجهة بعيدًا عن الحائط ومقدارها يساوى $\frac{٢}{٣} ر_{١}$

بتحليل القوى فى اتجاه $\overleftarrow{حس}$:

$\frac{٢}{٣} ر_{١} + ر_{٢} - ق = ٠$ ∴ $ق = ر_{٢} + \frac{٢}{٣} ر_{١}$ (١)

بتحليل القوى فى اتجاه $\overleftarrow{حص}$:

∴ $ر_{١} - و = ٠$ ∴ $ر_{١} = و$ (٢)

، ∵ مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة إلى أ = صفر

∴ $و \times ل$ حا $٤٥^\circ - ر_{٢} \times ٢$ ل حتا $٤٥^\circ = ٠$ (وبقسمة الطرفين على $\frac{ل}{\sqrt{٢}}$)

∴ $و - ٢ ر_{٢} = ٠$ ∴ $ر_{٢} = \frac{١}{٢} و$ (٣)

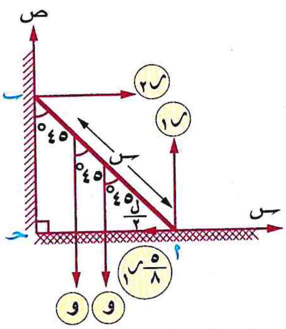
وبالتعويض من (٢) ، (٣) فى (١) ينتج أن :

$ق = \frac{١}{٢} و + \frac{٢}{٣} و$ ∴ $ق = \frac{٧}{٦} و$ (المطلوب ثانيًا)

مثال ١٣

يستند سلم منتظم وزنه (و) بطرفه السفلى أ على أرض أفقية خشنة وبطرفه ب على حائط رأسى أملس بحيث يقع السلم فى مستوٍ رأسى ويميل على الحائط بزاوية قياسها ٤٥° فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين السلم والأرض $\frac{5}{8}$ فأوجد طول المسافة التى يمكن أن يصعدها رجل وزنه يساوى وزن السلم قبل أن ينزلق ثم أوجد بدلالة وزن السلم مقدار أقل قوة أفقية تؤثر عند منتصف السلم لكى يتمكن الرجل من الصعود حتى نهاية السلم.

الحل



(١) نفرض أن طول السلم يساوى ل وأن الرجل صعد على السلم مسافة طولها س قبل أن ينزلق السلم أى السلم على وشك الانزلاق وبذلك تكون قوة الاحتكاك النهائية عند الطرف أ = $\frac{5}{8}$ ر$_1$ موجهة نحو الحائط.

بتحليل القوى فى اتجاه $\overleftarrow{\text{حـ س}}$:

∴ ر$_2$ − $\frac{5}{8}$ ر$_1$ = ٠ ∴ ر$_2$ = $\frac{5}{8}$ ر$_1$ (١)

بتحليل القوى فى اتجاه $\overleftarrow{\text{حـ ص}}$:

∴ ر$_1$ − و − و = ٠ ∴ ر$_1$ = ٢ و (٢)

، ∵ ج$_{\text{أ}}$ = صفر :

∴ و × $\frac{\text{ل}}{2}$ جا ٤٥° + و × س جا ٤٥° − ر$_2$ × ل جتا ٤٥° = ٠

(وبقسمة الطرفين على جا ٤٥°)

∴ $\frac{\text{و ل}}{2}$ + و س − ر$_2$ ل = صفر ∴ و س = ر$_2$ ل − $\frac{\text{و ل}}{2}$ (٣)

، بالتعويض من (٢) فى (١) :

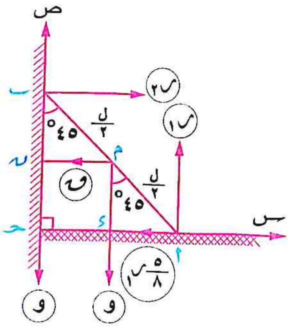
∴ ر$_2$ = $\frac{5}{8}$ × ٢ و ∴ ر$_2$ = $\frac{5}{4}$ و

وبالتعويض فى (٣) :

∴ و س = $\frac{5}{4}$ و ل − $\frac{\text{و ل}}{2}$ ∴ س = $\frac{5}{4}$ ل − $\frac{1}{2}$ ل

$\therefore$ س = $\frac{٣}{٤}$ ل

$\therefore$ الرجل يمكنه أن يصعد $\frac{٣}{٤}$ طول السلم قبل أن ينزلق السلم. (المطلوب أولاً)



(٢) بفرض أن مقدار أقل قوة أفقية تؤثر عند منتصف السلم = ق

بتحليل القوى فى اتجاه $\overleftarrow{\text{حـ س}}$:

$\therefore$ ر٢ − ق − $\frac{٥}{٨}$ ر١ = ٠

$\therefore$ ق = ر٢ − $\frac{٥}{٨}$ ر١ (١)

بتحليل القوى فى اتجاه $\overleftarrow{\text{حـ ص}}$:

$\therefore$ ر١ − و − و = ٠ $\therefore$ ر١ = ٢ و (٢)

، $\because$ مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة للنقطة ب = صفرًا

$\therefore$ ر١ × ل جا ٤٥° − و × $\frac{ل}{٢}$ جا ٤٥° − ق × $\frac{ل}{٢}$ × جتا ٤٥° − $\frac{٥}{٨}$ ر١ × ل جتا ٤٥° = ٠

(وبقسمة الطرفين على $\frac{ل}{\sqrt{٢}}$)

$\therefore$ ر١ − $\frac{و}{٢}$ − $\frac{ق}{٢}$ − $\frac{٥}{٨}$ ر١ = ٠ $\therefore$ ٢ ر١ − و − ق − $\frac{٥}{٤}$ ر١ = ٠ (٣)

وبالتعويض عن قيمة ر١ = ٢ و من (٢) فى (٣) :

$\therefore$ ٤ و − و − ق − $\frac{٥}{٤}$ × ٢ و = ٠ $\therefore$ ق = $\frac{١}{٢}$ و

$\therefore$ أقل قوة أفقية تؤثر عند منتصف السلم لكى يتمكن الرجل من الصعود إلى نهاية السلم مقدارها يساوى $\frac{١}{٢}$ و (المطلوب ثانيًا)

مثال ١٤

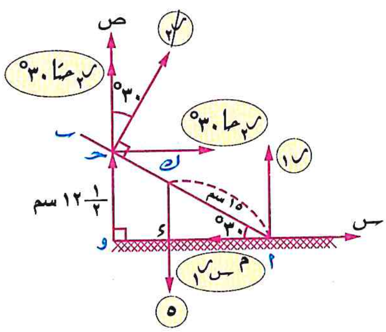
$\overline{\text{أب}}$ ساق منتظمة وزنها ٥ ثقل كجم وطولها ٣٠ سم ترتكز بطرفها أ على أرض أفقية خشنة وترتكز عند إحدى نقطها حـ على وتد أملس يعلو عن سطح الأرض بمقدار $١٢\frac{١}{٢}$ سم فإذا كانت الساق على وشك الانزلاق عندما كانت تميل على الأرض الأفقية بزاوية قياسها ٣٠°

فأوجد : (١) مقدار قوة رد فعل الوتد.

(٢) معامل الاحتكاك السكونى بين طرف الساق أ والأرض.

الحـــل

الساق متزنة تحت تأثير القوى الآتية :



① قوة وزن الساق ومقدارها ٥ ثقل كجم وتؤثر رأسيًا لأسفل عند نقطة ى منتصف الساق (لأن الساق منتظمة).

② قوة رد الفعل العمودى عند الطرف أ الملامس للأرض ومقدارها $ر_{١}$ رأسية لأعلى وعمودية على الأرض.

③ قوة رد الفعل عند النقطة حـ من الساق ومقدارها $ر_{٢}$ وهى عمودية على الساق.

④ قوة الاحتكاك عند أ ومقدارها $م_{س}$ $ر_{١}$ وهى موجهة نحو و

• نعتبر المستوى الرأسى الذى يتزن فيه الساق ونأخذ فيه $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ص}}$ اتجاهان متعامدان لتحليل القوى حيث (و) نقطة فى المستوى الأفقى تقع رأسيًا أسفل (حـ)

• نحلل القوة $ر_{٢}$ إلى مركبتين متعامدتين فى الاتجاهين $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ص}}$ فنجدهما $ر_{٢}$ جا ٣٠° ، $ر_{٢}$ جتا ٣٠°

بتحليل القوى فى الاتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$:

∴ $ر_{٢}$ جا ٣٠° − $م_{س}$ $ر_{١}$ = صفر

∴ $\frac{١}{٢}$ $ر_{٢}$ = $م_{س}$ $ر_{١}$ ∴ $ر_{٢}$ = ٢ $م_{س}$ $ر_{١}$ (١)

بتحليل القوى فى الاتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$:

∴ $ر_{١}$ + $ر_{٢}$ جتا ٣٠° − ٥ = صفر ∴ $ر_{١}$ = ٥ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $ر_{٢}$ (٢)

، ∵ مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة للنقطة أ = صفر

∴ ٥ × أء − $ر_{٢}$ × أحـ = صفر حيث أء = ١٥ جتا ٣٠° = $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$ سم

، أحـ = ٢ حـ و = ٢ × ١٢,٥ = ٢٥ سم (لأن Δ أ و حـ ثلاثينى ستينى)

∴ ٥ × $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$ − $ر_{٢}$ × ٢٥ = صفر ∴ $ر_{٢}$ = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$

∴ مقدار قوة رد فعل الوتد عند النقطة حـ = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ ثقل كجم **(المطلوب أولاً)**

وبالتعويض عن قيمة $ر_٢$ فى المعادلة (٢) :

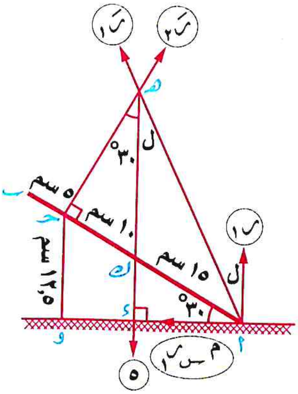
∴ $ر_١ = ٥ - \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ $ر_١ = ٢\frac{٣}{٤}$ ثقل كجم

وبالتعويض فى (١) :

∴ $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢} = ٢$ مـ$_س \times \frac{١١}{٤}$ ∴ مـ$_س = \frac{٣\sqrt{٣}}{١١}$ **(المطلوب ثانيًا)**

حل آخر :

من هندسة الشكل :

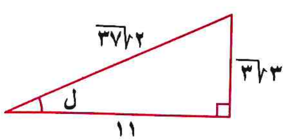


من Δ أ ء ك : أ ء = $٧,٥\sqrt{٣}$ سم ، ك ء = ٧,٥ سم

، من Δ أ و حـ : أ حـ = ٢ حـ و = ٢٥ سم

من Δ ك حـ هـ : ك هـ = ٢٠ سم

، من Δ أ ء هـ : طا ل = $\frac{٧,٥\sqrt{٣}}{٢٧,٥} = \frac{٣\sqrt{٣}}{١١}$



∴ معامل الاحتكاك السكونى مـ$_س$ = طا ل = $\frac{٣\sqrt{٣}}{١١}$

وباستخدام قاعدة لامى : $\frac{٥}{حا (ل + ٣٠°)} = \frac{ر_٢}{حا (١٨٠° - ل)}$

∴ $ر_٢ = \frac{٥ \text{ حا } (١٨٠° - ل)}{حا (ل + ٣٠°)} = \frac{٥ \text{ حا ل}}{\text{حا ل حتا } ٣٠° + \text{ حتا ل حا } ٣٠°} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$

تمارين 3 على اتزان مجموعة من القوى المتوازية المستوية

من أسئلة الكتاب المدرسى | ● تذكر ● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الشرط اللازم والكافى لاتزان مجموعة من القوى هو ....

(أ) انعدام متجه مجموع القوى.

(ب) أن تكون متلاقية فى نقطة.

(جـ) أن تكون متوازية.

(د) انعدام متجه مجموع القوى وانعدام متجه مجموع عزوم القوى حول أى نقطة.

(٢) إذا كان متجه محصلة القوى لمجموعة من القوى المستوية هو $\overrightarrow{ح}$ ، مجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة هو $\overrightarrow{جـ}$ فإن شرط اتزان مجموعة القوى المستوية هو ....

(أ) $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{0}$ ، $\overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{0}$ (ب) $\overrightarrow{ح} \neq \overrightarrow{0}$ ، $\overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{0}$

(جـ) $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{0}$ ، $\overrightarrow{جـ} \neq \overrightarrow{0}$ (د) $\overrightarrow{ح} \neq \overrightarrow{0}$ ، $\overrightarrow{جـ} \neq \overrightarrow{0}$

(٣) يقع جسم تحت تأثير القوى : $\overrightarrow{ق_1} = ٢\,\overrightarrow{س} - أ\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = ٥\,\overrightarrow{س} + ٢\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_3} = ب\,\overrightarrow{س} - ٥\,\overrightarrow{ص}$ فإذا كان الجسم متزنًا فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (٣ ، ٧) (ب) (−٣ ، ٧) (جـ) (٣ ، −٧) (د) (−٣ ، −٧)

(٤) مجموعة من القوى تقع فى مستوى Δ أ ب جـ ، فإذا كانت القوى متزنة فإن ....

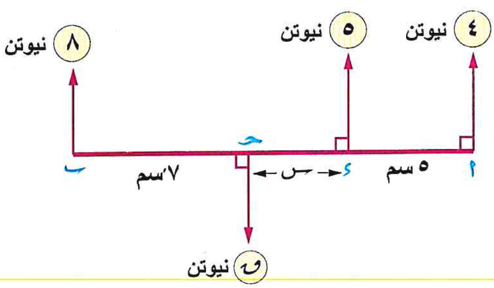
(أ) $ج_{أ} + ج_{ب} + ج_{جـ} =$ صفر (ب) $ج_{أ} + ج_{ب} = ٢\,ج_{جـ}$

(جـ) $ج_{أ} = ج_{ب} = ج_{جـ} =$ صفر (د) كل ما سبق.

(٥) (دور أول ٢٠١٧) فى الشكل المقابل :

أ ب قضيب متزن أفقيًّا فإن

البُعد س = ... سم.



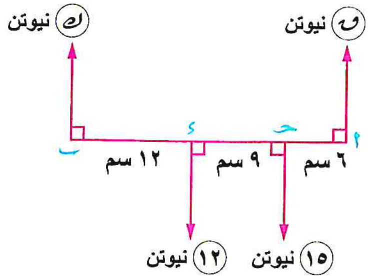
(أ) ٥٦ (ب) ٣٦

(جـ) ٢٧ (د) ٤

⑥ في الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{أب}$ قضيب خفيف متزن أفقيًا

فإن : ....



(أ) ق = ١٥ نيوتن ، ك = ١٢ نيوتن

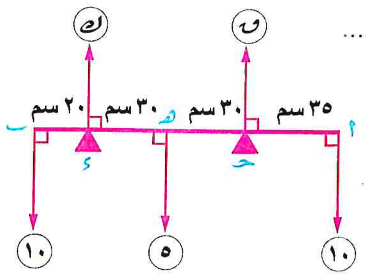
(ب) ق = ١٧ نيوتن ، ك = ١٠ نيوتن

(جـ) ق = ١١ نيوتن ، ك = ١٦ نيوتن

(د) ق = ١٠ نيوتن ، ك = ١٧ نيوتن

⑦ (دور أول ٢٠١٩) في الشكل المقابل :

إذا كان القضيب خفيف ومتزن أفقيًا فإن ....



(أ) ق = ١٥ نيوتن ، ك = ١٠ نيوتن

(ب) ق = ١٠ نيوتن ، ك = ١٥ نيوتن

(جـ) ق = ١٠ نيوتن ، ك = ١٠ نيوتن

(د) ق = ١٢,٥ نيوتن ، ك = ١٢,٥ نيوتن

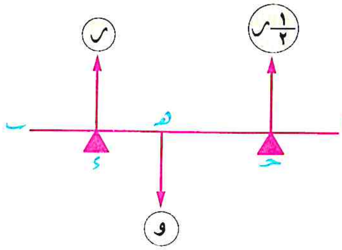
⑧ (دور أول ٢٠٢٣) في الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قضيب غير منتظم وزنه (و) نيوتن

، يرتكز على وتدين عند حـ ، ء .

فإذا كان رد الفعل عند حـ = نصف رد الفعل عند ء

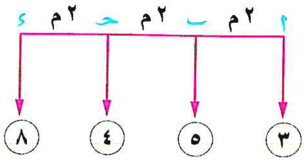
فإن حـ هـ : هـ ء = ...



(أ) ٣ : ٢ (ب) ١ : ١ (جـ) ١ : ٢ (د) ٢ : ١

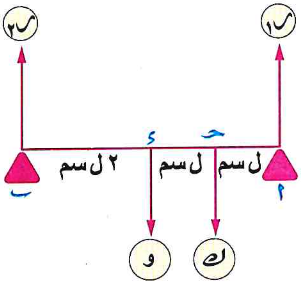
⑨ (دور ثان ٢٠٢٣) في الشكل المقابل :

$\overline{أء}$ قضيب خفيف مهمل الوزن طوله ٦ متر ، والقوى مقاسة بالنيوتن وتؤثر رأسيًا لأسفل كما هو موضح بالشكل ، إذا علق القضيب من نقطة هـ ∈ $\overline{أء}$ فاتزن في وضع أفقي ، فإن طول $\overline{أهـ}$ = ... م.



(أ) ٣,٥ (ب) ٣,٦ (جـ) ٣,٧ (د) ٣,٨

(١٠) **فى الشكل المقابل :**



القضيب متزن بحسب القوى الموضحة (بالنيوتن)

فإن : $ر_1 - ر_2 = ...$ نيوتن.

(أ) $\frac{1}{2}$ و + $\frac{1}{3}$ ك (ب) $\frac{2}{3}$ و − ك

(جـ) $\frac{1}{2}$ ك (د) $\frac{ك + و}{2}$

(١١) إذا اتزنت ٣ قوى مستوية $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ ، $\overleftarrow{ق_3}$ وكانت $\overleftarrow{ق_1}$ // $\overleftarrow{ق_2}$ وفى نفس الاتجاه

فإن : ....

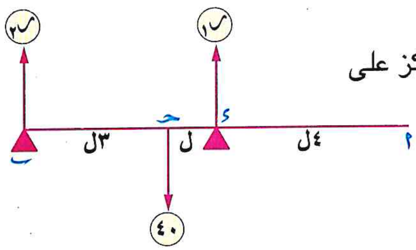
(أ) $\overleftarrow{ق_3}$ تقطع كل من $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ على التعامد.

(ب) $\overleftarrow{ق_3}$ توازى كل من $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ وفى نفس اتجاههما.

(جـ) $\overleftarrow{ق_3}$ توازى كل من $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ وفى عكس اتجاههما.

(د) $\overleftarrow{ق_3} = \overleftarrow{ق_1} + \overleftarrow{ق_2}$

(١٢) **(دور أول ٢٠٢١) فى الشكل المقابل :**



$\overline{أب}$ ساق غير منتظم ، وزنه ٤٠ ث.كجم يرتكز على

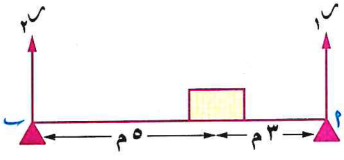
حاملين عند ب ، ء فاتزن أفقيًا

، فإن : $ر_1 - ر_2 = ...$ ث.كجم.

(أ) ٢٠ (ب) ١٠

(جـ) ٢٥ (د) ٣٠

(١٣) **(تجريبى ٢٠٢٣)** الشكل المقابل يوضح لوح خشبى



طوله ٨ أمتار وكتلته ٢٠ كجم لكل متر

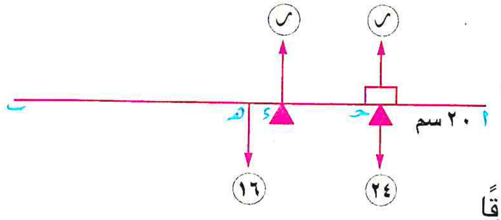
من طوله يرتكز فى وضع أفقى على

حاملين أ ، ب ويحمل صندوق كتلته ٢٠٠ كجم

، فإن : $ر_1 - ر_2 = ...$ ث.كجم.

(أ) ١٥٠ (ب) ٣٦٠ (جـ) ٥٠ (د) ٢٠٥

(١٤) (دور ثان ٢٠٢٤) في الشكل المقابل :

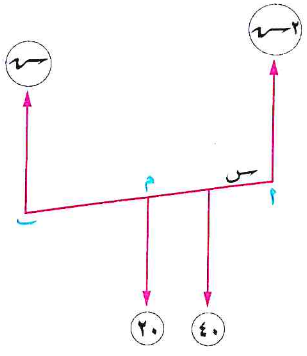


$\overline{أب}$ لوح خشبي منتظم وزنه ١٦ ث.كجم ، وطوله ٢ متر يرتكز في وضع أفقي على حاملين عند حـ ، ء ويحمل صندوقًا وزنه ٢٤ ث.كجم عند حـ ، فإذا كان الضغط على الحاملين متساويًا

فإن : ء حـ = ... سم.

(أ) ٦٠ (ب) ٦٤ (جـ) ٦٨ (د) ٧٤

(١٥) (دور أول ٢٠٢٤) في الشكل المقابل :

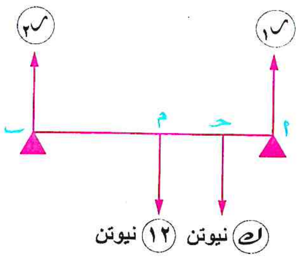


$\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ١ متر ووزنه ٢٠ ث.كجم معلق بحبلين رأسيين عند أ ، ب ، إذا علق ثقل مقداره ٤٠ ث.كجم على بعد (س) سم من أ واتزن القضيب

فإن : س = ... سم.

(أ) ١٥ (ب) ٢٥ (جـ) ٣٥ (د) ٤٠

(١٦) (استرشادي ٢٠٢٥) في الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه ١٢ نيوتن وطوله ١٨ سم ، فإذا أتزن القضيب عندما كان $ر_١ = ٢ ر_٢$ ،

فإن : ل = ... نيوتن حيث أ حـ = ٣ سم.

(أ) ٨ (ب) ١٢ (جـ) ١٤ (د) ١٦

---

٢ ترتكز ساق من الحديد طولها ٣٠ سم ووزنها ٢٠ نيوتن (يؤثر عند منتصف الساق) في وضع أفقي على حاملين، أحدهما عند أحد الطرفين والآخر على بُعد ١٠ سم من الطرف الآخر.

أوجد رد فعل كلٍ من الحاملين على الساق. «٥ ، ١٥ نيوتن»

٣ $\overline{أب}$ قضيب طوله متر ووزنه ١٢ ث.كجم يؤثر عند نقطة على بُعد ٣٠ سم من الطرف أ وضع على حامل أملس عند منتصفه. أوجد مقدار الثقل الذى يجب أن يعلق من الطرف ب ليتزن القضيب فى وضع أفقى وكذلك رد فعل الحامل. «٤,٨ ث.كجم ، ١٦,٨ ث.كجم»

---

٤ قضيب خفيف $\overline{أب}$ مهمل الوزن طوله ٩٠ سم ، علق فى وضع أفقى من طرفيه أ ، ب بواسطة حبلين رأسيين ثم عُلق جسم وزنه ١٥٠ ث.جم من نقطة حـ على القضيب بحيث : أ حـ = ٣٦ سم. احسب مقدار الشد فى كلٍ من الحبلين عندما يكون القضيب متزنًا أفقيًا.

«٩٠ ، ٦٠ ث.جم»

---

٥ يرتكز قضيب منتظم ثقله ٨ وزن كجم فى وضع أفقى على حاملين عند طرفيه البُعد بينهما ٢٠ سم عُلقت كتلة قدرها ١٢ كجم من نقطة تبعد عن أحد طرفيه مسافة $\frac{1}{2}$٧ سم.

أوجد مقدار الضغط الواقع على كل من الحاملين. « $\frac{1}{2}$١١ ، $\frac{1}{2}$٨ ثقل كجم »

---

٦ قضيب منتظم طوله ١ متر ووزنه ٥٠ نيوتن (يؤثر فى منتصفه) معلق أفقيًا عند طرفيه بحبلين رأسيين ويحمل القضيب ثقلين أحدهما ١٥ نيوتن على بُعد ٢٠ سم من أحد الطرفين والآخر ٢٠ نيوتن على بُعد ٣٠ سم من الطرف الآخر.

أوجد مقدار الشد فى كلٍ من الحبلين. «٤٣ ، ٤٢ نيوتن»

---

٧ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٨٠ سم ووزنه = ٢٥ نيوتن يستند على وتد أملس عند منتصفه. عُلق من نقطة حـ على بُعد ٢٠ سم من أ ثقل قدره ١٠ نيوتن وحفظ توازنه أفقيًا بخيط رأسى عند أ

أوجد الشد فى الخيط ورد فعل الوتد. «٥ نيوتن ، ٣٠ نيوتن»

---

٨ (دور أول ٢٠١٧) $\overline{أب}$ لوح خشبى منتظم الكتلة كتلته ١٠ كجم وطوله ٤ متر يرتكز فى وضع أفقى على حاملين أحدهما عند أ والآخر عند نقطة تبعد ١ متر عن ب

بين أين يقف على اللوح طفل وزنه ٥٠ ث.كجم لكى يتساوى ردا الفعل على الحاملين.

«١,٤ م من أ»

---

٩ عُلق قضيب مهمل الوزن طوله ١٢٠ سم فى وضع أفقى بواسطة خيطين رأسيين عند طرفيه ثم عُلق فيه ثقلان مقداراهما ٥ نيوتن ، ٨ نيوتن عند نقطتى تثليثه.

أوجد الشد فى كلٍ من الخيطين. «٦ ، ٧ نيوتن»

١٠ يرتكز قضيب مهمل الوزن طوله ٩٠ سم فى وضع أفقى على حاملين عند نقطتى تثليثه وعُلق من طرفيه ثقلان مقداراهما ٢٠ ، ٣٠ نيوتن. عيِّن الضغط على كل من الحاملين.

«١٠ ، ٤٠ نيوتن»

---

١١ (دور أول ٢٠٠٥) $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ١,٥ مترًا ووزنه ١٤٠ نيوتن يؤثر فى نقطة منتصفه ويرتكز فى وضع أفقى على حاملين أحدهما عند الطرف أ والثانى عند نقطة حـ من القضيب.

فإذا كان مقدار رد فعل الحامل عند أ يساوى ثلثى مقدار رد فعل الحامل عند حـ

أوجد : (١) مقدار رد الفعل عند كلٍ من الحاملين.

(٢) بُعد حـ عن الطرف ب

« ٥٦ ، ٨٤ نيوتن ، ٢٥ سم»

---

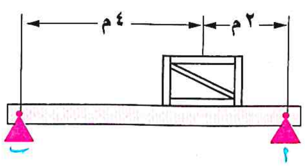
١٢ قضيب منتظم طوله ١ متر ، وزنه ٧٥ نيوتن يرتكز فى وضع أفقى على حاملين البعُد بينهما ٢٤ سم فإذا كان الضغط على أحد الحاملين يساوى ضعف الضغط على الحامل الآخر.

أوجد بُعد كل حامل عن الطرف القريب للقضيب.

«٤٢ سم ، ٣٤ سم»

---

١٣ الشكل المقابل يوضح لوح خشبى منتظم كتلته ٣٠ كجم لكل متر من طوله يرتكز فى وضع أفقى على حاملين أ ، ب ويحمل صندوق كتلته ٢٤٠ كجم.



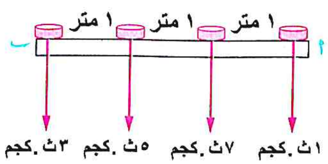
أوجد الضغط الواقع على كل حامل.

« ٢٥٠ ث.كجم ، ١٧٠ ث.كجم»

---

١٤ فى الشكل المقابل :

وضعت أربعة أثقال مقدارها ١ ، ٧ ، ٥ ، ٣ ث.كجم على قضيب خفيف كما بالشكل.



عيِّن نقطة تعليق على القضيب بحيث يظل القضيب أفقيًا.

« $١\frac{٥}{٨}$ م من أ»

---

١٥ قضيب منتظم طوله ١٠٠ سم ، وزنه ٨ ث.كجم عُلق فى وضع أفقى من نقطتين تبعد كل منهما ١٠ سم عن أحد طرفيه بخيطين رأسيين لا يتحمل كل منهما شدًا أكثر من ١٦ ث.كجم. فإذا عُلق ثقل قدره (و) على بُعد ٢٠ سم من منتصف القضيب ، أوجد مقدار (و) التى تجعل أحد الخيطين على وشك أن ينقطع ثم أوجد مقدار الشد فى الخيط الآخر.

«١٦ ، ٨ ث.كجم»

١٦ قضيب منتظم $\overline{أب}$ طوله ٤ متر وكتلته ٦ كجم علق فى طرفيه أ ، ب جسمان كتلتاهما ٦ ، ١٢ كجم على الترتيب فمن أى نقطة يجب تعليق القضيب كى يتزن أفقيًا ؟ « ٢,٥ متر من أ »

---

١٧ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ١٢٠ سم ، وزنه ٤ ثقل كجم علق من طرفه أ ثقل قدره ٥ ثقل كجم ومن طرفه ب ثقل آخر فإذا كان القضيب فى حالة اتزان فى وضع أفقى مرتكزًا على قائم رأسى عند نقطة منه تبعد عن أ بمقدار ٤٠ سم. أوجد مقدار الثقل المُعلق عند ب وكذلك رد الفعل عند نقطة الارتكاز. « $\frac{1}{2}$ ١ ثقل كجم ، $\frac{1}{2}$ ١٠ ثقل كجم »

---

١٨ ساق منتظمة طولها متر ووزنها ٨٠ ثقل جم ترتكز فى وضع أفقى على حاملين عند طرفيها ومُعلق بها الأثقال ٤٠ ، ٣٠ ، ٥٠ ثقل جم على بُعد ٣٠ ، ٦٠ ، ٨٠ سم من أحد طرفيها. أوجد الضغط الواقع على كل من الحاملين. « ٩٠ ، ١١٠ ثقل جم »

---

١٩ ساق مهملة الوزن طولها ١٢٠ سم ترتكز فى وضع أفقى عند طرفيها على حاملين. عند أى موضع من الساق يجب تعليق ثقل قدره ١٢ ث.كجم حتى يصبح مقدار رد الفعل عند أحد الطرفين مساويًا لضعف قيمته عند الطرف الثانى ؟ « ٤٠ سم من أى من الطرفين »

---

٢٠ (دورثان ٢٠١٧) $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٩٠ سم ووزنه ٦٠ نيوتن مُعلق فى وضع أفقى بخيطين رأسيين من طرفيه أ ، ب أين يُعلق ثقل مقداره ١٥٠ نيوتن حتى يكون مقدار الشد عند أ ضعف مقدار الشد عند ب ؟ « ٢٤ سم من أ »

---

٢١ $\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه ٤٠ ث.كجم وطوله ١ متر يتزن عندما يرتكز بطرفه أ على نضد أفقى أملس ويرتفع طرفه الآخر ب بتأثير قوة رأسية تؤثر عند نقطة على بُعد ٢٠ سم من الطرف ب أوجد مقدار هذه القوة ورد فعل النضد. « ٢٥ ، ١٥ ث.كجم »

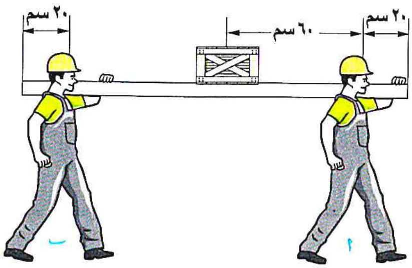
---

٢٢ $\overline{أحـ}$ قضيب غير منتظم طوله ١٢٠ سم ، وزنه ٦٠ نيوتن عُلق فى وضع أفقى بواسطة خيطين رأسيين عند ب ، حـ حيث : أب = ٣٠ سم فكان الشد فى الخيط عند ب ثلاثة أمثال الشد فى الخيط عند حـ عيِّن نقطة تأثير وزن القضيب ومقدار قوة الشد فى كلٍ من الخيطين. « أم = ٥٢,٥ سم ، $ش_{ب}$ = ٤٥ نيوتن ، $ش_{حـ}$ = ١٥ نيوتن »

---

٢٣ $\overline{أب}$ قضيب غير منتظم طوله ٤ متر يرتكز أفقيًا على حاملين أحدهما عند أ والآخر عند ب فإذا كان مقدار ردى الفعل عند كل من أ ، ب هما ٥ نيوتن ، ٣ نيوتن على الترتيب ، إذا اتزن هذا القضيب أفقيًا على حامل واحد. أوجد بُعد هذا الحامل من نقطة أ « ١,٥ م »

٢٤ رجلان أ ، ب يحملان لوحًا من الخشب طوله ٢ متر ووزنه ١٦ ث.كجم يؤثر عند منتصفه يحمل صندوقًا وزنه ٢٤ ث.كجم كما هو موضحًا فى الشكل المقابل أوجد الضغط على كتف كل رجل ثم عيِّن على أى نقطة من اللوح يكون كتف الرجل ب حتى يتساوى الضغطان.



«٢٣ ، ١٧ ث.كجم ، ١٣٦ سم من أ»

---

٢٥ أ ب حـ ء قضيب غير منتظم يرتكز فى وضع أفقى على حاملين أملسين عند ب ، حـ حيث : أ ب = حـ ء = ٣٥ سم ، ب حـ = ٨٠ سم فإذا كان القضيب يصبح على وشك الدوران حول ب إذا عُلق من الطرف أ ثقل قدره ١٢ ثقل كجم ، كما يصبح على وشك الدوران حول حـ إذا عُلق من الطرف ء ثقل قدره ٢٠ ثقل كجم.

فأوجد ثقل القضيب وبُعد مركز ثقله عن الطرف أ «١٤ ثقل كجم ، ٦٥ سم من أ»

---

٢٦ (دور أول ٢٠٠٤) أ ب قضيب غير منتظم طوله ١٠٠ سم ووزنه ٤٠ نيوتن معلق من منتصفه بواسطة خيط خفيف رأسى. إذا اتزن القضيب أفقيًا عندما عُلق ثقل مقداره ١٠ نيوتن عند أ فأوجد بُعد نقطة تأثير الوزن عن أ وإذا رفع الثقل المعلق فأوجد مقدار القوة الرأسية التى تؤثر عند ب بحيث يظل القضيب متزنًا فى وضع أفقى. «٦٢,٥ سم من أ ، ١٠ نيوتن»

---

٢٧ أ ب قضيب غير منتظم وزنه ٥ ثقل كجم وطوله ٢٤ سم يرتكز أفقيًا على حاملين عند حـ ، ء حيث : أ حـ = ب ء = ٥ سم عُلق من أ ثقل قدره ١٠ ثقل كجم فأصبح القضيب على وشك الدوران حول حـ عيِّن مركز ثقل القضيب ثم أوجد أكبر ثقل يعلق من ب دون أن يفقد القضيب توازنه مع بقاء الثقل المعلق من أ «على بُعد ١٥ سم من أ ، ٤٢ ثقل كجم»

---

٢٨ (دور أول ٢٠٢٠) (دور أول ٢٠٠٩) يرتكز قضيب منتظم أ ب (وزنه يؤثر عند نقطة منتصفه) وطوله ٨٠ سم فى وضع أفقى على حاملين عند طرفيه ويحمل القضيب ثقلين مقدار أحدهما ٥ نيوتن عند نقطة تبعد ٦٠ سم عن أ ومقدار الآخر ٢٠ نيوتن عند نقطة تبعد ٥ سم عن ب ، فإذا كانت قيمة رد فعل الحامل عند ب مساوية ضعف قيمتها عند أ

فأوجد مقدار وزن القضيب وأيضًا مقدارى ردى الفعل عند كل من أ ، ب «٣٥ ، ٢٠ ، ٤٠ نيوتن»

٢٩ $\overline{أب}$ قضيب غير منتظم طوله ٩٠ سم وزنه ٣٠ نيوتن يؤثر عند نقطة تبعد ٤٠ سم من أ ويرتكز فى وضع أفقى على حاملين عند حـ ، ب حيث : أ حـ = ١٠ سم عُلق ثقل ١٠ نيوتن عند نقطة على بُعد ٣٠ سم من الطرف ب أوجد أين يُعلق ثقل قدره ٢٠ نيوتن حتى يكون رد فعل الحامل عند حـ ضعف قيمته عند ب «٢٠ سم من أ»

---

٣٠ يرتكز قضيب $\overline{أب}$ طوله ١٠٠ سم ووزنه ١٠ نيوتن ويؤثر عند نقطة منتصفه فى وضع أفقى على حاملين ، أحدهما عند أ والآخر على بُعد ٢٥ سم من ب ما هو مقدار الثقل الذى يجب تعليقه عند الطرف ب للقضيب بحيث تصبح قيمة رد الفعل عند الحامل القريب من هذا الطرف مساويًا ستة أمثال قيمتها عند أ وما قيمتى ردى الفعل عندئذٍ ؟

«٤ ، ٢ ، ١٢ نيوتن»

---

٣١ $\overline{أب}$ قضيب غير منتظم طوله ١٤٠ سم محمول أفقيًا بخيطين رأسيين أحدهما عند ب والآخر يبعد ٤٠ سم من أ ، فإذا كان الشد فى الخيط الأول $\frac{1}{4}$ الشد فى الخيط الثانى ، فعيِّن نقطة تأثير وزن القضيب. وإذا عُلم أن أكبر ثقل يلزم تعليقه من أ دون أن يختل التوازن هو ١٢ نيوتن فأوجد وزن القضيب. «أ م = ٦٠ سم حيث م نقطة تأثير الوزن ، و = ٢٤ نيوتن»

---

٣٢ (دور أول ٢٠١١) قضيب $\overline{أب}$ طوله ١٠٠ سم ووزنه ٢٠ نيوتن يؤثر عند نقطة منتصفه ، يرتكز فى وضع أفقى على حاملين أحدهما يبعد ٣٠ سم عن أ والآخر يبعد ٢٠ سم عن ب أوجد مقدار الضغط الواقع على كلٍ من الحاملين. ما هو مقدار الثقل الذى يجب تعليقه من الطرف ب حتى يكون القضيب على وشك الدوران ؟ وما هى قيمة الضغط على الحامل الأقرب لنقطة ب عندئذ ؟ «١٢ ، ٨ ، ٣٠ ، ٥٠ نيوتن»

---

٣٣ يرتكز قضيب $\overline{أب}$ طوله ٦٠ سم ووزنه ٤٠٠ ث.جم يؤثر عند نقطة منتصفه على وتد يبعد ٢٠ سم من أ حفظ القضيب أفقيًا فى حالة اتزان بواسطة خيط خفيف رأسى يتصل بطرفه ب

أوجد : (١) مقدار كل من الشد فى الخيط ورد فعل الوتد.

(٢) مقدار الثقل الذى يلزم تعليقه من أ ليجعل الشد فى الخيط على وشك أن ينعدم.

«١٠٠ ، ٣٠٠ ث.جم ، ٢٠٠ ث.جم»

---

٣٤ قضيب منتظم طوله ١٤٠ سم ووزنه ١٥٠ ث.جم يرتكز أفقيًا على حاملين يبعدان ٤٠ سم ، ٢٠ سم عن منتصفه على الترتيب. أوجد أكبر ثقل يمكن تعليقه من كل طرف دون أن يختل توازن القضيب ومقدار الضغط على كلٍ من الحاملين فى كل حالة.

«$و_1$ = ٢٠٠ ث.جم ، $ض_1$ = ٣٥٠ ث.جم ، $و_2$ = ٦٠ ث.جم ، $ض_2$ = ٢١٠ ث.جم»

٣٥ أب قضيب غير منتظم طوله ٨٠ سم ووزنه ٢٠ ث.كجم ، يرتكز فى وضع أفقى على حاملين عند حـ ، ء حيث : أحـ = بء = ١٠ سم ، عُلق من أ ثقل قدره ٤٠ ث.كجم فأصبح القضيب على وشك الدوران حول حـ أوجد بعد نقطة تأثير وزن القضيب عن أ ثم أوجد أكبر ثقل يمكن تعليقه من ب دون أن يختل التوازن مع رفع الثقل المُعلق من أ

«٣٠ سم ، ٨٠ ث.كجم»

---

٣٦ (دور أول ٢٠٠٦) أب حـ ء قضيب غير منتظم يرتكز فى وضع الاتزان أفقيًا على حاملين أملسين عند ب ، حـ حيث : أب = ٦ سم ، حـ ء = ٧ سم ونقطة تأثير وزن القضيب تقسمه بنسبة ٢ : ٣ من جهة الطرف أ وجد أنه لو عُلق من الطرف أ ثقل قدره ١٢٠ ثقل جرام أو من الطرف ء ثقل قدره ١٨٠ ثقل جرام كان القضيب على وشك الدوران.

أوجد وزن القضيب والبُعد بين الحاملين. «٩٠ ث.جم ، ٢٢ سم»

---

٣٧ أب قضيب غير منتظم طوله ١ متر يرتكز فى وضع أفقى على حاملين عند حـ ، ء حيث : أحـ = ٢٠ سم ، بء = ١٠ سم. فإذا كان أكبر ثقل يُعلق من الطرف أ لحفظ التوازن ٥ ث. كجم. وأكبر ثقل يُعلق من ب لحفظ التوازن ٤ ث.كجم.

أوجد وزن القضيب ونقطة تأثيره. «٢ ث.كجم ، ٧٠ سم من أ»

---

٣٨ يرتكز قضيب أب طوله ٩٠ سم ووزنه ٥٠ نيوتن ويؤثر فى نقطة منتصفه فى وضع أفقى على حاملين ، أحدهما عند الطرف أ والآخر عند نقطة تبعد ٣٠ سم عن ب ويحمل ثقلاً مقداره ٢٠ نيوتن عند نقطة تبعد ١٥ سم عن ب عيِّن قيمة الضغط على كلٍ من الحاملين ، أوجد أيضًا مقدار الثقل الذى يجب تعليقه من الطرف ب بحيث يصبح القضيب على وشك الدوران وما هى قيمة الضغط على الحامل عندئذ ؟ «$7\frac{1}{2}$ ، $62\frac{1}{2}$ ، ١٥ ، ٨٥ نيوتن»

---

٣٩ أب قضيب منتظم وزنه ٥٠ نيوتن وطوله ١٦٠ سم مُعلق بواسطة خيطين رأسيين عند حـ ، ء حيث : أحـ = بء = ٤٠ سم فإذا عُلق من الطرف ب ثقل قدره ١٠ نيوتن ، أوجد الثقل الذى يجب تعليقه من الطرف أ ليتزن القضيب فى وضع أفقى ويكون الشد فى الخيط عند حـ ضعف الشد فى الخيط عند ء «٢٤ نيوتن»

---

٤٠ (دور أول ٢٠٠٨) أب قضيب غير منتظم طوله ٦٥ سم إذا ثبت عند طرفه ب ثقل قدره ٢ نيوتن وعُلق من أ ثقل قدره ٧ نيوتن فإن القضيب يتزن أفقيًا عند تعليقه من نقطة تبعد ٢٠ سم من أ وإذا انقص الثقل الموجود عند أ وصار ٤,٢ نيوتن فإن القضيب يتزن أفقيًا عند تعليقه من نقطة تبعد ٢٥ سم من أ أوجد وزن القضيب وبُعد نقطة تأثير وزنه عن الطرف أ «٥ نيوتن ، ٣٠ سم»

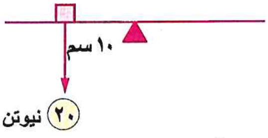
٤١ قضيب منتظم طوله ١٢٠ سم ، وزنه ٣٠ نيوتن معلق من طرفيه فى وضع أفقى بواسطة خيطين رأسيين لا يتحمل أى منهما شدًا يزيد عن ٢٠ نيوتن. أوجد مواضع النقط التى يمكن أن يعلق منها ثقل مقداره ٧,٥ نيوتن دون أن يقطع أى من الخيطين.

«على مسافة لا تقل عن ٤٠ سم من كل طرف»

---

٤٢ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) فى الشكل المقابل :



قضيب منتظم يرتكز على حامل عند منتصفه ، وضع عليه جسم كما بالشكل ، أى من القوى الآتية تحدث توازن للقضيب ؟

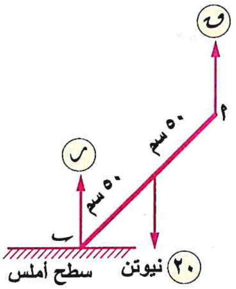
(أ) قوة مقدارها ١٠ نيوتن لأعلى تؤثر على بُعد ٢٠ سم على يمين منتصف القضيب.

(ب) قوة مقدارها ١٠ نيوتن لأسفل تؤثر على بُعد ٢٠ سم على يمين منتصف القضيب.

(جـ) قوة مقدارها ٣٠ نيوتن لأسفل تؤثر على بُعد ٥ سم على يسار منتصف القضيب.

(د) قوة مقدارها ٣٠ نيوتن لأعلى تؤثر على بُعد ٥ سم على يسار منتصف القضيب.

(٢) فى الشكل المقابل :

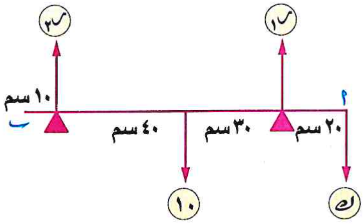


$\overline{أب}$ قضيب منتظم ومتزن تحت تأثير القوى الموضحة بالشكل فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٥ (ب) ١٠

(جـ) ١٥ (د) ٢٠

(٣) فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه ١٠ نيوتن فإذا كان أكبر ثقل يمكن تعليقه من الطرف أ دون أن يختل التوازن هو ك

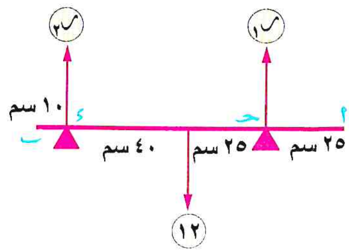
فإن : ك = ... نيوتن.

(أ) ٢٥ (ب) ٢٠ (جـ) ١٥ (د) ٥

(٤) (استرشادى ٢٠٢٥) قضيب $\overline{أب}$ طوله ٦٠ سم ووزنه ٤٠٠ ث.جم يؤثر عند نقطة منتصفه ، إذا علق بخيطين رأسيين من النقطتين ب ، حـ حيث حـ تبعد ٢٠ سم عن أ ، فإن مقدار الثقل الذى يلزم تعليقه من أ ليجعل الشد فى الخيط عند ب على وشك أن ينعدم = ... ث.جم.

(أ) ٢٠٠ (ب) ٤٠٠ (جـ) ٥٠٠ (د) ٦٠٠

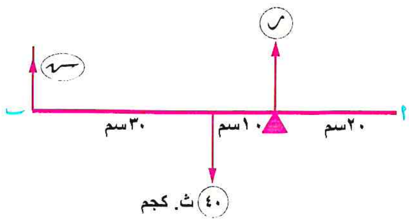
(٥) (دورثان ٢٠٢٣) فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه = ١٢ نيوتن يستند أفقيًا على حاملين عند حـ ، ء فإن أكبر ثقل يعلق من ب دون أن يختل التوازن = ... نيوتن.

(أ) ٤٨ (ب) ٢٤ (جـ) ١٦ (د) ١٢

(٦) فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه ٤٠ ث.كجم وطوله ٦٠ سم فإذا كان القضيب مرتكز فى وضع أفقى على وتد على بُعد ٢٠ سم من أ ، ومُعلق من طرفه ب بخيط خفيف فإن : ر − ش = ... ث.كجم

(أ) ١٠ (ب) ٣٠ (جـ) ٤٠ (د) ٢٠

(٧) ثلاث قوى متوازية $ق_1$ ، $ق_2$ ، $ق_3$ تؤثر على قضيب فى النقط أ ، ب ، حـ والتى تبعد ٢ سم ، ٨ سم ، ٦ سم على الترتيب من أحد الطرفين فإذا كان القضيب متزن فإن : $ق_1$: $ق_2$: $ق_3$ = ...

(أ) ١ : ٢ : ٣ (ب) ٢ : ٣ : ١ (جـ) ٣ : ٢ : ١ (د) ١ : ٣ : ٢

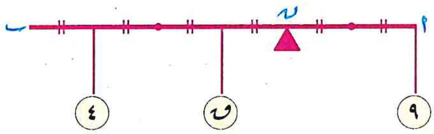
(٨) $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ٤ ث.كجم استند فى وضع أفقى على وتدين عند أ ، حـ حيث : ب حـ = ٢٠ سم. أثرت عليه قوة رأسية ق عند الطرف ب فكان القضيب على وشك الدوران حول حـ فإن مقدار رد فعل الوتد عند حـ = ... ث.كجم

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٩) ساق خفيفة طولها ٣٦ سم معلقة أفقيًا بخيطين رأسيين أحدهما مثبت فى الساق من نقطة على بُعد ٩ سم من أحد الطرفين والآخر من نقطة على بُعد ١٥ سم من الطرف الآخر ومعلق من الطرفين ثقلان متساويان. فإذا كان كل من الخيطين يتحمل شدًا لا يزيد عن ٥٤ ثقل جم فإن أكبر قيمة لكل من الثقلين = ... ثقل.جم

(أ) ١٨ (ب) ٣٦ (جـ) ٤٢ (د) ٥٤

(١٠) فى الشكل المقابل :



إذا كان القضيب $\overline{\text{أب}}$ مهمل الوزن

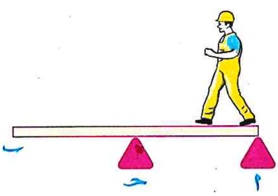
ومقسم بالتساوى كما موضح بالشكل

ومتزن فى وضع أفقى والأوزان مقاسة بوحدة النيوتن

فإن رد فعل الوتد على القضيب = ... نيوتن.

(أ) ٦ (ب) ١٦ (جـ) ١٨ (د) ١٩

(١١) فى الشكل المقابل :



يرتكز قضيب منتظم $\overline{\text{أب}}$ فى وضع أفقى على حاملين أحداهما عند أ والآخر عند حـ منتصف القضيب.

تحرك رجل على القضيب من نقطة أ متجهًا إلى ب

فإن : ....

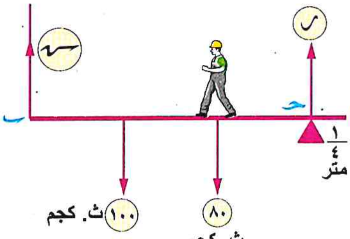
(أ) القضيب يختل توازنه عندما بالكاد يعبر الرجل نقطة أ

(ب) القضيب يختل توازنه عندما بالكاد يعبر الرجل نقطة حـ

(جـ) القضيب يختل توازنه قبل أن يصل الرجل نقطة حـ

(د) القضيب يظل مستقرًا حتى لو وصل الرجل لنقطة ب

(١٢) (دور أول ٢٠٢٣) فى الشكل المقابل :

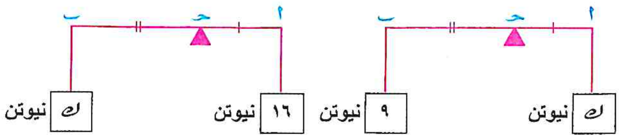


$\overline{\text{أب}}$ لوح خشبى غير منتظم طوله ٢ م ووزنه ١٠٠ ث.كجم يرتكز على حامل رأسى عند نقطة حـ ، حيث أ حـ = $\frac{1}{4}$ متر ، ومثبت بحبل خفيف غير مرن عند ب وقف رجل وزنه ٨٠ ث.كجم فى

منتصف المسافة بين الحامل ونقطة تأثير وزن اللوح الخشبى ، فإذا كان مقدار الشد فى الخيط يساوى نصف مقدار الضغط على الحامل ، وكان اللوح متزنًا فى وضع أفقى. فإن المسافة بين الرجل ونقطة تأثير وزن اللوح الخشبى = ... سم.

(أ) $٣٧\frac{١}{٢}$ (ب) ٥٠ (جـ) ٤٠ (د) $٢٠\frac{١}{٢}$

(١٣) فى الشكل المقابل :

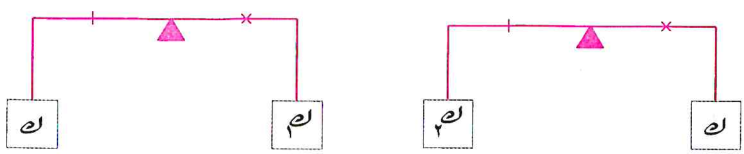


إذا كان كلاهما فى حالة اتزان فإن :

أحـ : حـب = ...

(أ) ٩ : ١٦ (ب) ٣ : ٤ (جـ) ١٦ : ٩ (د) ٤ : ٣

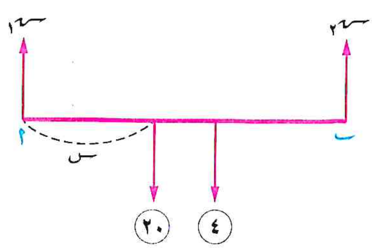
(١٤) قضيب خفيف طوله ل يرتكز فى وضع أفقى على وتد كما بالشكل فإذا كانت الكتلة ك تتزن مع الكتلتين ك$_{١}$ أو ك$_{٢}$ منفردتين كما هو بالشكل فإن قيمة ك بدلالة ك$_{١}$ ، ك$_{٢}$ تساوى ....



(أ) ك$_{١}$ + ك$_{٢}$ (ب) $\frac{١}{٢}$(ك$_{١}$ + ك$_{٢}$)

(جـ) ك$_{١}$ ك$_{٢}$ (د) $\sqrt{ك_{١} ك_{٢}}$

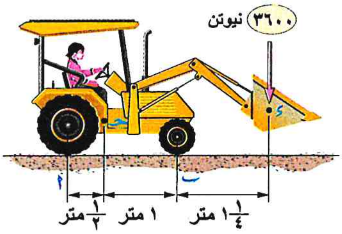
(١٥) (استرشادى ٢٠٢٥) فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٥٠ سم ووزنه ٤ ث.كجم ، القضيب معلق بحبلين رأسيين الشد فى أى منهما لا يتحمل أكثر من ١٦ ث.كجم ، علق جسم وزنه ٢٠ ث.كجم على مسافة "س" من الطرف أ ، فإن : س ∈ ....

(أ) [١٠ ، ٢٠] (ب) [١٥ ، ٣٥] (جـ) [٢٠ ، ٣٠] (د) [١٥ ، ٤٥]

٤٣ **فى الشكل المقابل :**

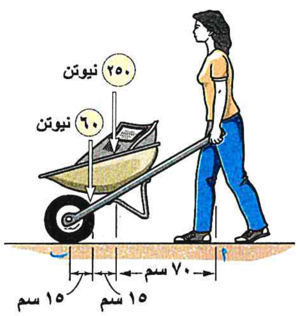


جرار وزنه ٨٤٠٠ نيوتن يؤثر فى الخط الرأسى المار بالنقطة حـ يستخدم فى رفع ٣٦٠٠ نيوتن من المخلفات التى تؤثر فى الخط الرأسى المار بالنقطة ء حدد رد فعل الأرض على كل من العجلتين فى وضع الاتزان.

«٩٤٠٠ ، ٢٦٠٠ نيوتن»

---

٤٤ **فى الشكل المقابل :**



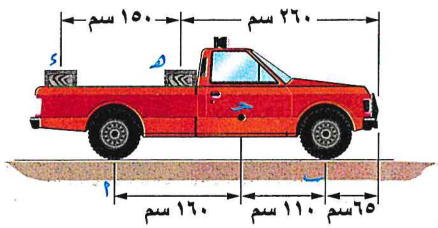
سيدة تستخدم عربة يد صغيرة وزنها ٦٠ نيوتن لنقل جوال من السماد وزنه ٢٥٠ نيوتن.

ما هى القوة التى تؤثر على يدها فى وضع الاتزان ؟

« ٨٤ نيوتن»

---

٤٥ **فى الشكل المقابل :**



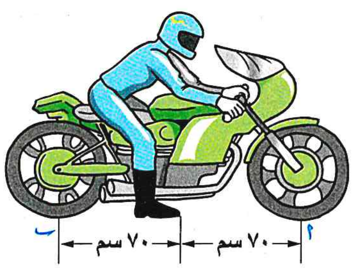
عربة نصف نقل كتلتها ١٦٠٠ كجم ووزنها يوثر فى الخط الرأسى المار بالنقطة حـ ووضع بصندوق العربة صندوقان ء ، هـ كتلة الأول ٥٠٠ كجم وكتلة الثانى ٤٠٠ كجم فى الوضع المبين بالشكل.

أوجد رد فعل الأرض على كل من العجلتين.

«٩٢٠,٤ ، ١٥٧٩,٦ نيوتن»

---

٤٦ **فى الشكل المقابل :**



دراجة نارية كتلتها ٢٠٠ كجم ووزنها يؤثر فى الخط الرأسى المار بمنتصف المسافة بين مركزى العجلتين فإذا كانت كتلة راكب الدراجة ٨٤ كجم ووزنه يؤثر فى الخط الرأسى الذى يبعد ١ متر خلف مركز العجلة الأمامية.

أوجد رد فعل الأرض على كل من العجلتين فى كل من الحالتين الآتيتين :

(١) الدراجة بدون الراكب.

(٢) الدراجة مع وجود الراكب.

«١٠٠ ، ١٠٠ ث.كجم ، ١٢٤ ، ١٦٠ ث.كجم»

٤٧ $\overline{أب}$ لوح من الخشب طوله ٢٠ متر ووزنه ٦٠ ثقل كجم يؤثر عند منتصفه موضوع أفقيًا بحيث يرتكز على حاملين عند حـ ، ء حيث : أحـ = ٣ متر ، ب ء = ٥ متر فإذا سار رجل وزنه ١٠٠ ثقل كجم على اللوح مبتدئًا من الطرف أ نحو ب فأوجد أكبر مسافة يمكن أن يسيرها دون أن ينقلب اللوح. «١٨ مترًا»

---

٤٨ $\overline{أب}$ قضيب غير منتظم طوله ١٠٠ سم وزنه ٦٠ ث.كجم معلق فى منتصفه بخيط خفيف رأسى وعندما عُلق ثقل ٣٠ ث.كجم من أحد طرفيه اتزن فى وضع أفقى. أوجد القوة الرأسية التى يجب أن تؤثر فى الطرف الآخر للقضيب (بعد رفع الثقل المُعلق) ليظل متزن فى وضع أفقى. «الوزن على بعد ٧٥ سم من أ ، ٣٠ ث.كجم»

---

٤٩ كوبرى طوله ٦٠ مترًا ووزنه ٧٠ ثقل طن يؤثر عند منتصفه ويرتكز على دعامتين عند طرفيه أ ، ب فإذا سارت سيارة كتلتها ٦ طن على الكوبرى. **فأوجد الضغط على كلٍ من الدعامتين عندما تكون السيارة :**

(١) على بُعد ٢٠ متر من الطرف أ

(٢) فى منتصف الكوبرى.

(٣) على بُعد ٤٥ متر من الطرف أ

«٣٩ ، ٣٧ ثقل طن ، ٣٨ ، ٣٨ ثقل طن ، ٣٦.٥ ، ٣٩.٥ ثقل طن»

---

٥٠ كوبرى طوله ٣٠ مترًا ووزنه ٢٧ ثقل طن يؤثر فى منتصفه ويرتكز على دعامتين عند طرفيه أ ، ب فإذا سارت سيارة محملة كتلتها ١٣ طن على الكوبرى فأوجد موقع السيارة على الكوبرى عندما يكون الضغط على الدعامة أ = $\frac{٣}{٥}$ الضغط على الدعامة ب «٢٦ $\frac{٧}{١٣}$ مترًا من أ»

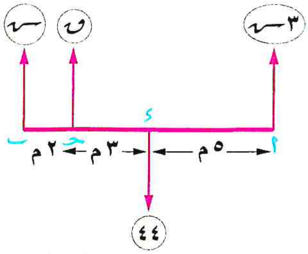
---

٥١ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ١٢٠ سم ووزنه ٣٠٠ ثقل جرام مُعلق فى وضع أفقى من طرفيه بخيطين رأسيين. عُلق فى القضيب الثقلان ٥٠٠ ، ١٠٠ ثقل جرام الأول على بُعد ٤٠ سم من الطرف أ والثانى على بُعد ٢٠ سم من الطرف ب أوجد الشد فى كلٍ من الخيطين ثم أوجد موضع تعليق ثقل قدره ٦٠٠ ثقل جرام حتى يصبح الشدّان فى الخيطين متساويين.

«٥٠٠ ، ٤٠٠ ثقل جم ، ٧٠ سم من أ»

---

٥٢ (دورثان ٢٠٢٣) **فى الشكل المقابل :**



$\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ١٠ أمتار ووزنه ٤٤ ث.كجم ، علق من طرفيه أ ، ب بخيطين رأسيين ، أوجد مقدار القوة $\overline{ق}$ التى تعمل رأسيًا لأعلى عند النقطة حـ وتجعله متزنًا فى وضع أفقى بحيث يكون مقدار الشد عند أ ثلاثة أمثال مقدار الشد عند ب

«٢٠ ث.كجم»

٥٣ مسطرة مدرجة منتظمة طولها متر ووزنها ٥٠ ثقل جم ترتكز فى وضع أفقى على حاملين أحدهما عند التدريج ١٠ والآخر عند التدريج ٩٠ فإذا كان كلٍ من الحاملين يتحمل ضغطاً لا يزيد عن ٤٥ وزن جم فأوجد بين أى تدريجين بين الحاملين يمكن تعليق ثقل قدره ٢٥ ثقل جم دون أن يختل توازن المسطرة. «بين التدريجين ٢٦ ، ٧٤ أو عند أحدهما»

---

٥٤ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ١٢٠ سم ووزنه ٦٠ نيوتن يؤثر عند منتصفه ، يرتكز القضيب فى وضع أفقى على حامل عند طرفه ب ، ويحفظ فى حالة توازن بواسطة خيط رأسى مثبت من نقطة حـ على بُعد ٤٠ سم من أ ويحمل ثقلًا مقداره ٢٠ نيوتن عند نقطة تبعد ٢٠ سم من أ عيِّن قيمة الشد فى الخيط والضغط على الحامل ، وما هو مقدار الثقل الذى يجب تعليقه فى الطرف أ حتى يصبح القضيب على وشك الانفصال عن الحامل ، وما هى قيمة الشد فى الخيط عندئذ ؟ «٧٠ ، ١٠ نيوتن ، ٢٠ ، ١٠٠ نيوتن»

---

٥٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا ارتكز قضيب بطرفه على مستوى خشن كان اتجاه رد الفعل ....

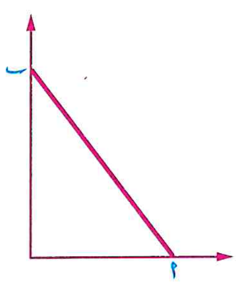
(أ) عموديًا على المستوى.

(ب) موازيًا لذلك المستوى.

(جـ) يتغير اتجاهه حسب معطيات المسألة.

(د) يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع ذلك المستوى.

(٢) فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ قضيب منتظم يرتكز بطرفه العلوى على حائط رأسى وبطرفه السفلى على أرض أفقية فى أى من الحالات الآتية يمكن أن يتزن القضيب ؟

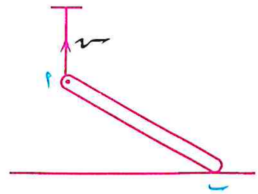
(أ) كل من الحائط والأرض ملساوان.

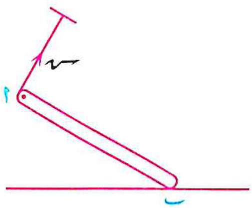
(ب) الأرض ملساء والحائط خشن.

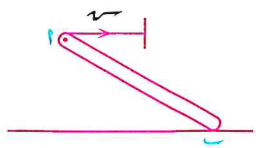
(جـ) الأرض خشنة والحائط أملس.

(د) القضيب يتزن فى كل الحالات السابقة.

③ قضيب معلق من أحد طرفيه بخيط ويستند الطرف الآخر للقضيب على أرض أفقية ملساء. أى من الأشكال الآتية يمثل حالة اتزان للقضيب ؟

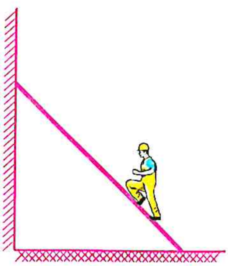
(أ)


(ب)


(جـ)


(د) لا يمكن أن يتزن القضيب.

④ فى الشكل المقابل :



يصعد رجل سلم يستند بطرفه العلوى على حائط رأسى أملس وبطرفه السفلى على أرض أفقية خشنة.

كلما صعد الرجل على السلم ولم ينزلق السلم كلما ....

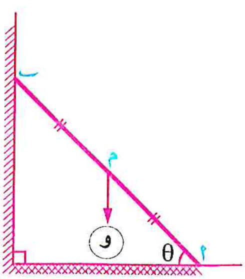
(أ) زاد رد فعل الحائط على السلم.

(ب) زادت قوة الاحتكاك بين السلم والأرض.

(جـ) زاد رد الفعل المحصل للأرض على السلم.

(د) كل ما سبق صحيح.

⑤ (دورثان ٢٠٢٢) فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ سلم منتظم يرتكز بطرفه ب على حائط رأسى أملس وبطرفه أ على أرض أفقية خشنة إذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين السلم والأرض = $\frac{1}{2}$ ، وكان السلم على وشك الانزلاق. فإن قياس زاوية ميل السلم على الأرض يساوى ....

(أ) $\frac{\pi}{٣}$　　(ب) $\frac{\pi}{٦}$　　(جـ) $\frac{\pi}{٥}$　　(د) $\frac{\pi}{٤}$

(٦) سلم منتظم يستند بطرفه السفلى على مستوى أفقى خشن وبطرفه العلوى على حائط رأسى أملس وكانت الزاوية بين السلم والمستوى الرأسى هى (هـ) وكان السلم فى وضع الاتزان النهائى وكان معامل الاحتكاك السكونى ($م_س$)

فإن : طا هـ = ...

(أ) $م_س$ (ب) ٢ $م_س$ (جـ) $\frac{٣ م_س}{٢}$ (د) $م_س$ + ١

(٧) $\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه (و) يستند بطرفه العلوى أ على حائط رأسى أملس وبطرفه السفلى ب على مستوى أفقى خشن وكان على وشك الحركة فإن رد فعل الحائط على الطرف أ يساوى ....

(أ) $م_س$ و (ب) و

(جـ) $\frac{و}{م_س}$ (د) رد الفعل العمودى عند ب

(٨) يمكن لقضيب وزنه «و» أن يستند على أرض أفقية ملساء وحائط رأسى خشن معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين القضيب يساوى $م_س$ ....

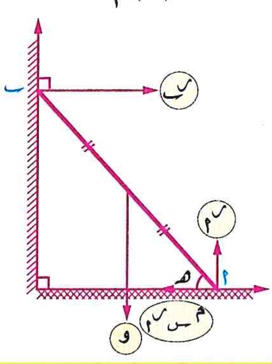
(أ) إذا كان $م_س$ > و (ب) إذا كان $م_س$ > ١

(جـ) إذا كان $م_س$ = ١ (د) لا يمكن للقضيب أن يكون متزنًا.

(٩) (استرشادى ٢٠٢٥) سلم منتظم وزنه ١٥ ث.كجم وطوله (٢ ل) متر يرتكز بأحد طرفيه على أرض خشنة وبالطرف الآخر على حائط رأسى أملس بحيث كان السلم فى مستوى عمودى على الحائط ، فإذا كان السلم على وشك الإنزلاق عندما كان يميل على الأفقى بزاوية ٤٥° ، فإن معامل الاحتكاك السكونى بين السلم والأرض = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(١٠) فى الشكل المقابل :



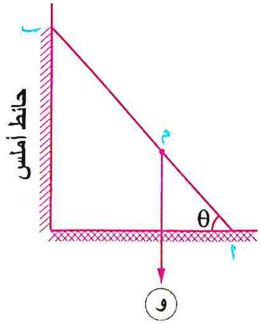
إذا كانت ل هى زاوية الاحتكاك بين الأرض والقضيب

فإن : طا هـ . طا ل = ...

(أ) ٣ (ب) ١

(جـ) ٢ (د) $\frac{١}{٢}$

(١١) (دور أول ٢٠٢٤) فى الشكل المقابل :

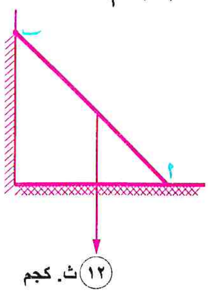


$\overline{أب}$ قضيب غير منتظم وزنه (و) ث.كجم يؤثر فى نقطة م حيث أ م : م ب = ٢ : ٣ ، إذا كان القضيب على وشك الانزلاق وكانت زاوية الاحتكاك بين القضيب والأرض هى (ل)

فإن : طا θ طا ل = ...

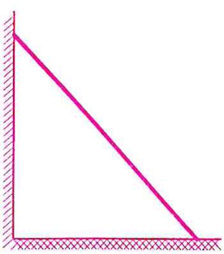
(أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(١٢) $\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه ١٢ ث.كجم يستند بطرفه أ على أرض أفقية خشنة وبطرفه ب على حائط رأسى أملس فإذا كان رد فعل الحائط = ٤ $\sqrt{٣}$ ث.كجم وكان القضيب على وشك الانزلاق فإن قياس زاوية الاحتكاك بين الأرض والقضيب هو ....



(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) طا$^{-1}$ $\frac{٤}{٣}$

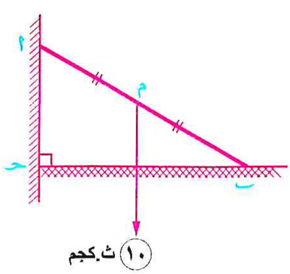
(١٣) (استرشادى ٢٠٢٥) فى الشكل المقابل :



قضيب منتظم طوله ١٠٠ سم ، يستند بطرفه العلوى على حائط رأسى أملس ، وبطرفه السفلى على أرض أفقية خشنة معامل الاحتكاك بينهما م ، إذا كان القضيب على وشك الحركة عندما كان طرفه السفلى يبعد عن الحائط ٨٠ سم ، فإن : م = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٣}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٦}$

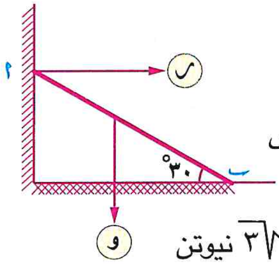
(١٤) (تجريبى ٢٠٢١) فى الشكل المقابل :



قضيب منتظم وزنه ١٠ ث.كجم ، يرتكز بطرفه أ على حائط رأسى أملس ، وبطرفه ب على أرض أفقية خشنة ، معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين الأرض يساوى $\frac{١}{٢}$ ، وكان القضيب على وشك الانزلاق فإن رد فعل الحائط على القضيب = ... ث.كجم.

(أ) ٢,٥ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

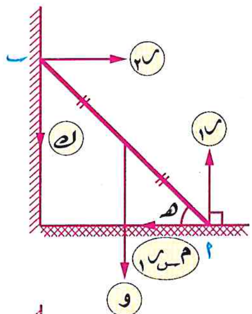
(١٥) في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أب}}$ سلم منتظم وزنه (و) يرتكز بطرفه أ على حائط رأسى أملس وبطرفه ب على أرض أفقية خشنة وكان قياس زاوية ميله على الأرض ٣٠° فإذا كان السلم متزنًا وكان مقدار رد فعل الحائط عند الطرف أ يساوى ٨ $\sqrt{٣}$ نيوتن فإن قوة رد الفعل العمودى عند الطرف ب يساوى .... نيوتن.

(أ) ١٦ $\sqrt{٣}$　　(ب) ٨ $\sqrt{٣}$　　(جـ) ٨　　(د) ١٦

(١٦) في الشكل المقابل :



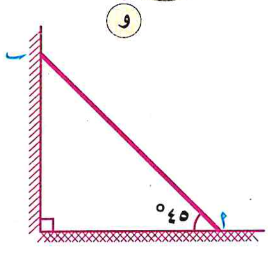
السلم $\overline{\text{أب}}$ على وشك الانزلاق حيث طا هـ طا ل = $\frac{٣}{٤}$

حيث ل هى زاوية الاحتكاك فإن : و .... ر

(أ) $<$　　(ب) $>$

(جـ) $=$　　(د) $\leq$

(١٧) (دور أول ٢٠٢١) في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أب}}$ سلم غير منتظم طوله ٤ م ، ووزنه ٢٠٠ نيوتن.

يستند بطرفه أ على أرض أفقية خشنة

، معامل الاحتكاك السكونى بينهما $\frac{٣}{٥}$

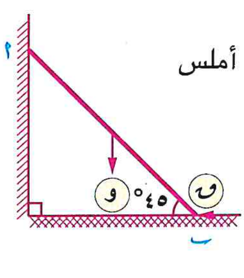
، ويستند بطرفه ب على حائط رأسى أملس.

إذا كان السلم على وشك الانزلاق عندما يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥°

، فإن نقطة تأثير وزنه تبعد عن أ مسافة .... سم

(أ) ١٢٠　　(ب) ٢٠٠　　(جـ) ٢٤٠　　(د) ١٠٠

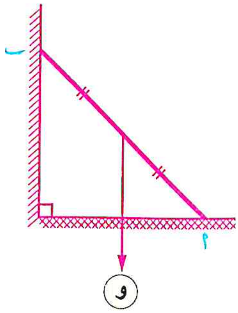
(١٨) (دور ثان ٢٠٢١) في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أب}}$ قضيب منتظم وزنه (و) يستند بطرفه أ على حائط رأسى أملس ، وبطرفه ب على أرض أفقية خشنة ، ومعامل الاحتكاك بينهما $\frac{٣}{٤}$ ، أثرت على الطرف ب قوة أفقية جعلته على وشك الحركة نحو الحائط عندما كان القضيب يميل على الأرض بزاوية قياسها ٤٥° ، فإن مقدار القوة الأفقية = ...

(أ) $\frac{١}{٤}$ و　　(ب) $\frac{٥}{٤}$ و　　(جـ) $\frac{٣}{٤}$ و　　(د) $\frac{٧}{٤}$ و

(١٩) (دورثان ٢٠٢٤) **في الشكل المقابل :**

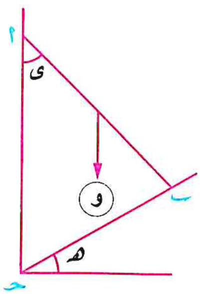


$\overline{أب}$ سلم منتظم وزنه (و) نيوتن يستند بطرفه أ على أرض أفقية خشنة وبطرفه ب على حائط رأسي أملس ، فإذا كان السلم على وشك الانزلاق عندما كان مقدار رد فعل الأرض ٧٥ نيوتن ومقدار رد فعل الحائط ٤٥ نيوتن ،

فإن الوزن (و) = ... نيوتن.

(أ) ٦٠ (ب) ٥٠ (جـ) ٤٠ (د) ٣٠

(٢٠) (استرشادي ٢٠٢٥) **في الشكل المقابل :**

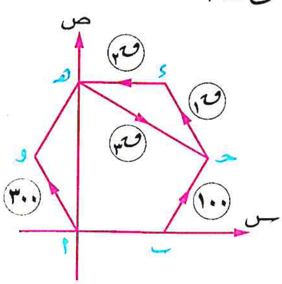


قضيب منتظم يرتكز طرفه أ على حائط رأسي أملس ويعمل معه زاوية قياسها ى وبطرفه ب على حائط أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها هـ ، فإن ....

(أ) طا ى = طا هـ (ب) طا ى = ٢ طا هـ

(جـ) طا هـ = ٢ طا ى (د) طا هـ × طا ى = ١

(٢١) (دور أول ٢٠١٩) **في الشكل المقابل :**

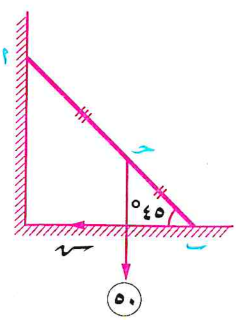


أ ب جـ ء هـ و سداسي منتظم طول ضلعه ٤٠ سم ، إذا كانت القوى المعطاة متزنة

فإن : $ق_٣$ = ... نيوتن.

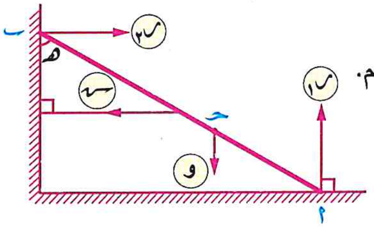
(أ) ٦٠٠ (ب) ٣٠٠ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٠٠ (د) ١٥٠

(٢٢) (استرشادي ٢٠٢٥) سلم وزنه ٥٠ كجم يستند بطرفه العلوي أ على حائط رأسي أملس ، وبطرفه السفلي ب على سطح أفقي أملس ، وزن السلم يقسمه بنسبة ٢ : ٣ من جهة ب ، إذا حفظ السلم متزنًا في مستوى رأسي وفي وضع يميل فيه على الأفقي بزاوية قياسها ٤٥° بواسطة حبل أفقي يصل الطرف ب بنقطة من المستوى الأفقي تقع رأسيًا أسفل أ. فإن الشد في الخيط يساوي .... ث.كجم.



(أ) ٢٠ (ب) ٢٥ (جـ) ٣٠ (د) ٥٠

(٢٣) (دور أول ٢٠٢٢) في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أب}}$ سلم غير منتظم طوله ٢٥ مترًا ، ووزنه (و) ث.كجم.

، يؤثر عند نقطة حـ ، حيث أحـ = ١٠ أمتار

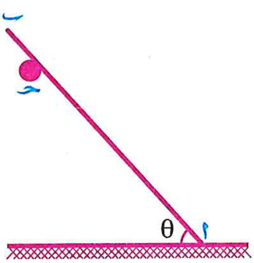
، ارتكز السلم بطرفه أ على أرض أفقية ملساء

، وبطرفه ب على حائط رأسى أملس ، حفظ السلم فى حالة توازن بربطه بحبل خفيف من منتصفه ، وثبت الطرف الآخر للخيط فى نقطة من الحائط ، بحيث كان الحبل أفقيًا فإذا كان قياس زاوية ميل السلم على الرأسى فى وضع الاتزان = هـ

فإن الشد فى الحبل = ... ث.كجم.

(أ) $\frac{٤}{٥}$ و حا هـ　　(ب) $\frac{٤}{٥}$ و حا هـ　　(جـ) $\frac{٤}{٥}$ و طا هـ　　(د) $\frac{٤}{٥}$ و طا هـ

(٢٤) في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أب}}$ قضيب منتظم طوله ٢٤ سم ووزنه ٥٠ ث.جرام

يرتكز بطرفه أ على مستوى أفقى خشن وبإحدى نقطه حـ

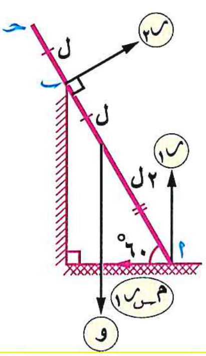
على وتد أملس حيث ب حـ = ٤ سم فإذا كان القضيب

متزنًا يميل على المستوى الأفقى بزاوية قياسها θ

حيث طا θ = $\frac{٣}{٤}$ فإن رد فعل الوتد = ... ث.جرام.

(أ) ٢٤　　(ب) ١٨　　(جـ) ٣٠　　(د) ٢٠

(٢٥) في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أحـ}}$ قضيب منتظم على وشك الانزلاق يستند

من نقطة ب على حائط رأسى أملس وبنقطة أ

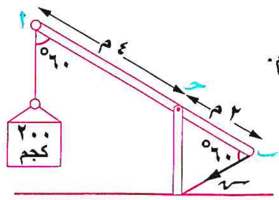
على أرض أفقية خشنة فإن : مس = ...

(أ) $\frac{٥}{\sqrt{٣}}$　　(ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٥}$

(جـ) $\frac{\sqrt{٥}}{٣}$　　(د) $\frac{٣}{\sqrt{٥}}$

(٢٦) الشكل المقابل يبين أحد أوناش التحميل فى وضع اتزان فإن قيمة الشد فى الحبل تساوى .... ث.كجم.

(يمكن إهمال وزن الساق $\overline{\text{أ ب}}$)



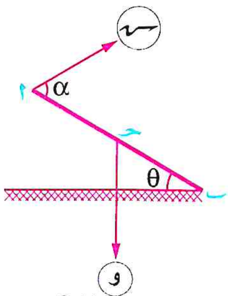
(أ) ١٠٠ (ب) ٢٠٠

(جـ) ٣٠٠ (د) ٤٠٠

(٢٧) **فى الشكل المقابل :**

$\overline{\text{أ ب}}$ قضيب منتظم على وشك الإنزلاق يستند بطرفه ب على أرض أفقية خشنة ومعلق بطرفه أ بخيط خفيف

فإذا كان : $\alpha + \theta = 90^\circ$ فإن : ش = ...



(أ) و (ب) $\frac{1}{2}$ و (جـ) ٢ و (د) و ظا θ

---

٥٦ $\overline{\text{أ ب}}$ سلم منتظم وزنه ٦٠ نيوتن يرتكز بطرفه أ على أرض أفقية ملساء وبطرفه ب على حائط رأسى أملس. حفظ السلم فى مستوٍ رأسى وفى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° بواسطة حبل أفقى يصل الطرف أ بنقطة على الأرض تقع رأسيًا أسفل ب تمامًا. **أوجد :**

(١) مقدار الشد فى الحبل.

(٢) مقدار قوة رد فعل كلٍ من الحائط عند ب ، الأرض عند أ «٣٠ ، ٣٠ ، ٦٠ نيوتن»

---

٥٧ $\overline{\text{أ ب}}$ سلم طوله ٥ أمتار ووزنه ١٧,٥ ثقل كجم يرتكز بطرفه أ على حائط رأسى أملس وبطرفه ب على أرض أفقية ملساء. حفظ السلم فى حالة توازن وذلك بربط طرفه ب بخيط أفقى وواقع فى المستوى الرأسى للسلم. أوجد الشد فى الخيط إذا كان بُعد ب عن الحائط ٣ أمتار وكان وزن السلم يؤثر فى نقطة على بُعد ٢ متر من ب وكذلك أوجد مقدار قوة رد فعل كلٍ من الأرض والحائط. «$\frac{1}{4}$ ٥ ، ١٧.٥ ، $\frac{1}{4}$ ٥ ثقل كجم»

---

٥٨ $\overline{\text{أ ب}}$ سلم منتظم وزنه ١٠ ث.كجم وطوله ٣ متر يرتكز بطرفه أ على أرض أفقية ملساء ويستند بطرفه ب على حائط رأسى أملس حفظ توازنه بربط طرفه أ بحبل مربوط طرفه الآخر بنقطة على خط تقاطع الأرض مع الحائط تقع رأسيًا أسفل ب فإذا كان السلم يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° ، صعد عليه رجل وزنه ٦٠ ث.كجم فأوجد مقدار الشد فى الحبل عندما يصل الرجل إلى نقطة تبعد مترين عن أ «٤٥ ث.كجم»

٥٩ يرتكز سلم منتظم وزنه ١٠ ث.كجم بطرفه أ على مستوى أملس وبطرفه ب على حائط رأسى أملس. حفظ السلم فى مستوى رأسى فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° بواسطة حبل أفقى يصل الطرف أ بنقطة من المستوى الأفقى رأسيًا أسفل ب يصعد رجل وزنه ٨٠ ث.كجم هذ السلم. **أوجد :**

(١) قوة الشد فى الحبل عندما يكون الرجل قد قطع $\frac{٣}{٤}$ طول السلم.

(٢) أقصى قيمة للشد التى يتحملها الحبل علمًا بأنه يكون على وشك الانقطاع عندما يصل الرجل إلى قمة السلم.

«٦٥ ث.كجم ، ٨٥ ث.كجم»

---

٦٠ أب سلم مقدار وزنه ٢٠ ث.كجم يرتكز بطرفه أ على مستوٍ أفقى أملس وبطرفه ب على حائط رأسى أملس. حفظ السلم على مستوٍ رأسى فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° بواسطة حبل أفقى يصل الطرف أ بنقطة من المستوى تقع رأسيًا أسفل ب ولا يتحمل شد مقداره أكبر من ٥٠ ث.كجم. صعد رجل مقدار وزنه ٦٠ ث.كجم على السلم فلما قطع $\frac{٣}{٤}$ طوله وجد أن الحبل على وشك الانقطاع. عيِّن نقطة على السلم التى يؤثر عندها وزنه.

«أ م = $\frac{١}{٤}$ ل حيث م نقطة تأثير الوزن»

---

٦١ أب سلم منتظم وزنه ٤٠ ث.كجم وطوله ١٢ متر يرتكز بطرفه أ على مستوٍ أفقى أملس وبطرفه ب على حائط رأسى أملس. حفظ السلم فى حالة توازن بواسطة حبل مربوط أحد طرفيه فى أ ومربوط طرفه الآخر بنقطة فى المستوى الأفقى رأسيًا أسفل ب فإذا كان السلم يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° وكان الحبل لا يتحمل شدًا مقداره أكثر من ٥٠ ثقل كجم فأثبت أن رجلًا وزنه = وزن السلم لا يستطيع أن يصعد أكثر من ٩ متر دون أن ينقطع الحبل.

---

٦٢ أب سلم طوله ٣ أمتار ومقدار وزنه ٣٥ ث.كجم يرتكز بطرفه أ على حائط رأسى أملس وبطرفه ب على مستوٍ أفقى أملس. حفظ السلم فى حالة توازن فى مستوٍ رأسى بواسطة حبل يصل الطرف ب بنقطة فى المستوى الأفقى تقع رأسيًا أسفل أ أوجد مقدار الشد فى الحبل إذا علم أن بُعد الطرف ب عن الحائط ١,٨ متر وأن قوة وزن السلم تعمل فى نقطة منه تبعد ١,٢ متر عن ب ماذا يكون الشد فى الحبل إذا وقف رجل مقدار وزنه ٨٠ ث.كجم على السلم عند منتصفه.

«$١٠\frac{١}{٢}$ ، $٤٠\frac{١}{٢}$ ث.كجم»

٦٣ سلم منتظم طوله ٥ أمتار ووزنه ٢٠ ثقل كجم يستند بأحد طرفيه على حائط رأسى أملس وبالطرف الآخر على أرض أفقية ملساء ونقطة ارتكاز السلم على الأرض تبعد عن الحائط بمسافة ٣ أمتار والسلم ممنوع من الانزلاق بواسطة حبل مشدود من إحدى نقط السلم إلى نقطة تقابل الحائط مع الأرض واتجاه الحبل عمودى على اتجاه السلم. أوجد مقدار الشد فى الحبل ورد الفعل لكلٍ من الحائط والأرض. « $\frac{١٥٠}{٧}$ ، $\frac{١٢٠}{٧}$ ، $\frac{٢٣٠}{٧}$ ث.كجم»

---

٦٤ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ١٦٠ سم ووزنه ٣٠٠ ثقل جم عُلق فى مسمار ثابت حـ بواسطة خيطين مربوطين فى طرفيه أ ، ب وعُلق فى إحدى نقطه ن ثقل مقداره ٦٠٠ ثقل جم. فإذا كان القضيب يتزن فى وضع أفقى والخيطان $\overline{أحـ}$ ، $\overline{بحـ}$ يميلان على القضيب بزاويتين قياساهما ٦٠° ، ٣٠° على الترتيب فأوجد طول $\overline{أن}$ ومقدار الشد فى الخيطين.

« ٢٠ سم ، ٤٥٠ ، ٤٥٠ $\sqrt{٣}$ ث.جم»

---

٦٥ سلم منتظم وزنه ٦٠ نيوتن يرتكز بطرفه أ على حائط رأسى أملس وبطرفه ب على أرض أفقية خشنة فإذا كان السلم على وشك الحركة عندما كان يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° فأوجد مقدار رد فعل الحائط ومقدار قوة الاحتكاك عند ب «١٠ $\sqrt{٣}$ ، ١٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن»

---

٦٦ (دورثان ٢٠٢٠) سلم منتظم طوله ٦ أمتار ووزنه ١٠ ثقل كجم يستند بأحد طرفيه على حائط رأسى أملس ويرتكز بالطرف الآخر على أرض أفقية خشنة معامل الاحتكاك السكونى بينها وبين السلم يساوى $\frac{١}{٢}$ أثبت أن السلم فى حالة التوازن النهائى يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٤٥°

---

٦٧ قضيب منتظم يرتكز فى مستوٍ رأسى بطرفه العلوى على حائط رأسى أملس وبطرفه السفلى على مستوٍ أفقى خشن معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين القضيب يساوى $\frac{١}{٤}$ أوجد ظل الزاوية التى يصنعها القضيب مع الأفقى عندما يكون على وشك الانزلاق. «٢»

---

٦٨ قضيب منتظم يرتكز فى مستوى رأسى بطرفه العلوى على حائط رأسى أملس ، وبطرفه السفلى على مستوى خشن أفقى ، بحيث يصنع القضيب مع الأفقى زاوية ظلها $\frac{٣}{٢}$ أوجد معامل الاحتكاك السكونى بين القضيب والمستوى الأفقى عندما يكون على وشك الانزلاق. « $\frac{١}{٣}$ »

٦٩ قضيب منتظم مقدار وزنه ١٥ نيوتن يرتكز بطرفه السفلى على أرض أفقية خشنة وبطرفه العلوى على حائط رأسى أملس. اتزن القضيب فى مستوٍ رأسى وكان على وشك الانزلاق عندما كان قياس زاوية ميله على الأفقى ٣٠° أوجد معامل الاحتكاك السكونى بين القضيب والأرض وكذلك مقدار رد فعل الحائط عليه. «$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ نيوتن»

---

٧٠ $\overline{\text{أب}}$ سلم منتظم وزنه ١٠٠ ثقل كجم يرتكز بطرفه ب على حائط رأسى أملس ويرتكز بطرفه أ على أرض أفقية خشنة وكان السلم يميل على الأرض بزاوية قياسها ٦٠° ، فإذا استطاع رجل وزنه ١٥٠ ثقل كجم الصعود حتى قمة السلم وأصبح السلم عند ذلك على وشك الانزلاق فأوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الطرف أ للسلم ومستوٍ الأرض الأفقى. «$\frac{4\sqrt{3}}{15}$»

---

٧١ (دور أول ٢٠١٧) سلم منتظم مقدار وزنه ٢٠ ث.كجم يرتكز بأحد طرفيه على أرض أفقية خشنة وبالطرف الآخر على حائط رأسى أملس. اتزن السلم فى مستوٍ رأسى وكان قياس زاوية ميله على الأفقى ٦٠° إذا علم أن معامل الاحتكاك السكونى بين السلم والأرض يساوى $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ أثبت أن أقصى مسافة تستطيع فتاة وزنها ٦٠ ث.كجم أن تصعدها على السلم تساوى نصف طول السلم.

---

٧٢ (دور ثان ١٩٩٩) سلم منتظم وزنه ٣٠ ثقل كجم يرتكز بطرفه العلوى على حائط رأسى أملس وبطرفه السفلى على أرض أفقية خشنة فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين الأرض والسلم يساوى $\frac{\sqrt{3}}{2}$ فإذا أثرت على الطرف السفلى للسلم قوة مقدارها ١٠ ثقل كجم وتصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الأفقى بحيث تعمل على تحريك هذا الطرف بعيدًا عن الحائط وكان السلم على وشك الانزلاق فأوجد ظل الزاوية التى يصنعها السلم مع الأفقى.

(السلم فى وضع التوازن فى مستوى رأسى عمودى على الحائط). «$\frac{2\sqrt{3}}{3}$»

---

٧٣ $\overline{\text{أب}}$ قضيب منتظم طوله ٢٦٠ سم ومقدار وزنه (و) يستند بطرفه أ على حائط رأسى أملس وبطرفه ب على أرض أفقية معامل الاحتكاك السكونى بينها وبين القضيب يساوى $\frac{1}{2}$ اتزن القضيب فى مستوٍ رأسى بحيث كان الطرف ب على بُعد ١٠٠ سم من الحائط. أوجد مقدار القوة الأفقية التى إذا أثرت عند الطرف ب جعلت القضيب على وشك الحركة نحو الحائط. «$\frac{17}{24}$ و»

٧٤ $\overline{أ ب}$ ساق منتظمة وزنها ٢٠ نيوتن ترتكز بطرفها أ على أرض أفقية خشنة وتستند بطرفها ب على حائط رأسى أملس بحيث تكون الساق فى مستوٍ رأسى عمودى على الحائط وتميل على الأرض الأفقية بزاوية قياسها ٤٥° أوجد مقدار القوة الأفقية التى تؤثر عند الطرف أ للساق لكى تجعلها على وشك الانزلاق بعيدًا عن الحائط علمًا بأن معامل الاحتكاك السكونى بين الساق والأرض $\frac{٣}{٤}$

«٥ نيوتن»

---

٧٥ يستند قضيب منتظم وزنه و بأحد طرفيه على حائط رأسى أملس وبطرفه الثانى على أرض أفقية خشنة بحيث يقع فى مستوٍ رأسى ويميل على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° إذا كان القضيب متزنًا ، أثبت أن معامل الاحتكاك السكونى بين القضيب والأرض لا يمكن أن يكون أقل من $\frac{١}{٢}$ وإذا كان معامل الاحتكاك السكونى يساوى $\frac{٣}{٤}$ فعيِّن القوة الأفقية التى تؤثر عند طرف القضيب الملامس للأرض وتجعله على وشك الحركة :

(١) نحو الحائط. (٢) بعيدًا عن الحائط.

« $\frac{٥}{٤}$ و ، $\frac{١}{٤}$ و »

---

٧٦ $\overline{أ ب}$ سلم منتظم وزنه ١٠٠ ثقل كجم يرتكز بطرفه أ على أرض أفقية خشنة معامل الاحتكاك السكونى بينها وبين السلم يساوى $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$ ، يرتكز بطرفه ب على حائط رأسى أملس فإذا كان السلم يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° فأوجد مقدار أكبر ثقل يمكن تعليقه عند ب دون أن يختل التوازن للسلم ثم أوجد كذلك مقدار رد فعل الحائط عند ب فى هذه الحالة.

«١٠٠ ، ٥٠ $\sqrt{٣}$ ثقل كجم»

---

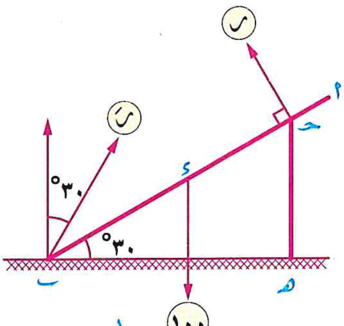
٧٧ (دورثان ١٩٩٨) يرتكز سلم منتظم وزنه ٤٠ ث.كجم بأحد طرفيه على حائط رأسى أملس وبطرفه الآخر على أرض أفقية خشنة بحيث يقع فى مستوٍ رأسى عمودى على الحائط ويميل على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° ، صعد ولد وزنه يساوى وزن السلم فأصبح السلم على وشك الانزلاق عندما يقطع الولد مسافة تساوى $\frac{٣}{٤}$ طول السلم. أوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الأرض والسلم. وإذا أراد الولد أن يتم صعود السلم فأوجد أقل قوة أفقية تؤثر على الطرف السفلى للسلم حتى يتمكن الولد من ذلك.

« $\frac{٥}{٨}$ ، ١٠ ثقل كجم»

٧٨ $\overline{أب}$ سلم منتظم طوله ٥ متر ووزنه ٢٠ ث.كجم استند السلم بطرفه أ على حائط رأسى أملس وبطرفه ب على أرض أفقية خشنة معامل الاحتكاك السكونى بينهما $\frac{١}{٤}$ وكان الطرف ب على بُعد ٣ متر من الحائط. أثبت أن السلم لا يمكن أن يتزن فى هذه الحالة ثم أوجد أصغر وزن لجسم معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين الأرض $\frac{١}{٥}$ بحيث إذا وضع عند الطرف ب للسلم يمنعه من الانزلاق. «$١٢\frac{١}{٢}$ ث.كجم»

---

٧٩ (دورثان ٢٠٢٣) فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه ١٠٠ نيوتن يستند بطرفه ب على أرض أفقية خشنة وبنقطة ح $\in$ $\overline{أب}$ على وتد رأسى أملس ، فإذا كان القضيب يصنع زاوية ٣٠° مع الأفقى عند ب ، وكان رد فعل الأرض ($\tilde{ر}$) عند ب يصنع زاوية ٣٠° مع الرأسى ، وكان القضيب على وشك الإنزلاق. أوجد مقدار رد فعل الأرض ($\tilde{ر}$). «$\frac{١٠٠}{٣}\sqrt{٣}$ نيوتن»

---

٨٠ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ١٦ ث.كجم يرتكز بطرفه أ على مستوٍ أفقى خشن ويرتكز عند إحدى نقطة ح على وتد أفقى أملس يعلو ٢٠ سم عن المستوى الأفقى فإذا كان القضيب يميل على الأفقى بزاوية ٣٠° أوجد قوة الاحتكاك. وإذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين القضيب والمستوى الأفقى $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ فأوجد الثقل الذى يمكن تعليقه عند الطرف ب ليجعل القضيب على وشك الانزلاق. «$٣\sqrt{٣}$ ، $\frac{٨}{٧}$ ث.كجم»

---

٨١ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله $٣\frac{١}{٣}$ مترًا ووزنه ٣٠ ثقل كجم يرتكز بطرفه أ على مستوٍ أفقى خشن ويستند بإحدى نقطه ح على مسمار أملس مُثبت على ارتفاع ١,٢ مترًا من المستوى الأفقى وعندما كان ظل زاوية ميل القضيب على الأفقى $\frac{٣}{٤}$ أصبح القضيب على وشك الانزلاق. أوجد كلاً من رد فعل المسمار على القضيب وكذلك معامل الاحتكاك السكونى بين القضيب والمستوى الأفقى. «٢٠ ثقل كجم ، $\frac{٦}{٧}$»

---

٨٢ $\overline{أب}$ سلم منتظم طوله ٨ أمتار ووزنه ٢٠ ثقل كجم يستند بطرفه أ على أرض أفقية خشنة ويميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{٤}{٣}$ ويستند بإحدى نقطة ح على حافة سور أملس يعلو عن الأرض بمقدار ٤ أمتار فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين السلم والأرض $م_س$ فبيِّن أنه فى وضع التوازن النهائى تكون $م_س \leq \frac{٤٨}{٨٩}$ وإذا كانت $م_س = \frac{٣}{٤}$ فأوجد مقدار الثقل الذى يجب تعليقه عند ب حتى يكون السلم على وشك الانزلاق. «$٦\frac{٢}{٣}$ ثقل كجم»

٨٣ $\overline{أب}$ قضيب رفيع خفيف طوله ٢ ل مُعلق فى مستوى رأسى من طرفيه أ ، ب بخيطين يميلان على الرأسى بزاويتين ٣٠° ، ٦٠° على الترتيب. عُلق فى القضيب الثقلان ٢ ، ٨ نيوتن على بعُد من أ يساوى $\frac{١}{٥}$ ل ، $\frac{٦}{٥}$ ل

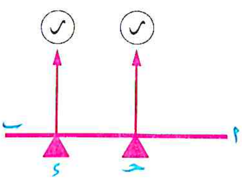
أوجد فى وضع التوازن مقدار الشد فى الخيطين وقياس زاوية ميل القضيب على الأفقى.

«٥ ، ٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن ، ٣٠°»

مسائل تقيس مهارات التفكير

٨٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

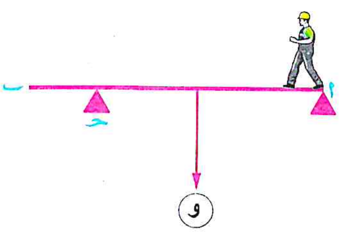
(١) فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ قضيب غير منتظم وزنه (و) يرتكز فى وضع أفقى على حاملين عند حـ ، ء فإذا كان ردى الفعل عند الحاملين متساوٍ فإن نقطة تأثير وزن القضيب تقع فى نقطة منتصف ....

(أ) $\overline{أب}$ (ب) $\overline{حـء}$ (جـ) $\overline{أء}$ (د) $\overline{بحـ}$

(٢) فى الشكل المقابل :



قضيب منتظم $\overline{أب}$ يرتكز فى وضع أفقى على حاملين أحداهما عند الطرف أ والآخر عند نقطة حـ على القضيب فإذا تحرك رجل من نقطة أ متجهًا إلى ب مع الاحتفاظ باتزان القضيب فإن : ....

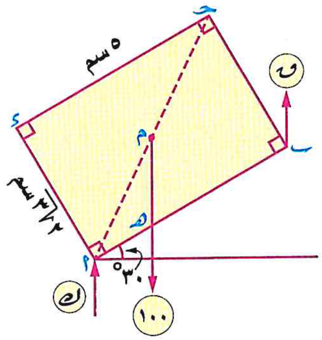
(أ) رد الفعل عند أ يزداد ورد الفعل عند حـ يقل.

(ب) رد الفعل عند أ يقل ورد الفعل عند حـ يزداد.

(جـ) رد الفعل عند أ ثابت ورد الفعل عند حـ ثابت.

(د) رد الفعل عند أ يقل حتى يصل الرجل لمركز القضيب ثم يزداد تدريجيًا.

③ فى الشكل المقابل :



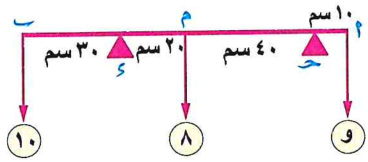
إذا كانت الصفيحة أ ب حـ ء متزنة تحت تأثير القوى

الموضحة بالشكل فإن : ك – ق = ...

(أ) ٤٠ (ب) ٥٠

(جـ) ٦٠ (د) ٧٠

④ فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ ساق منتظمة وزنها ٨ نيوتن

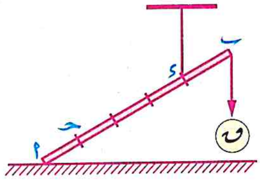
ثُبت عند ب وزن مقداره ١٠ نيوتن

فإن مقدار الوزن اللازم تعليقه عند أ

لتكون الساق متزنة أفقيًا ∋ .... نيوتن.

(أ) [٣ ، ١٢٤] (ب) {٢ ، ١٢٢} (جـ) [٢ ، ١٢٢] (د) [١ ، ٦٢]

⑤ فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه «و» نيوتن

طوله ٥ وحدات طول ، حـ ، ء نقطتين

علية حيث أ حـ = ء ب = وحدة طول واحدة

معلق بخيط رأسى خفيف من نقطة ء ، إذا علق من نقطة (ب) وزن مقداره «ق» نيوتن يتزن القضيب كما بالشكل مستندًا بطرفه (أ) على سطح أفقى أملس

وإذا قطع الجزء $\overline{أحـ}$ من القضيب فإنه يتزن أفقيًا

فإن : $\frac{\text{الشد فى الحبل فى الحالة الأولى}}{\text{الشد فى الحبل فى الحالة الثانية}}$ = ...

(أ) $\frac{١٣}{٨}$ (ب) $\frac{٨}{٥}$ (جـ) $\frac{٦٥}{٦٤}$ (د) $\frac{٦٤}{٦٥}$

٨٥ يرتكز قضيب أفقى $\overline{أء}$ على حاملين عند ب ، حـ حيث : أ ب = ب حـ = حـ ء ، وقد وجد أن القضيب يكون على وشك الدوران إذا عُلق من نقطة أ ثقل قدره م ثقل جم أو إذا عُلق من نقطة ء ثقل قدره ن ثقل جرام أوجد وزن القضيب بدلالة م ، ن وإذا كانت ن = ٢ م = ١٠ ث.جم فأوجد وزن القضيب ثم أثبت أنه يؤثر فى نقطة تقسم $\overline{أء}$ بنسبة ٤ : ٥

«(م + ن) ، ١٥ ثقل جرام»

٨٦ يحمل رجلان أ ، ب جسمًا كتلته ٩٠ كجم مُعلق من قضيب معدنى متين وخفيف ، فإذا كانت المسافة بين الرجلين ٦٠ سم وكانت نقطة تعليق الجسم تبعد ٢٠ سم من أ ، فما مقدار ما يتحمله كلٍ من الرجلين من هذا الثقل ؟ وإذا كان الرجل ب لا يمكنه أن يحمل أكثر من ٥٠ ثقل كجم فعيِّن أكبر مسافة من أ يمكن تعليق الثقل عندها حتى يتمكن الرجل ب من الاستمرار فى حمل القضيب. «٣٠ ، ٦٠ ثقل كجم ، $33\frac{1}{3}$ سم»

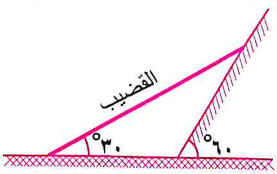
---

٨٧ $\overline{أب}$ قضيب طوله ١٢٠ سم يتزن إذا ارتكز طرفه أ على سطح الأرض وارتفع طرفه ب بتأثير قوة مقدارها ٧٢ ثقل كجم تؤثر رأسيًا إلى أعلى فى نقطة تبعد عن ب مسافة ٢٠ سم. ويتزن القضيب أيضاً إذا ارتكز الطرف ب على الأرض وارتفع الطرف أ عنها بتأثير قوة مقدارها ٨٤ ثقل كجم تؤثر رأسيًا إلى أعلى فى نقطة أ

أوجد : (١) وزن القضيب. (٢) بُعد نقطة تأثير وزنه عن أ «١٤٤ ثقل كجم ، ٥٠ سم»

---

٨٨ (١٩٩٣) فى الشكل الموضح :



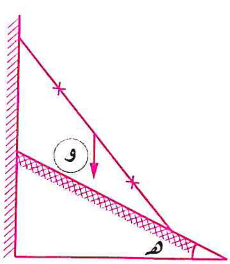
يرتكز قضيب منتظم وزنه ٢٤ ثقل كجم بأحد طرفيه على أرض أفقية خشنة وبطرفه الآخر على مستوٍ أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° إذا كان القضيب على وشك الانزلاق عندما كان قياس زاوية ميله على الأفقى ٣٠° فأوجد معامل الاحتكاك السكونى بين القضيب والأرض ورد فعل كلٍ من المستوى والأرض. «$\frac{\sqrt{3}}{3}$ ، ١٢ ، $12\sqrt{3}$ ثقل كجم»

---

٨٩ قضيب منتظم $\overline{أب}$ وزنه (و) ثقل كجم يرتكز بطرفه أ على مستوٍ أفقى أملس وبطرفه ب على مستوٍ أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° فإذا منع القضيب من الانزلاق بحبل أفقى $\overline{أحـ}$ مثبت أحد طرفيه فى الطرف أ للقضيب والطرف الآخر للحبل مُثبت فى حـ حيث حـ تقع على خط تقاطع المستويين وبحيث يكون القضيب والخيط فى مستوٍ رأسى عمودى على خط تقاطع المستويين. أوجد بدلالة (و) رد فعل كلٍ من المستويين وكذلك الشد فى الخيط علمًا بأن القضيب فى وضع الاتزان يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° «$\frac{3}{4}$ و ، $\frac{1}{2}$ و ، $\frac{\sqrt{3}}{4}$ و»

---

٩٠ فى الشكل المقابل :



ترتكز إحدى نهايتى سلم منتظم وزنه (و) على حائط رأسى أملس وترتكز النهاية الأخرى على أرض خشنة تميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ فإذا كان السلم على وشك الانزلاق وهو فى مستوٍ رأسى عمودى على خط تقاطع الحائط مع الأرض فأثبت أن السلم يميل على الرأسى بزاوية ظلها يساوى ٢ ظا (ى – هـ) حيث ى قياس زاوية الاحتكاك.

الوحدة الثالثة

الازدواجات

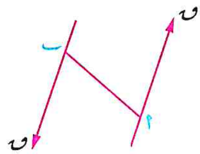
الدرس 1 الازدواج – اتزان جسم تحت تأثير ازدواجين أو أكثر – تكافؤ ازدواجين.

الدرس 2 الازدواج المحصل.

الدرس 1

الازدواج - اتزان جسم تحت تأثير ازدواجين أو أكثر - تكافؤ ازدواجين

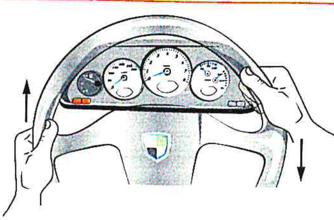
تعريف الازدواج

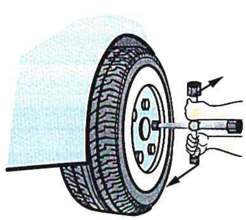


هو مجموعة تتكون من قوتين :

(١) متساويتين فى المعيار. (٢) متضادتين فى الاتجاه.

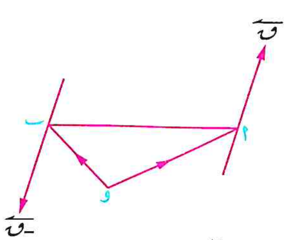
(٣) لا يجمعهما خط عمل واحد.





ويعتبر الشرط الأخير فى تعريف الازدواج هام للغاية وذلك لأن انطباق خطى العمل يعنى أن الجسم الواقع تحت تأثير القوتين متزن أما إذا لم ينعدم البُعد العمودى بين خطى العمل فإن الجسم لا يكون متزنًا وتحدث حركة دورانية فيه وهناك العديد من الأمثلة الحياتية التى نستخدم فيها الازدواجات مثل الازدواج الذى تحدثه اليدان عن إدارة عجلة قيادة السيارة وكذلك الازدواج الذى تحدثه اليدان أيضًا عند محاولة فك أو ربط صواميل إطارات السيارة باستخدام المفتاح المخصص لذلك.

عزم الازدواج



الازدواج إذا أثر على جسم متماسك فإنه يحدث فيه حركة دورانية ، لذلك فإن للازدواج عزمًا يرمز له بالرمز $\overleftarrow{ج}$ يبين مقدرته على إحداث هذا الدوران ويكون :

عزم الازدواج مساويًا لمجموع عزمى قوتيه بالنسبة لأى نقطة فى مستوى القوتين.

أى أن: $\overleftarrow{\text{ج}} = \overleftarrow{\text{وأ}} \times \overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{وب}} \times (-\overleftarrow{\text{ق}})$

$\therefore \overleftarrow{\text{ج}} = \overleftarrow{\text{وأ}} \times \overleftarrow{\text{ق}} - \overleftarrow{\text{وب}} \times \overleftarrow{\text{ق}} = (\overleftarrow{\text{وأ}} - \overleftarrow{\text{وب}}) \times \overleftarrow{\text{ق}}$

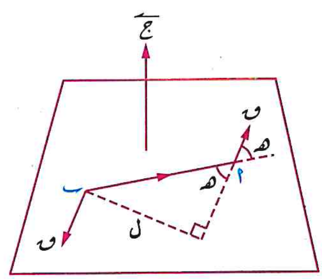
، $\because \overleftarrow{\text{وأ}} - \overleftarrow{\text{وب}} = \overleftarrow{\text{بأ}}$ $\quad \therefore \boxed{\overleftarrow{\text{ج}} = \overleftarrow{\text{بأ}} \times \overleftarrow{\text{ق}} = \overleftarrow{\text{أب}} \times (-\overleftarrow{\text{ق}})}$

ومن ذلك نستنتج النظرية الآتية :

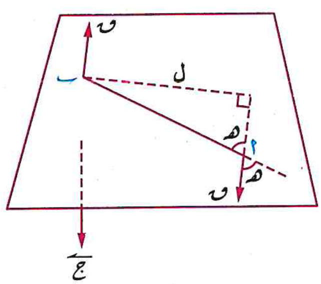
نظرية

عزم الازدواج هو متجه ثابت ، لا يعتمد على النقطة التى تنسب إليها عزمى قوتيه ، وهو يساوى عزم إحدى قوتيه بالنسبة لأى نقطة على خط عمل القوة الأخرى.

معيار واتجاه عزم الازدواج



شكل(١)



شكل(٢)

- $\because \|\overleftarrow{\text{ج}}\| = \|\overleftarrow{\text{بأ}} \times \overleftarrow{\text{ق}}\|$

$\therefore \boxed{\|\overleftarrow{\text{ج}}\| = \text{بأ} \times \text{ق} \times \text{جا هـ}}$ حيث هـ قياس الزاوية بين $\overleftarrow{\text{بأ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}$

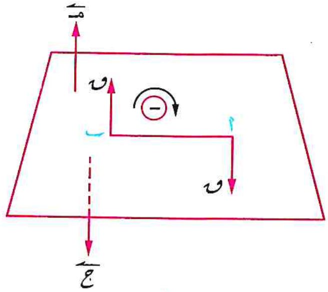
، $\because$ بأ جا هـ = ل حيث ل البُعد العمودى بين خطى عمل $\overleftarrow{\text{بأ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}$ ويسمى «ذراع الازدواج»

، $\because \|\overleftarrow{\text{ج}}\| = \text{ق} \times \text{بأ جا هـ}$ $\quad \therefore \boxed{\|\overleftarrow{\text{ج}}\| = \text{ق} \times \text{ل}}$

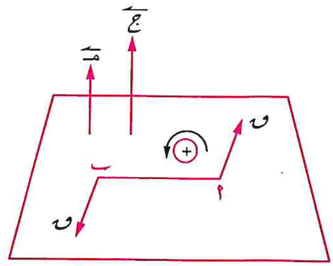
أى أن: معيار عزم الازدواج = معيار إحدى قوتيه × ذراع الازدواج

- يكون متجه عزم الازدواج عموديًا على المستوى الذى يجمع خطى عمل $\overleftarrow{\text{بأ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}$ ويتحدد اتجاهه وفقًا لقاعدة اليد اليمنى كما فى شكل (١) ، (٢)

القياس الجبرى لعزم الازدواج



شكل (٢)



شكل (١)

إذا حددنا متجه وحدة $\overline{م}$ عمودى على مستوٍ $\overleftrightarrow{أب}$ وخط عمل $\overline{ق}$ ونسبنا إليه متجه عزم الازدواج

فإن : $\boxed{\overline{ع} = ع \ \overline{م}}$ حيث ع يسمى القياس الجبرى لعزم الازدواج ويكون اتجاه $\overline{م}$:

(١) فى نفس اتجاه متجه العزم إذا كانت قوتاه تعملان على الدوران ضد اتجاه حركة عقارب الساعة ولذلك تكون إشارة القياس الجبرى لعزم الازدواج (ع) موجبة [شكل (١)]

أى أن : $\boxed{ع = ق \times أب \ جاهـ = ق \times ل}$

(٢) فى عكس اتجاه متجه العزم إذا كانت قوتاه تعملان على الدوران مع اتجاه حركة عقارب الساعة ولذلك تكون إشارة القياس الجبرى لعزم الازدواج (ع) سالبة [شكل (٢)]

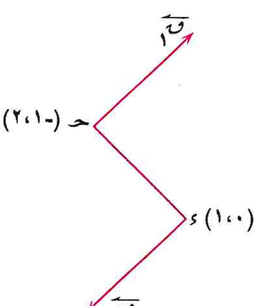
أى أن : $\boxed{ع = - ق \times أب \ جاهـ = - ق \times ل}$

مثال (١)

أثرت القوتان $\overline{ق_1} = ٣ \ \overline{س} + أ \ \overline{ص}$ ، $\overline{ق_2} = ب \ \overline{س} - ٤ \ \overline{ص}$ فى النقطتين

حـ (-١ ، ٢) ، ء (٠ ، ١) على الترتيب فإذا كونت القوتان ازدواجًا

فأوجد قيمتى أ ، ب ومعيار عزم الازدواج وذراع الازدواج.



الحل

∵ $\overline{ق_1}$ ، $\overline{ق_2}$ تكونان ازدواج ∴ $\overline{ق_1} = - \overline{ق_2}$

∴ $٣ \ \overline{س} + أ \ \overline{ص} = - (ب \ \overline{س} - ٤ \ \overline{ص})$

∴ $٣ \ \overline{س} + أ \ \overline{ص} = - ب \ \overline{س} + ٤ \ \overline{ص}$

∴ أ = ٤ ، ب = -٣ ∴ $\overline{ق_1} = ٣ \ \overline{س} + ٤ \ \overline{ص}$

، ∵ $\overline{ءحـ} = (-١ ، ٢) - (٠ ، ١) = (-١ ، ١)$

$\therefore\ \overleftarrow{\text{ج}} = \overleftarrow{\text{ءحـ}} \times \overleftarrow{\text{ق}}_{١} = (-\overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{ص}}) \times (٣\,\overleftarrow{\text{س}} + ٤\,\overleftarrow{\text{ص}}) = (-٤ - ٣)\,\overleftarrow{\text{ع}} = -٧\,\overleftarrow{\text{ع}}$

$\therefore\ \|\overleftarrow{\text{ج}}\| = \|-٧\,\overleftarrow{\text{ع}}\| = ٧$ وحدة عزم

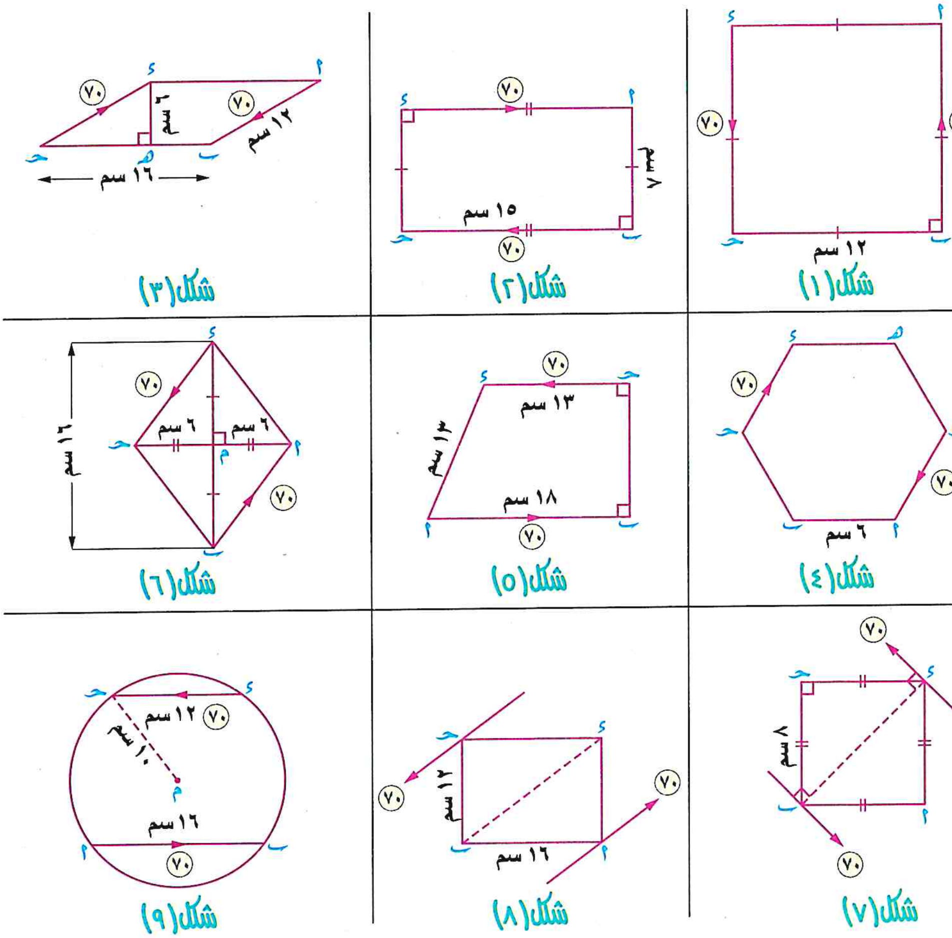
، $\because\ \|\overleftarrow{\text{ق}}_{١}\| = \sqrt{(٣)^{٢} + (٤)^{٢}} = ٥$ وحدة قوة

، $\because\ \|\overleftarrow{\text{ج}}\| = \text{ق}_{١} \times \text{ل}$ $\qquad$ $\therefore\ ٥ \times \text{ل} = ٧$

$\therefore\ \text{ل} = \frac{٧}{٥} = ١,٤$ $\qquad$ $\therefore$ ذراع عزم الازدواج = ١,٤ وحدة طول.

مثال ٢

أوجد ج القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى معيار كلٍ من قوتيه ٧٠ ثقل جرام والموضح فى كلٍ من الأشكال الآتية :



الحـــل

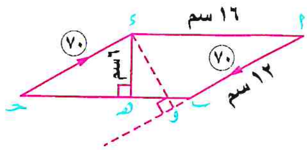
فى شكل (١) : ل (ذراع الازدواج) = ب حـ = ١٢ سم

∴ ج (القياس الجبرى لعزم الازدواج) = ٧٠ × ١٢ = ٨٤٠ ثقل جرام.سم.

فى شكل (٢) : ل (ذراع الازدواج) = أ ب = ٨ سم

∴ ج (القياس الجبرى لعزم الازدواج) = − (٧٠ × ٨) = −٥٦٠ ثقل جرام.سم.

فى شكل (٣) : نرسم $\overline{ء و}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ فيكون $\overline{ء و}$ هو ذراع الازدواج



∵ ب حـ × ء هـ = أ ب × ء و

(كلٍ يساوى مساحة سطح متوازى الأضلاع)

∴ ١٦ × ٦ = ١٢ × ء و ∴ ء و = $\frac{١٦ \times ٦}{١٢}$ = ٨ سم

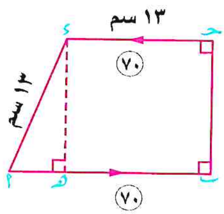
∴ ج = − (٧٠ × ٨) = −٥٦٠ ثقل جم.سم.

فى شكل (٤) :

نصل $\overline{أ حـ}$ فيكون طوله هو ذراع الازدواج ومن خواص السداسى المنتظم الذى طول ضلعه ل سم

يكون أ حـ = ل $\sqrt{٣}$ = ٦ $\sqrt{٣}$ سم

∴ ج = − (٧٠ × ٦ $\sqrt{٣}$) = − ٤٢٠ $\sqrt{٣}$ ثقل جم.سم.



فى شكل (٥) :

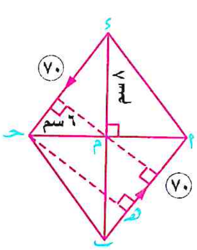
نرسم $\overline{ء هـ}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ فيكون $\overline{ء هـ}$ هو ذراع الازدواج

∵ أ هـ = أ ب − حـ ء = ١٨ − ١٣ = ٥ سم

∴ من Δ أ هـ ء القائم الزاوية فى هـ يكون ء هـ = $\sqrt{(١٣)^٢ - (٥)^٢}$ = ١٢ سم

∴ ج = ٧٠ × ١٢ = ٨٤٠ ثقل جم.سم.

فى شكل (٦) :



م أ = ٦ سم ، م ب = $\frac{١}{٢}$ ب ء = $\frac{١٦}{٢}$ = ٨ سم

ومن Δ أ م ب القائم الزاوية فى م يكون

أ ب = $\sqrt{(٦)^٢ + (٨)^٢}$ = ١٠ سم (طول ضلع المعين)

نرسم $\overline{حـ هـ}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ فيكون طوله هو ذراع الازدواج.

$\therefore$ $\frac{1}{2}$ × أ حـ × ب ء

= أ ب × حـ هـ (كلٍ يساوى مساحة سطح المعين)

$\therefore$ $\frac{1}{2}$ × ١٢ × ١٦ = ١٠ × حـ هـ

$\therefore$ حـ هـ = ٩,٦ سم

$\therefore$ ع = ٧٠ × ٩,٦ = ٦٧٢ ثقل جم . سم.

حل آخر

باستخدام إقليدس نجد أن :

ع = ٢ × $\frac{٦ \times ٨}{١٠}$ = ٩,٦ سم

$\therefore$ حـ هـ = ٩,٦ سم.

فى شكل (٧) :

فى المثلث أ ب ء القائم الزاوية فى أ يكون ب ء = ٨ $\sqrt{٢}$ سم وهو ذراع الازدواج

$\therefore$ ع = ٧٠ × ٨ $\sqrt{٢}$ = ٥٦٠ $\sqrt{٢}$ ثقل جم . سم.

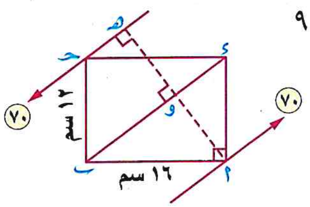
فى شكل (٨) : نرسم $\overline{أ هـ}$ عمود من أ على خط عمل القوة ٧٠ المؤثرة فى حـ

فيكون $\overline{أ هـ}$ هو ذراع الازدواج

$\because$ ء ب = $\sqrt{(١٦)^٢ + (١٢)^٢}$ = ٢٠ سم ، أ و = $\frac{١٦ \times ١٢}{٢٠}$ = ٩,٦

$\therefore$ أ هـ = ٢ أ و = ١٩,٢ سم

$\therefore$ ع = ٧٠ × ١٩,٢ = ١٣٤٤ ثقل جم . سم.



فى شكل (٩) : نرسم من م العمودين $\overline{م هـ}$ ، $\overline{م و}$ على $\overline{أ ب}$ ، $\overline{حـ ء}$

فيكون أ هـ = $\frac{1}{2}$ أ ب = ٨ سم

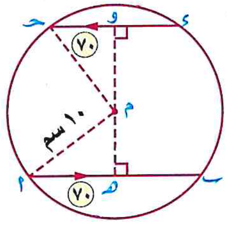
، $\because$ م أ = ١٠ سم $\therefore$ م هـ = $\sqrt{(١٠)^٢ - (٨)^٢}$ = ٦ سم

، حـ و = $\frac{1}{2}$ حـ ء = ٦ سم

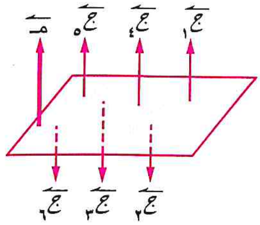
، $\because$ م حـ = ١٠ سم $\therefore$ م و = $\sqrt{(١٠)^٢ - (٦)^٢}$ = ٨ سم

$\therefore$ هـ و (ذراع الازدواج) = م هـ + م و = ٦ + ٨ = ١٤ سم

$\therefore$ ع = ٧٠ × ١٤ = ٩٨٠ ثقل جم . سم.



الازدواجات المستوية



يقصد بالازدواجات المستوية هى التى تقع خطوط عمل قوى هذه الازدواجات فى مستوٍ واحد ، وفى هذه الحالة تكون جميع عزوم هذه الازدواجات متوازية لأنها تكون عمودية على مستوٍ القوى مما يمكننا أن ننسب جميع متجهات عزوم هذه الازدواجات إلى نفس متجه الوحدة $\overleftarrow{م}$ العمودى على مستوٍ الازدواجات ، وهذا يجعلنا نستطع أن نتعامل مع القياسات الجبرية لهذه العزوم بدلاً من التعامل مع متجهات العزوم.

اتزان جسم متماسك تحت تأثير ازدواجين مستويين أو أكثر

تعريف

يُقال لجسم متماسك إنه متزن تحت تأثير ازدواجين مستويين ، إذا كان مجموع عزميهما هو المتجه الصفرى.

أى أن : شرط توازن جسم متماسك تحت تأثير ازدواجين مستويين متجها عزميهما

$\overleftarrow{ج}_1$ ، $\overleftarrow{ج}_2$ هو : $\overleftarrow{ج}_1 + \overleftarrow{ج}_2 = \overleftarrow{و}$ أى $\overleftarrow{ج}_1 = -\overleftarrow{ج}_2$

وفى هذه الحالة يُقال إن الازدواجين متوازنان.

وعمومًا شرط توازن جسم متماسك تحت تأثير عدة ازدواجات مستوية

عزومها $\overleftarrow{ج}_1$ ، $\overleftarrow{ج}_2$ ، ... ، $\overleftarrow{ج}_ن$ هو $\overleftarrow{ج}_1 + \overleftarrow{ج}_2 + \cdots + \overleftarrow{ج}_ن = \overleftarrow{و}$

نتيجة

يتزن جسم تحت تأثير ازدواجين مستويين أو أكثر إذا انعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم الازدواجات.

أى أن : شرط توازن جسم متماسك تحت تأثير ازدواجين مستويين (شرط توازن ازدواجين)

القياسان الجبريان لمتجهى عزميهما $ج_1$ ، $ج_2$ هو :

$ج_1 + ج_2 = 0$ أى $ج_1 = -ج_2$

وعمومًا شرط توازن جسم متماسك تحت تأثير عدة ازدواجات مستوية القياسات الجبرية لعزومها $ج_1$ ، $ج_2$ ، ... ، $ج_ن$ هو $ج_1 + ج_2 + \cdots + ج_ن = 0$

تكافؤ ازدواجين

تعريف

يتكافأ ازدواجان مستويان إذا تساوى متجها عزميهما.

أى أن : شرط تكافؤ الازدواجين المستويين $\overleftarrow{ج_١}$ ، $\overleftarrow{ج_٢}$ هو : $\overleftarrow{ج_١} = \overleftarrow{ج_٢}$

نتيجة

يتكافأ ازدواجان مستويان إذا تساوى القياسان الجبريان لمتجهى عزميهما.

أى أن : الازدواجان المستويان $\overleftarrow{ج_١}$ ، $\overleftarrow{ج_٢}$ يتكافآن إذا كان : $ج_١ = ج_٢$

ملاحظات

(١) إذا اتزن جسم تحت تأثير عدة قوى ، وازدواج قياسه الجبرى = ج

فإن مجموعة القوى يجب أن تكون ازدواجًا قياسه الجبرى = (– ج)

أى أن الجسم لا يمكن أن يتزن تخت تأثير قوة وازدواج.

(٢) الازدواج لا يكافئ إلا ازدواجًا آخر.

(٣) يتوقف تأثير الازدواج فى الأجسام المتماسكة على :

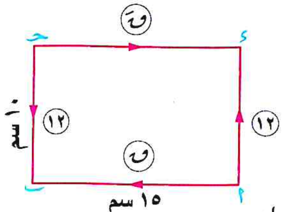
- معيار عزمه.
- المستوى الذى تقع فيه قوتاه.

ولذلك لا يتغير تأثير الازدواج على الجسم إذا نقل من موضع لآخر فى مستويه مادام محتفظاً بعزمه مقدارًا وإشارة أو حتى استبدل بازدواج آخر يكافئه مادام يقع معه فى نفس المستوى (أو فى مستوى آخر يوازيه).

مثال ٣

أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ١٥ سم ، ب حـ = ١٠ سم أثرت قوى مقاديرها ق ، ١٢ ، قَ ، ١٢ ثقل كجم فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ ، $\overleftarrow{أ ء}$ على الترتيب فإذا اتزنت مجموعة هذه القوى فأوجد قيمة كل من : ق ، قَ

الحـــل



القوتان اللتان مقداراهما ١٢ ، ١٢ ثقل كجم تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه ج$_{١}$

∴ ج$_{١}$ = ١٢ × ١٥ = ١٨٠ ثقل كجم.سم.

∵ الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج آخر له نفس العزم فى اتجاه مضاد

∴ القوتان اللتان مقداراهما ق ، قَ ثقل كجم تكونان ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه = −١٨٠ ثقل كجم.سم.

∴ ق = قَ ، − ق × ١٠ = −١٨٠ ∴ ق = قَ = ١٨ ثقل كجم.

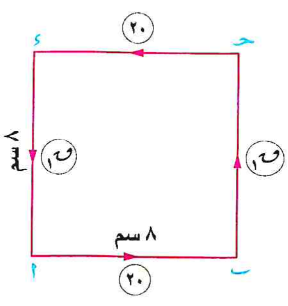
مثال ٤

أ ب جـ د مربع طول ضلعه ٨ سم ورؤوسه أ ، ب ، جـ ، د فى ترتيب دورى عكس حركة دوران عقارب الساعة أثرت قوتان مقداراهما ٢٠ ، ٢٠ ثقل جرام فى $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ د}}$ أوجد :

(١) قوتين متساويتين فى المقدار ق$_{١}$ ، ق$_{١}$ تؤثران فى $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ بحيث تكونان ازدواجًا مكافئًا للازدواج المكون من القوتين المعلومتين.

(٢) قوتين متساويتين فى المقدار ق$_{٢}$ ، ق$_{٢}$ تؤثران فى أ ، جـ وخطا عملهما يوازيان القطر $\overline{\text{ب د}}$ وتكونان ازدواجًا مكافئًا للازدواج المكون من القوتين المعلومتين.

الحـــل



(١) القوتان المعلومتان تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه

ج$_{١}$ = ٢٠ × ٨ = ١٦٠ ثقل جم.سم

ونفرض أن القوتين اللتين مقداراهما ق$_{١}$ ، ق$_{١}$

تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه ج$_{٢}$ = ق$_{١}$ × أ ب

= ق$_{١}$ × ٨ = ٨ ق$_{١}$ ثقل جم

∵ الازدواجين متكافئان ∴ ج$_{١}$ = ج$_{٢}$

∴ ٨ ق$_{١}$ = ١٦٠ ∴ ق$_{١}$ = ٢٠ ثقل جم

، ∵ ج$_{٢}$ = ١٦٠ ثقل جم.سم (موجب) ∴ قوتاه تعملان فى $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{د أ}}$

∴ القوتان المطلوبتان مقدار كلٍ منهما ٢٠ ثقل جرام وتؤثران فى $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{د أ}}$

② نفرض أن القوتين $ق_٢$ ، $ق_٢$ المؤثرتين فى أ ، حـ

وتوازيان القطر $\overline{بء}$ تكونان ازدواجًا

القياس الجبرى لعزمه = $ج_٣$

∵ الازدواجين متكافئان ∴ $ج_١ = ج_٣$

∴ $ج_٣$ = ١٦٠ ثقل جم.سم وحيث أن $ج_٣$ موجب :

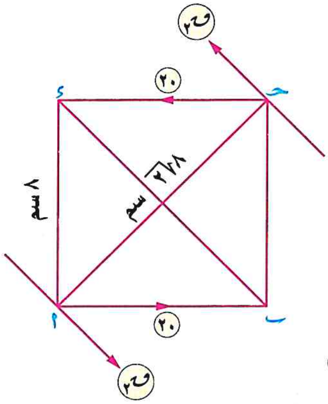
∴ القوة التى تعمل فى أ تكون فى اتجاه $\overleftarrow{ءب}$ والتى تعمل

فى حـ تكون فى اتجاه $\overleftarrow{بء}$ ويكون :

∴ $٨\sqrt{٢}\ ق_٢ = ١٦٠$ ∴ $ق_٢ = \frac{١٦٠}{٨\sqrt{٢}} = ١٠\sqrt{٢}$ ثقل جرام

∴ القوتان المطلوبتان مقدار كلٍ منهما $١٠\sqrt{٢}$ ثقل جرام وتؤثر إحداهما فى أ

فى اتجاه $\overleftarrow{ءب}$ والأخرى فى حـ فى اتجاه $\overleftarrow{بء}$



مثال ٥

$\overline{أب}$ قضيب خفيف طوله ٤٠ سم مُعلق أفقياً من مسمار فى منتصفه ، أثرت قوتان كلٍ منهما $٥\sqrt{٣}$ نيوتن فى طرفيه إحداهما رأسية إلى أعلى والأخرى رأسية إلى أسفل ، كما شد القضيب بخيط يميل عليه بزاوية قياسها ٦٠° من نقطة عليه حـ وكان الشد فى الخيط مقداره ٢٥ نيوتن. أوجد مقدار واتجاه وخط عمل قوة رابعة إذا أثرت على القضيب حفظته فى حالة توازن فى وضع أفقى.

الحل

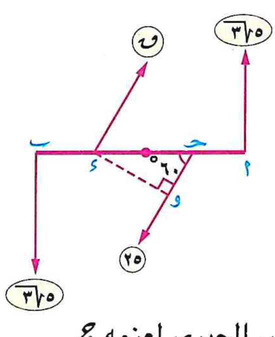
القوتان اللتان مقداراهما : $٥\sqrt{٣}$ ، $٥\sqrt{٣}$ نيوتن عند

طرفى القضيب تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه $ج_١$

∴ $ج_١ = ٥\sqrt{٣} \times ٤٠ = ٢٠٠\sqrt{٣}$ نيوتن.سم

∵ الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج آخر له نفس العزم فى اتجاه مضاد

∴ القوتان اللتان مقداراهما ٢٥ ، ق يجب أن تكونا ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه $ج_٢$



∴ خط عمل $\overleftarrow{ق}$ يميل على القضيب $\overline{أب}$ بزاوية ٦٠° لأعلى

∴ $ج_٢ = -٢٠٠\sqrt{٣}$ نيوتن.سم

∴ ق = ٢٥ نيوتن

، ∵ $ج_٢ = -٢٥ \times ء و = -٢٥ \times حء$ جا ٦٠° $= -\frac{٢٥\sqrt{٣}}{٢}$ حء

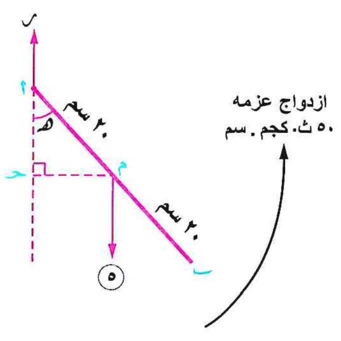
∴ $-\frac{٢٥\sqrt{٣}}{٢}$ حء $= -٢٠٠\sqrt{٣}$ ∴ حء = ١٦ سم

∴ نقطة ء تبعد عن نقطة حـ مسافة ١٦ سم.

مثال ٦

$\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٤٠ سم ومقدار وزنه ٥ ثقل كجم يمكنه الدوران بسهولة فى مستوٍ رأسى حول مفصل عند طرفه أ فإذا أثر على القضيب عندما كان رأسيًا ازدواج القياس الجبرى لعزمه ٥٠ ثقل كجم.سم ويعمل فى نفس المستوى الرأسى المار بالقضيب فأوجد فى وضع الاتزان كلاً من رد فعل المفصل وقياس زاوية ميل القضيب على الرأسى.

الحل



القضيب فى وضع الاتزان يكون واقعًا تحت تأثير :

(١) ازدواج القياس الجبرى لعزمه $ج_١$ = ٥٠ ثقل كجم.سم

(٢) وزنه ومقداره ٥ ثقل كجم يؤثر فى م منتصف $\overline{أب}$ رأسيًا إلى أسفل.

(٣) رد فعل المفصل عند أ وليكن ر

∵ الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج آخر له نفس العزم فى اتجاه مضاد

∴ القوتان اللتان مقداراهما ٥ ، ر يجب أن تكونا ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه $ج_٢$ = −٥٠ ثقل كجم.سم

∴ ر (مقدار رد فعل المفصل عند أ) = ٥ ثقل كجم رأسيًا إلى أعلى

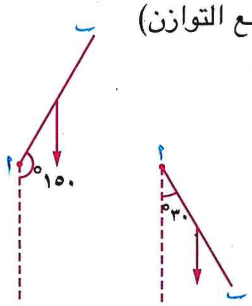
، ∵ $ج_٢ = -٥٠$ ∴ $-٥ \times$ م حـ $= -٥٠$ ∴ م حـ = ١٠ سم

∴ جا هـ (حيث هـ قياس زاوية ميل القضيب على الرأسى فى وضع التوازن)

$= \frac{م حـ}{م ٢} = \frac{١٠}{٢٠} = \frac{١}{٢}$

∴ هـ = ٣٠° أ، ١٥٠°

∴ القضيب فى وضع التوازن يميل على الرأسى لأسفل بزاوية قياسها ٣٠° أ، ١٥٠°

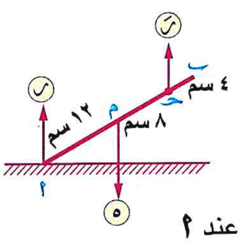


مثال ٧

$\overline{٢ب}$ قضيب منتظم طوله ٢٤ سم ومقدار وزنه ٥ ثقل كجم يمكنه الدوران بسهولة فى مستوٍ رأسى حول مسمار أفقى ثابت يمر بثقب صغير فى القضيب يبعد عن طرفه ب مسافة ٤ سم. فإذا استند القضيب بطرفه ٢ على سطح أفقى أملس فأوجد رد فعل كل من السطح الأفقى والمسمار على القضيب وإذا شد الطرف ب بقوة أفقية مقدارها ق ثقل كجم حتى أصبح الضغط على السطح الأفقى مساويًا لوزن القضيب وكان القضيب يميل على الأفقى حينئذٍ بزاوية قياسها ٣٠° فأوجد مقدار ق ورد فعل المسمار على القضيب فى هذه الحالة.

الحل

فى الحالة الأولى : القضيب متزن بتأثير ثلاث قوى :



(١) وزنه ومقداره ٥ ثقل كجم ويؤثر فى م منتصف $\overline{٢ب}$ رأسيًا إلى أسفل.

(٢) رد فعل السطح الأفقى الأملس ومقداره ر ويكون رأسيًا إلى أعلى عند ٢

(٣) رد فعل المسمار عند حـ وليكن مقداره ر َ

∵ القضيب متزن بتأثير ثلاث قوى

∴ خطوط عمل القوى الثلاث يجب أن تتوازى أو تتلاقى فى نقطة واحدة

، ∵ الوزن ، رد فعل السطح ر قوتان متوازيتان

∴ رد فعل المسمار $\bar{ر}$ يجب أن يوازيهما ويكون اتجاهه رأسيًا إلى أعلى وحسب شروط اتزان ثلاث قوى متوازية تكون محصلة القوتين $\overleftarrow{ر}$ ، $\overleftarrow{\bar{ر}}$ تساوى فى المقدار القوة التى مقدارها ٥ ثقل كجم فى اتجاه مضاد

∴ ر + $\bar{ر}$ = ٥ (١)

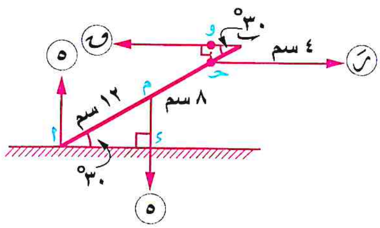
، $\bar{ر}$ × ٨ = ر × ١٢ أى : $\bar{ر}$ = $\frac{٣}{٢}$ ر (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) : ∴ ر + $\frac{٣}{٢}$ ر = ٥ ∴ $\frac{٥}{٢}$ ر = ٥

∴ ر (رد فعل السطح الأفقى) = ٢ ثقل كجم رأسيًا إلى أعلى

، $\bar{ر}$ (مقدار رد فعل المسمار) = $\frac{٣}{٢}$ × ٢ = ٣ ثقل كجم رأسيًا إلى أعلى.

فى الحالة الثانية : القضيب متزن بتأثير أربع قوى :



(١) وزنه ومقداره ٥ ثقل كجم رأسيًا إلى أسفل.

(٢) رد فعل المستوى الأفقى الأملس ومقداره = مقدار الوزن = ٥ ثقل كجم رأسيًا إلى أعلى.

(٣) القوة $\overleftarrow{ق}$ أفقية عند ب

(٤) رد فعل المسمار عند حـ وليكن مقداره $\bar{ر}$

القوتان اللتان مقداراهما ٥ ، ٥ ثقل كجم تكونان ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه ع$_١$

∴ ع$_١$ = −٥ × أء = −٥ × أم جتا ٣٠° = −٥ × ١٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = −٣٠ $\sqrt{٣}$ ثقل كجم.سم

، ∵ الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج آخر يساويه فى العزم ومضاد له فى الاتجاه

∴ القوتان اللتان مقداراهما ق ، $\bar{ر}$ تكونان ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه ع$_٢$ = ٣٠ $\sqrt{٣}$ ثقل كجم.سم

∴ $\bar{ر}$ = ق وخطا عملهما متوازيان ومتضادان ، ق × حـ و = ٣٠ $\sqrt{٣}$

∴ ق × ب حـ جا ٣٠° = ٣٠ $\sqrt{٣}$ ∴ ق × ٤ × $\frac{١}{٢}$ = ٣٠ $\sqrt{٣}$

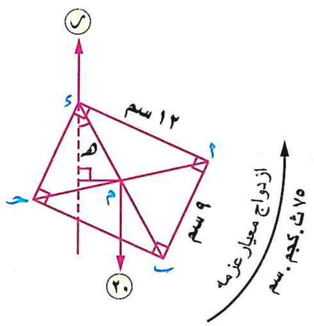
∴ ق = ١٥ $\sqrt{٣}$ ثقل كجم

∴ $\bar{ر}$ = ١٥ $\sqrt{٣}$ ثقل كجم أفقية فى اتجاه مضاد لاتجاه ق

مثال ٨

$ا ب ح ء$ صفيحة مستطيلة الشكل حيث : $ا ب$ = ٩ سم ، $ب ح$ = ١٢ سم ووزنها ٢٠ ثقل كجم ويؤثر فى نقطة تقاطع القطرين. عُلقت الصفيحة فى مسمار رفيع أفقى بالقرب من الرأس ء بحيث كان مستواها رأسيًا ، فإذا أثر على الصفيحة ازدواج معيار عزمه ٧٥ ثقل كجم.سم واتجاهه عمودى على مستوى الصفيحة. فأوجد قياس زاوية ميل $\overline{ءب}$ على الرأسى فى وضع الاتزان.

الحل



∵ متجه عزم الازدواج عمودى على مستوى الصفيحة

∴ الازدواج يعمل فى مستوى الصفيحة نفسها وفى وضع الاتزان تكون الصفيحة متزنة بتأثير :

(١) الازدواج الذى معيار عزمه ٧٥ ثقل كجم.سم.

(٢) وزنها ومقداره ٢٠ ثقل كجم ويؤثر فى م رأسيًا إلى أسفل.

(٣) رد فعل المسمار عند ء وليكن ر

∴ القوتان اللتان مقداراهما ٢٠ ، ر تكونان ازدواجاً

القياس الجبرى لعزمه = −٧٥ ثقل كجم.سم

∴ ر (مقدار رد فعل المسمار عند ء) = ٢٠ ثقل كجم رأسيًا إلى أعلى

وبفرض أنه فى وضع الاتزان يميل $\overline{ءب}$ على الرأسى بزاوية هـ

∴ −٢٠ × م ء جا هـ = −٧٥

، ∵ م ء = $\frac{1}{2}$ ب ء = $\frac{1}{2}\sqrt{(12)^2 + (9)^2}$ = ٧,٥ سم

∴ −٢٠ × ٧,٥ جا هـ = −٧٥ ∴ ١٥٠ جا هـ = ٧٥

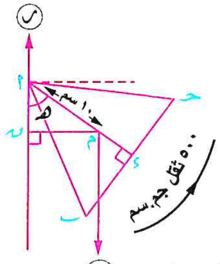
∴ جا هـ = $\frac{1}{2}$

∴ هـ (زاوية ميل $\overline{ءب}$ على الرأسى لأسفل فى وضع الاتزان) = ٣٠° أ ، ١٥٠°

مثال ٩

ا ب حـ صفيحة على شكل مثلث متساوى الأضلاع ارتفاعه ١٥ سم ووزنها ١٠٠ ثقل جرام ويؤثر عند نقطة تلاقى متوسطات المثلث. ثُقبت الصفيحة ثُقبًا صغيرًا بالقرب من الرأس ا ثم عُلقت من هذا الثقب فى مسمار رفيع بحيث كان مستواها رأسيًا ، أثر على الصفيحة ازدواجاً معيار عزمه ٥٠٠ ثقل جرام.سم فى مستويها. أوجد ميل الضلع $\overline{\text{ا ب}}$ على الأفقى فى وضع التوازن.

الحل



∵ الصفيحة متزنة تحت تأثير :

(١) ازدواج القياس الجبرى لعزمه $ج_١$ = ٥٠٠ ثقل جم.سم.

(٢) وزن الصفيحة ومقداره ١٠٠ ثقل جرام.

(٣) رد فعل المسمار عند ا ومقداره ر ثقل جرام

، ∵ الازدواج يتزن مع ازدواج مثله يساويه فى العزم ويضاده فى الاتجاه

∴ القوتان اللتان مقداراهما (ر ، ١٠٠) ثقل جرام تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه $ج_٢$ = −٥٠٠ ثقل جرام.سم

، ∵ $ج_٢$ = −١٠٠ × م ن ∴ −١٠٠ × م ن = −٥٠٠

∴ م ن = ٥ سم

وبفرض أن $\overline{\text{ا ء}}$ يصنع زاوية قياسها هـ مع الرأسى

∴ جا هـ = $\frac{\text{م ن}}{\text{م ا}}$ = $\frac{٥}{١٠}$ = $\frac{١}{٢}$ ∴ هـ = ٣٠° أ، ١٥٠°

إذا كانت : هـ = ٣٠°

، ∵ ق (∠ء ا ب) = ٣٠° ∴ $\overline{\text{ا ب}}$ رأسى لأسفل أى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٩٠°

إذا كانت : هـ = ١٥٠°

، ∵ ق (∠ء ا حـ) = ٣٠° ∴ $\overline{\text{ا حـ}}$ رأسى لأعلى

∴ $\overline{\text{ا ب}}$ يميل على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها ٣٠°

ملاحظة

فى المثال السابق : إذا تبادل $\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{ا حـ}}$ موضعيهما فإن $\overline{\text{ا ب}}$ يميل على الأفقى لأسفل بزاوية قياسها ٣٠° أو $\overline{\text{ا ب}}$ يكون رأسيًا لأعلى أى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٩٠°

تمارين 4

على الازدواج - اتزان جسم تحت تأثير ازدواجين أو أكثر - تكافؤ ازدواجين

من أسئلة الكتاب المدرسى | • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا تمارين على القياس الجبرى لعزم الازدواج

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) القوتان المؤثرتان على عجلة قيادة السيارة وتحدثان دورانًا لعجلة القيادة تكونان ....

(أ) احتكاكًا. (ب) ازدواجًا.

(جـ) قوة عمودية على عجلة القيادة. (د) محصلة غير صفرية.

(٢) لإحداث ازدواج من قوتين يجب أن تكون القوتان ....

(أ) متساويتين فى المقدار. (ب) متضادتين فى الاتجاه.

(جـ) ليسا على خط عمل واحد. (د) كل ماسبق معًا.

(٣) إذا كان ازدواج معيار عزمه ٣٥٠ نيوتن. متر ومعيار إحدى قوتيه ٧٠ نيوتن ، فإن طول ذراع الازدواج يساوى ....

(أ) ٥٠ مترًا. (ب) ٥ أمتار. (جـ) ٥ سم. (د) ٢٤٥٠٠ سم.

(٤) أى من الشروط الآتية لا تغير من تأثير الازدواج على الجسم ؟

(أ) إزاحة الازدواج إلى موضع جديد فى مستواه.

(ب) إزاحة الازدواج إلى مستوى آخر يوازى مستواه.

(جـ) دوران الازدواج فى نفس مستواه.

(د) كل ما سبق صحيح.

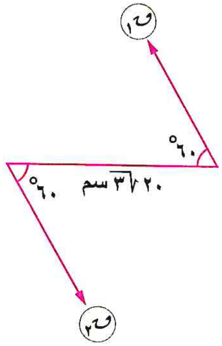
(٥) إذا كانت : $\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ قوتين تكونان ازدواجًا وكانت $\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$

فإن : $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ = ...

(أ) ٣ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$ (ب) −٣ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$

(جـ) ٢ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ٣ $\overleftarrow{\text{ص}}$ (د) − ٣ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$

⑥ **فى الشكل المقابل :**



إذا كان : ق١ = ٧ نيوتن ، القوتان $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$

تكونان ازدواجًا فإن القياس الجبرى لعزم

الازدواج = ... نيوتن. سم.

(أ) ٢١٠ (ب) ٧٠√٣

(جـ) ١٤٠√٣ (د) ١٤٠

⑦ (دور أول ٢٠١٨) إذا كان : $\overleftarrow{ق_١}$ = ٦ $\overleftarrow{س}$ + ب $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = أ $\overleftarrow{س}$ − ٤ $\overleftarrow{ص}$

قوتى ازدواج فإن : أ + ب = ...

(أ) ١٠ (ب) −١٠ (جـ) −٢ (د) ٢

⑧ قوتان $\overleftarrow{ق_١}$ = ٤ $\overleftarrow{س}$ − أ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = ٢ ب $\overleftarrow{س}$ + ٥ $\overleftarrow{ص}$ تكونان ازدواجًا

فإن : ٢ أ + ب = ...

(أ) −١٢ (ب) −٩ (جـ) ٨ (د) ١٢

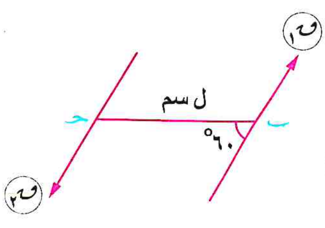
⑨ إذا كان : ٢ $\overleftarrow{ق_١}$ ، ٣ $\overleftarrow{ق_٢}$ هما قوتا ازدواج وكان : $\overleftarrow{ق_٢}$ = ٤ $\overleftarrow{س}$ − ٢ $\overleftarrow{ص}$

فإن : $\overleftarrow{ق_١}$ = ...

(أ) −٦ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$ (ب) ٦ $\overleftarrow{س}$ − ٣ $\overleftarrow{ص}$

(جـ) ٣ $\overleftarrow{س}$ − ٦ $\overleftarrow{ص}$ (د) −٣ $\overleftarrow{س}$ + ٦ $\overleftarrow{ص}$

⑩ (دور ثان ٢٠١٨) **فى الشكل المقابل :**



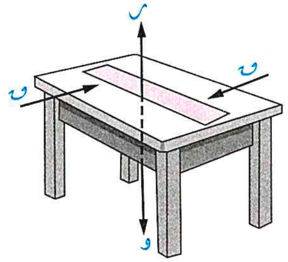
إذا كانت : ق١ = ٧ نيوتن والقوتان $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$

تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه ٢١٠ نيوتن.سم

فإن : ل = ... سم

(أ) ٣٠ (ب) ٣٠√٣ (جـ) ٢٠√٣ (د) ١٥√٣

(١١) الشكل المقابل يمثل مسطرة وزنها (و) موضوعة على نضد أفقى أملس وأثر عليها قوتين مستويتين ومتوازيتين ومتضادتين فى الاتجاه ($-\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{ق}$) لذلك تكون المسطرة ....



(أ) ساكنة وفى حالة اتزان. (ب) تتحرك حركة انتقالية.

(جـ) تتحرك حركة دورانية. (د) تكون على وشك الحركة.

(١٢) قوتان $\overleftarrow{ق_١} = ٣٠\overleftarrow{س} - ٤٠\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢} = -٣٠\overleftarrow{س} + ٤٠\overleftarrow{ص}$ مقاسة بالنيوتن البعد بينهما ٣ أمتار فإن معيار مجموع عزوم القوى حول النقطة (–٤ ، ١) هو ....

(أ) ٥٠ (ب) ١٣٠ (جـ) ١٤٠ (د) ١٥٠

(١٣) قوتان تكونان ازدواج مقدار كل منهما ٣٠ نيوتن ومقدار عزم الازدواج ١٢٠ نيوتن.سم إذا زاد مقدار كل من القوتين ٥ نيوتن فإن مقدار عزم الازدواج الناتج يساوى .... نيوتن.سم

(أ) ١٤٠ (ب) ١٣٠ (جـ) ١٢٠ (د) ١١٠

(١٤) (دور أول ٢٠٢١) إذا كانت $\overleftarrow{ق_١}$ = (٣ ، –١) تؤثر فى نقطة أ (١ ، ٢) ، $\overleftarrow{ق_٢}$ تؤثر فى نقطة ب (–١ ، ١) وكانت $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ تكونان ازدواجًا ، فإن القياس الجبرى لعزم الازدواج = ... وحدة عزم.

(أ) ٥ (ب) ٢ (جـ) –٥ (د) –٢

(١٥) أثرت القوتان $\overleftarrow{ق_١}$ = (٢ ، –٥) ، $\overleftarrow{ق_٢}$ فى النقطتين أ (٢ ، ل) ، ب (ل ، ٣) على الترتيب فإذا كونت القوتان ازدواجًا عزمه $-٧\overleftarrow{ع}$ فإن : ل = ...

(أ) –١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

(١٦) إذا كانت : $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ قوتان أفقيتان تؤثران فى النقطتين أ (١ ، ٣) ، ب (٠ ، ٥) على الترتيب وتمثلان ازدواجًا متجه عزمه يساوى $٢٠\overleftarrow{ع}$

فإن : $\overleftarrow{ق_٢}$ يمكن أن تكون ....

(أ) (١٠ ، ٠) (ب) (–٢٠ ، ٠) (جـ) (٢٠ ، ٠) (د) (٠ ، –١٠)

(١٧) (استرشادى ٢٠٢٥) إذا كانت القوتان $\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ تكونان ازدواجًا ، وتؤثران على الترتيب فى النقطتين : (٣ ، −٢) ، (−١ ، ٤)

، $\overleftarrow{\text{ق}}_{١} + \overleftarrow{\text{ق}}_{٢} = (\text{أ} - ٥)\,\overleftarrow{\text{س}} + (\text{ب} + ١٢)\,\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{١} = \text{أ}\,\overleftarrow{\text{س}} + \text{ب}\,\overleftarrow{\text{ص}}$

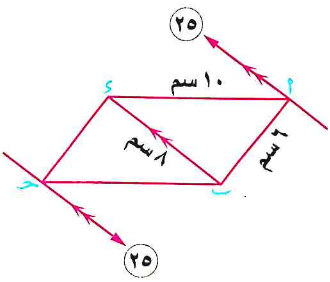
فإن عزم الازدواج يساوى .... $\overleftarrow{\text{ع}}$

(أ) ١ٸ   (ب) −١٨   (جـ) ١٣   (د) −١٣

(١٨) (استرشادى ٢٠٢٥) اثرت القوتان $\overleftarrow{\text{ق}}_{١} = \text{أ}\,\overleftarrow{\text{س}} + \text{ب}\,\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢} = ٥\,\overleftarrow{\text{س}} - ٢\,\overleftarrow{\text{ص}}$ فى النقطتين حـ (−٢ ، ١) ، د (٣ ، ١) على الترتيب فاذا كانت القوتان تكونان ازدواج فإن البعد العمودى من النقطة حـ على خط عمل القوة $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١٠   (ب) $\frac{\sqrt{٢٩}}{١٠}$ (جـ) $\sqrt{٢٩}$ (د) $\frac{١٠}{\sqrt{٢٩}}$

(١٩) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ د متوازى أضلاع فيه : أ ب = ٦ سم

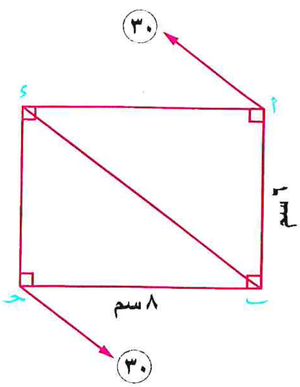
، ب د = ٨ سم ، أ د = ١٠ سم

إذا كانت القوتان (٢٥ ، ٢٥) نيوتن تكونان ازدواج

فإن معيار عزمه = ... نيوتن.سم.

(أ) ٢٥٠   (ب) ٣٠٠   (جـ) ٤٠٠   (د) ٥٠٠

(٢٠) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ د مستطيل فيه أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم

، إذا أثرت القوتان ٣٠ ، ٣٠ نيوتن عند أ ، حـ

فى اتجاه يوازى $\overleftarrow{\text{ب د}}$ ، $\overleftarrow{\text{د ب}}$ على الترتيب

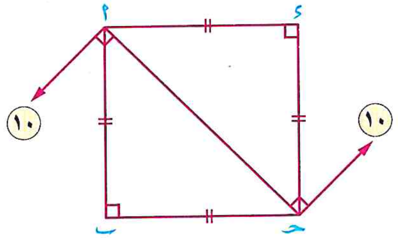
، فإن معيار عزم الأزدواج الناتج

يساوى .... نيوتن.سم.

(أ) ٩٨   (ب) ١٦٠

(جـ) ٢٨٨   (د) ٤٢٠

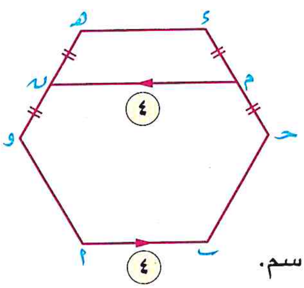
(٢١) (استرشادى ٢٠٢٥) **فى الشكل المقابل :**



إذا كان القياس الجبرى لعزمى القوتين ١٠ ، ١٠ نيوتن حول أى نقطة فى مستويها يساوى ٨٠ نيوتن. سم ، فإن مساحة سطح المربع أ ب جـ د = ... سنتيمتر مربع.

(أ) ٣٢　(ب) ٣٢ √٢　(جـ) ٦٤　(د) ٦٤ √٢

(٢٢) (دورثان ٢٠٢٢) **فى الشكل المقابل :**

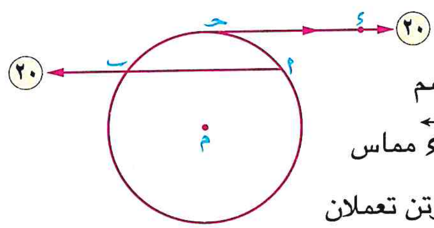


أ ب جـ د هـ و شكل سداسى منتظم ، طول ضلعه ١٢ سم إذا أثرت قوتان مقداراهما ٤ ، ٤ نيوتن فى الاتجاهين م ن ، أ ب فكونتا ازدواج ، فإن القياس الجبرى لعزم الازدواج = ... نيوتن. سم.

(أ) -٣٦ √٣　(ب) ٤٨

(جـ) ٣٦ √٣　(د) -٤٨

(٢٣) (تجريبى ٢٠٢٣) **فى الشكل المقابل :**



دائرة مركزها م ، طول نصف قطرها ١٠ سم ، أ ب وتر فيها حيث أ ب = ١٦ سم ، جـ د مماس عند جـ أثرت قوتان مقداراهما ٢٠ ، ٢٠ نيوتن تعملان فى مستوى الدائرة كما بالشكل فكونتا ازدواج فإن معيار عزمه = ... نيوتن.سم.

(أ) ٤٠　(ب) ١٢٠　(جـ) ٢٠٠　(د) ٨٠

---

٢ (دورأول ٢٠٠٦) تؤثر القوتان ق١ = م س + ٢ ص ، ق٢ = ٣ س + ن ص عند النقطتين أ = (١ ، ١) ، ب = (-١ ، -٢) على الترتيب. إذا كونت القوتان ازدواجًا فأوجد قيمة كلٍ من الثابتين م ، ن ثم احسب طول العمود المرسوم من نقطة ب إلى خط عمل القوة ق١

«-٣ ، -٢ ، √١٣ وحدة طول»

٣ أثرت القوتان (٣ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ٥ $\overleftarrow{\text{ص}}$) ، (−٣ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٥ $\overleftarrow{\text{ص}}$) فى النقطتين ا ، ب على الترتيب ، متجها موضعهما (٦ $\overleftarrow{\text{س}}$ + $\overleftarrow{\text{ص}}$) ، (٤ $\overleftarrow{\text{س}}$ + $\overleftarrow{\text{ص}}$).

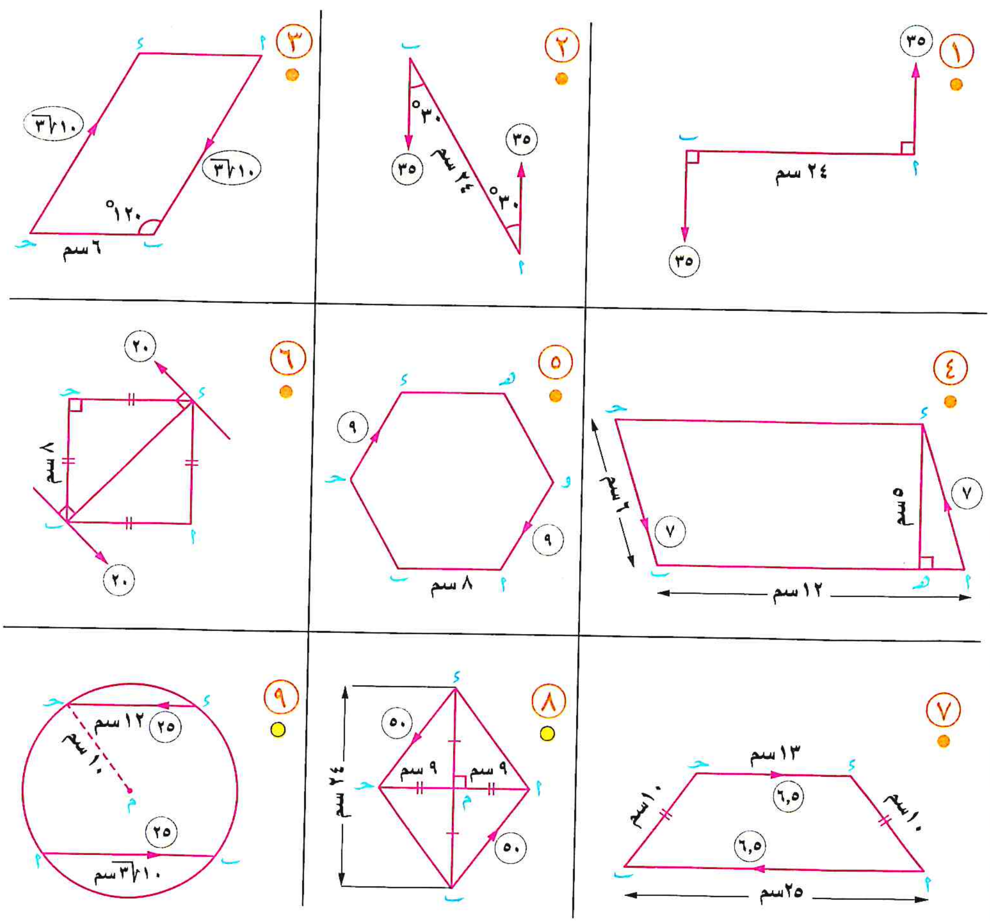
برهن أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد عزمه. «−١٠ $\overleftarrow{\text{ع}}$»

---

٤ أثرت $\overleftarrow{\text{ق}}_١$ = ٦ $\overleftarrow{\text{ص}}$ فى نقطة الأصل كما أثرت $\overleftarrow{\text{ق}}_٢$ = −٦ $\overleftarrow{\text{ص}}$ فى النقطة (٢ ، ٠) بيِّن أن مجموع عزوم القوى بالنسبة لأى نقطة (س ، ص) لا يعتمد على س ، ص

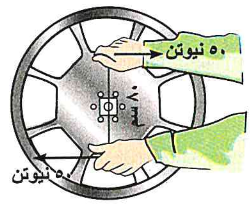
---

٥ **أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج المؤثر فى كل من الاشكال الآتية حيث إن القوة تقاس بوحدة النيوتن.**

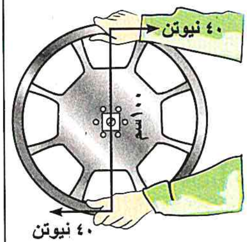


٦ **أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج المؤثر فى كل من الأشكال الآتية :**

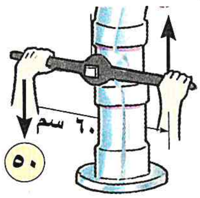
①



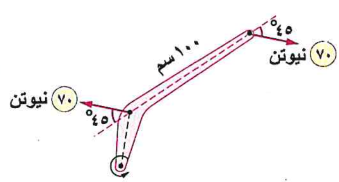
②



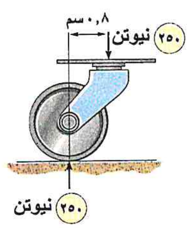
③



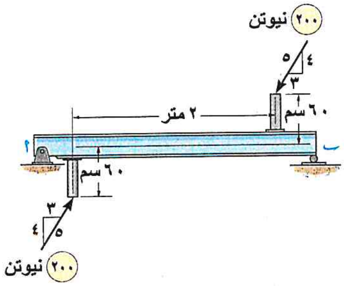
④



⑤



⑥



---

٧ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٢ سم ، هـ ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ ، و ∈ $\overline{\text{أ ء}}$

بحيث : ب هـ = ء و = ٧ سم أوجد معيار عزم الازدواج الذى معيار كلٍ من قوتيه

٣٩ ثقل جرام وتؤثران فى $\overleftarrow{\text{ب و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء هـ}}$ «٢٥٢ ثقل جم . سم»

---

٨ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٨ سم فرضت النقطتان هـ ، و على القطر $\overline{\text{ب ء}}$ بحيث :

ق (∠ حـ هـ ء) = ق (∠ أ و ب) = ٦٠° أوجد معيار عزم الازدواج الذى معيار كلٍ من

قوتيه ١٠ ثقل كجم وتؤثران فى $\overleftarrow{\text{و أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{هـ حـ}}$ «$٩٠\sqrt{٢}$ ثقل كجم . سم»

---

٩ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ١٢ سم ، أ ء = ٥ سم أثرت فى أ ، حـ قوتان معيار

كلٍ منهما ٣٩ نيوتن وخطا عملهما فى اتجاه $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء ب}}$

أوجد معيار عزم الازدواج الحادث. «٣٦٠ نيوتن . سم»

١٠ أ ب حـ ء معين فيه طول قطره $\overline{\text{أحـ}}$ = ١٤ سم ، ق(∠ أ) = ٦٠° أوجد معيار عزم الازدواج الذى مقدار كلٍ من قوتيه ٥٠ ثقل جرام وتؤثران فى $\overleftarrow{\text{أء}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$

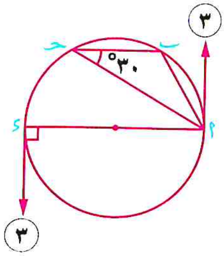
«٣٥٠ ثقل جم.سم»

---

١١ (دور أول ٢٠٢٤) فى الشكل المقابل :

القوتان اللتان مقداراهما (٣ ، ٣) نيوتن متوازيتان وفى مستوى الدائرة وتكونان ازدواجًا ، إذا كان $\overline{\text{أء}}$ قطر فى الدائرة ، أ ب = ٦ سم ، ق(∠ أ حـ ب) = ٣٠°

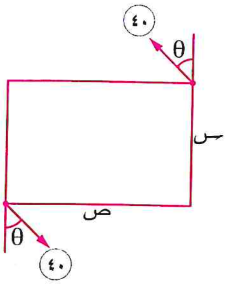
فأوجد معيار عزم الازدواج.



«٣٦ نيوتن.سم»

---

١٢ الشكل المقابل يوضح قوتين مقدار كل منهما ٤٠ نيوتن ، تؤثران على طرفى صفيحة مستطيلة الشكلً أبعادها س ، ص سم.



أوجد عزم ازدواج القوتين فى كل من الحالات الآتية :

(١) س = ٣ سم ، ص = ٤ سم ، θ = صفر°

(٢) س = ص = ٦ سم ، θ = $\frac{\pi}{٤}$

(٣) س = ٠ ، ص = ٥ سم ، θ = ٣٠°

(٤) س = ٦ سم ، ص = ٠ ، θ = ٩٠°

(٥) س = ٥ سم ، ص = ١٢ سم ، ظا θ = $\frac{٥}{١٢}$

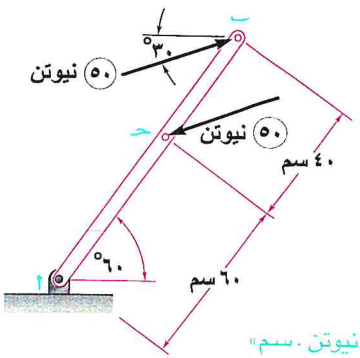
---

١٣ الشكل المقابل يوضح قوتين معيار كل منهما ٥٠ نيوتن ، تؤثران على رافعة $\overline{\text{أب}}$

أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج بطريقتين :

(١) باستخدام البعد العمودى بين القوتين.

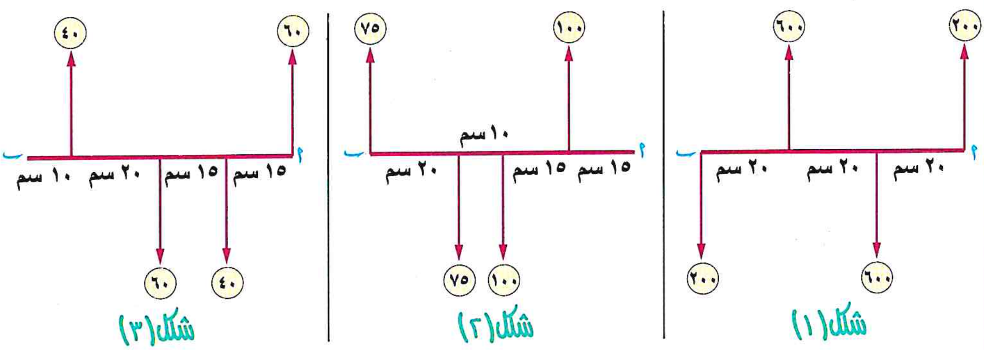
(٢) بإيجاد مجموع عزوم القوتين بالنسبة لنقطة أ



«-١٠٠٠ نيوتن.سم»

ثانيًا تمارين على اتزان جسم تحت تأثير ازدواجين أو أكثر - تكافؤ ازدواجين

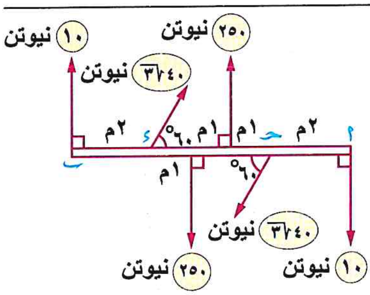
1 $\overline{أب}$ قضيب مهمل الوزن طوله ٦٠ سم أثرت فيه أربع قوى متوازية وعمودية عليه عند النقط وفى الاتجاهات المبينة على الأشكال الآتية وكانت مقادير القوى المبينة منسوبة كلها إلى نفس وحدات قياس مقدار القوة. أثبت أن الجسم يتزن فى الشكلين (١ ، ٢) ولا يتزن فى الشكل (٣) :



2 فى الشكل المقابل :

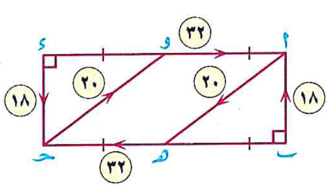
$\overline{أب}$ قضيب خفيف تؤثر فيه القوى الموضحة بالشكل.

أثبت أن القضيب متزن.



3 (دور أول ٢٠١٩) فى الشكل المقابل :

أب حـ ء مستطيل فيه : هـ ، و منتصفات $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{أ ء}$ على الترتيب ، أب = ٦ سم ، ب حـ = ١٦ سم. فإذا كانت القوى المؤثرة بالنيوتن ومقاديرها واتجاهاتها كما بالشكل. أثبت أن المجموعة متزنة.



4 $\overline{أب}$ قضيب مهمل الوزن طوله ١٠٠ سم ، حـ ، ء نقطتان عليه تبعدان عن الطرف أ مسافة ٤٠ ، ٨٠ سم على الترتيب. أثرت قوى مقاديرها ٣٠٠ ، ق ، ٣٠٠ ، ق نيوتن عند النقط أ ، حـ ، ء ، ب على الترتيب عمودية على القضيب بحيث كانت القوتان عند أ ، ب فى اتجاه واحد والقوتان الأخريان فى الاتجاه المضاد. عيِّن قيمة ق بحيث يتوازن القضيب.

«٤٠٠ نيوتن»

٥ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٢ سم رؤوسه أ ، ب ، حـ ، ء في ترتيب دورى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة أثرت قوتان مقداراهما ٥ $\sqrt{٢}$ ، ٥ $\sqrt{٢}$ ثقل جرام أحدهما في الرأس ب في اتجاه $\overrightarrow{\text{أ حـ}}$ والآخرى في الرأس ء في اتجاه $\overrightarrow{\text{حـ أ}}$ أوجد قوتين متساويتين في المقدار تؤثران في $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ وتكونان ازدواجًا يكافئ الازدواج المكون من القوتين المعلومتين.

«١٠ ، ١٠»

---

٦ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ ب = ٥ سم ، ب حـ = ٨ سم ، طول العمود المرسوم من ء على $\overline{\text{ب حـ}}$ = ٣,٥ سم. أثرت قوتان مقداراهما ٢٠ ، ٢٠ نيوتن في $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ أوجد معيار كلٍ من القوتين اللتين تؤثران في $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ وتحدثان اتزاناً مع القوتين المعلومتين.

«٣٢ ، ٣٢ نيوتن»

---

٧ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم ، قوتان مقدار كلٍ منهما ٢٥ ث.جم تؤثران في $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء حـ}}$ أوجد مقدار كلٍ من القوتين المؤثرتين في ب ، ء عموديتين على $\overline{\text{ب ء}}$ بحيث تحدثان اتزانًا مع القوتين المعلومتين.

«٢٠ ، ٢٠ ث.جم»

---

٨ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١ متر تؤثر قوتان معيار كل منهما ٤ ث.كجم في $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ كما تؤثر قوتان خارج المربع معيار كل منهما ق مقدرًا بوحدات ث.كجم عند ء ، ب بحيث تصنع الأولى مع $\overleftarrow{\text{ء أ}}$ ، الثانية مع $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ زاويتين متساويتين في القياس ، قياس كل منهما ١٥° ، عيِّن قيمة ق حتى يتكافأ الازدواج المكون من القوتين الأوليين والازدواج المكون من القوتين الأخريين.

«$\frac{٤\sqrt{٦}}{٣}$ ث.كجم»

---

٩ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ٥ سم ، ورؤوسه أ ، ب ، حـ ، ء في ترتيب دورى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة أثرت قوتان مقداراهما ٦٥ ، ٦٥ ثقل جرام في $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ أوجد قوتين متساويتين تكونان ازدواجًا مكافئًا للازدواج المكون من القوتين المعلومتين بحيث :

(١) تؤثران في $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$

(٢) تؤثران في ب ، ء وعموديتان على $\overline{\text{ب ء}}$

(٣) تؤثران في أ ، حـ وتوازيان القطر $\overline{\text{ب ء}}$

«$٢٧\frac{١}{١٢}$ ، $٢٧\frac{١}{١٢}$ ، ٢٥ ، ٢٥ ، $٣٥\frac{٥}{٢٤}$ ، $٣٥\frac{٥}{٢٤}$ ثقل جرام»

١٠ أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم طول ضلعه ل سم. أثرت قوتان مقدار كلٍ منهما ٢٤ $\sqrt{٣}$ نيوتن فى $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{و أ}}$ أوجد القوتين المؤثرتين فى أ ، ء وعموديتين على $\overline{\text{أ ء}}$ بحيث تحدثان اتزاناً مع القوتين المعلومتين. «٣٦ ، ٣٦ نيوتن»

---

١١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) إذا كان : $\overleftarrow{\text{ج}}_1$ ، $\overleftarrow{\text{ج}}_2$ ازدواجين متزنين وكان $\overleftarrow{\text{ج}}_1$ = ٢٠ $\overleftarrow{\text{ع}}$

فإن : $\overleftarrow{\text{ج}}_1$ − $\overleftarrow{\text{ج}}_2$ = ...

(أ) $\overleftarrow{٠}$　　(ب) −٤٠ $\overleftarrow{\text{ع}}$　　(جـ) ٢٠ $\overleftarrow{\text{ع}}$　　(د) ٤٠ $\overleftarrow{\text{ع}}$

(٢) إذا تكافأ ازدواجين فإن : ....

(أ) معيار جميع القوى المكونة للازدواجين يكون متساوٍ.

(ب) ذراع الازدواج الأول = ذراع الازدواج الثانى.

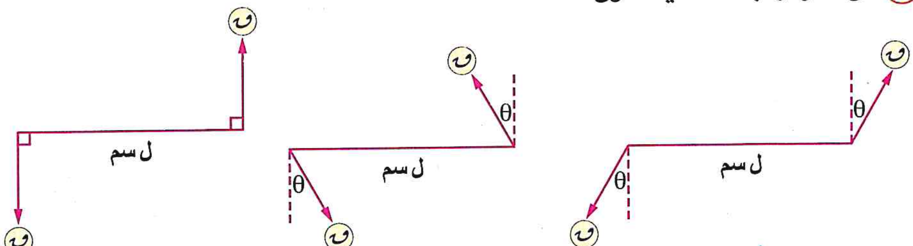
(جـ) مجموع القياسات الجبرية لعزوم الازدواجين = صفر

(د) القياسات الجبرية لعزوم الازدواجين متساوية.

(٣) ازدواج مكون من قوتين قيمة كل منهما ١٢ نيوتن والمسافة العمودية بينهما ٨ سم يكافئ الازدواج الناشئ من قوتين المسافة العمودية بينهما ٦ سم ومقدار أى من القوتين = ... نيوتن.

(أ) ٨　　(ب) ١٦　　(جـ) ١٢　　(د) ٤

(٤) أى الازدواجات الآتية تكون متكافئة ؟

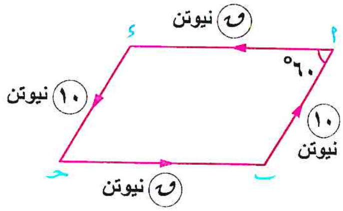


شكل (١)　　شكل (٢)　　شكل (٣)

(أ) الشكلان (١) ، (٢)　　(ب) الشكلان (٢) ، (٣)

(جـ) الشكلان (١) ، (٣)　　(د) جميع الأشكال.

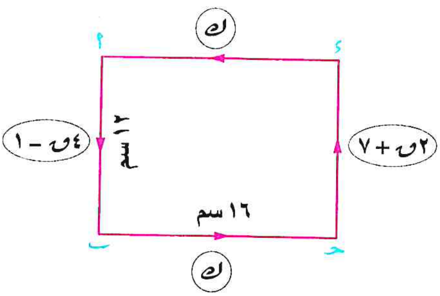
⑤ (دور أول ٢٠٢٥) **في الشكل المرسوم :**



أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه ق (∠ أ) = ٦٠° ،
أ ب = ١٢ سم ، أ د = ٢٤ سم فإذا كانت القوتان
اللتان مقداراهما ق ، ق نيوتن تكونان ازدواجًا
يكافئ الازدواج المكون من القوتين اللتين مقداراهما
١٠ ، ١٠ نيوتن ، فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (جـ) ٢٠ (د) ٢٤

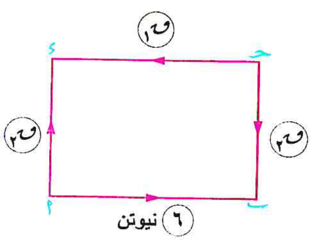
⑥ (استرشادي ٢٠٢٥) **في الشكل المقابل :**



أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ١٢ سم ،
ب جـ = ١٦ سم ، أثرت القوى التي
مقاديرها (٤ ق − ١) ، ك ، (٢ ق + ٧) ، ك
المقاسة بوحدة النيوتن في أ ب ،
ب جـ ، جـ د ، د أ على الترتيب ،
فإذا كونت المجموعة ازدواجان متكافئان ، فإن ك = ... نيوتن.

(أ) $٥\frac{١}{٣}$ (ب) $١١\frac{١}{٤}$ (جـ) ١٥ (د) ٢٠

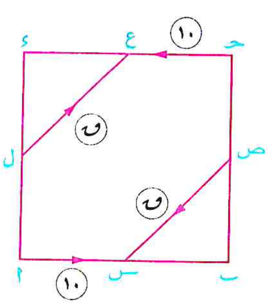
⑦ **في الشكل المقابل :**



أ ب جـ د مستطيل فيه : أ ب = ١٢ سم
، ب جـ = ٨ سم أثرت القوى المبينة مقاديرها
واتجاهاتها بالرسم فكونت ازدواجين متوازنين
فإن : $ق_١ - ق_٢$ = ... نيوتن.

(أ) −٤ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ٤

⑧ **في الشكل المقابل :**

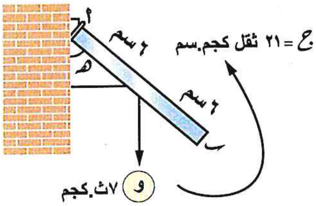


س ، ص ، ع ، ل منتصفات أضلاع المربع
أ ب جـ د أثرت القوى المبين مقاديرها
واتجاهاتها فاتزنت
فإن : ق = ... ثقل جرام.

(أ) $٥\sqrt{٢}$ (ب) ١٠

(جـ) $١٠\sqrt{٢}$ (د) ٢٠

⑨ **في الشكل المقابل :**



$\overline{\text{أب}}$ قضيب منتظم وزنه ٧ ثقل كجم يتصل طرفه أ بمفصل في حائط رأسي اتزن بتأثير ازدواج عزمه ٢١ ثقل كجم.سم فإن :

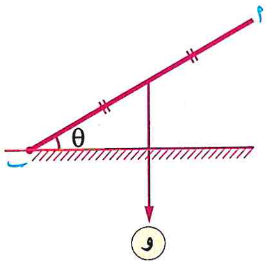
أولاً : ر = ... ثقل كجم.

(أ) ٣ (ب) ٧ (جـ) ١٢ (د) ٢١

ثانيًا : هـ = ...

(أ) °١٥ (ب) °٣٠ (جـ) °٤٥ (د) °٦٠

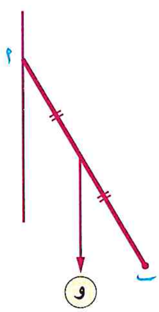
⑩ (دورثان ٢٠٢٤) **في الشكل المقابل :**



$\overline{\text{أب}}$ قضيب منتظم وزنه (و) نيوتن يتصل طرفه ب بمفصل مثبت في أرض أفقية ملساء واتزن القضيب بتأثير ازدواج جعل القضيب يميل على الأفقي بزاوية قياسها θ ، فإذا كان مقدار رد فعل المفصل هو ١٠ نيوتن ، فإن وزن القضيب (و) = ... نيوتن.

(أ) $١٠\sqrt{٣}$ (ب) ١٠ (جـ) $٥\sqrt{٣}$ (د) ٥

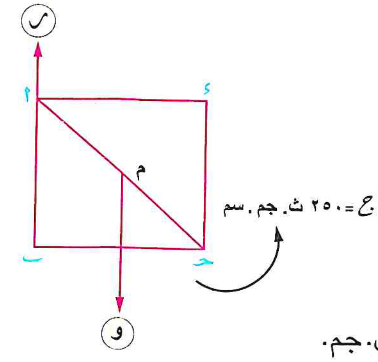
⑪ (استرشادي ٢٠٢٥) **في الشكل المقابل :**



$\overline{\text{أب}}$ قضيب منتظم وزنه (و) ث.جم وطوله ٨٠ سم يمكنه الدوران بسهولة في مستوى رأسي حول مفصل مثبت عند طرفه أ ، أثر على القضيب ازدواج في مستوى رأسي معيار عزمه ٦٤٠ ث.جم. سم ، فاتزن القضيب في وضع يميل على الرأسي بزاوية قياسها °٣٠ ، فإن مقدار قوة رد فعل المفصل عند أ تساوي .... ث.جم.

(أ) ١٦ (ب) ٣٢ (جـ) ٦٤ (د) ٧٢

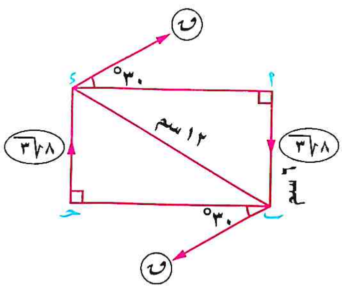
(١٢) أ ب جـ د صفيحة رقيقة مربعة منتظمة تدور في مستوى رأسي حول مسمار في ثقب عند أ وطول ضلعها ٥٠ سم اتزنت بحيث كان الضلع $\overline{\text{أ ب}}$ منطبق على الرأسي بتأثير ازدواج معيار عزمه ٢٥٠ ثقل.جم.سم ، اتجاهه عمودي على مستوى الصفيحة فإن : و = ر = ... ثقل.جم.



(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) ٢٥

(١٣) (دور أول ٢٠٢١) في الشكل المقابل :

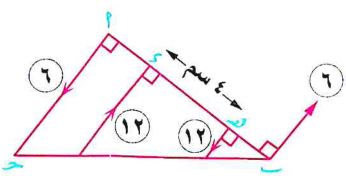
أ ب جـ د مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم ، ب د = ١٢ سم. أثرت القوى الموضحة بالشكل. فإذا كان الازدواج الناتج من القوتين ٨ $\sqrt{3}$ ، ٨ $\sqrt{3}$ ث.جم يكافئ الازدواج الناتج من القوتين ق ، ق ث.جم فإن مقدار ق = ... ث.جم.



(أ) ٨ (ب) ٤ $\sqrt{3}$ (جـ) ٤ (د) ٨ $\sqrt{3}$

(١٤) (دور أول ٢٠٢٤) في الشكل المقابل :

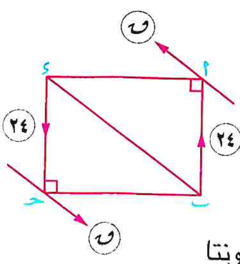
إذا كانت القوى متزنة ومقاسة بوحدة النيوتن فإن : أ ب = ... سم



(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٦

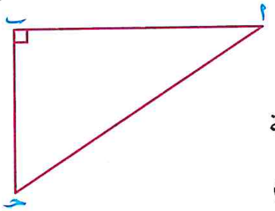
(١٥) (دور ثان ٢٠٢١) في الشكل المقابل :

أ ب جـ د مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم ، أثرت القوتان اللتان مقداراهما ق ، ق نيوتن في أ ، جـ وتوازيان $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ كما في الشكل فكونتا ازدواجًا ، كما أثرت القوتان اللتان مقداراهما ٢٤ ، ٢٤ نيوتن في $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{د جـ}}$ فكونتا ازدواجًا يكافئ الازدواج الأول فإن مقدار ق = ... نيوتن.



(أ) ١٤,٤ (ب) ٢٠ (جـ) ٢٥ (د) ١٩,٢

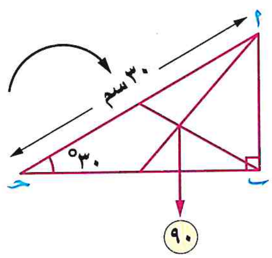
(١٦) (دور أول ٢٠٢١) في الشكل المقابل :



صفيحة رقيقة منتظمة السُمك والكثافة على هيئة مثلث قائم الزاوية فى ب ، وزنها ٣٠ ث.كجم يؤثر فى نقطة تقاطع متوسطات المثلث ، أب = ٩ سم ، ب حـ = ٦ سم علقت الصفيحة من ثقب صغير بالقرب من الرأس ب بواسطة مسمار ، وأثر عليها ازدواج فى مستواها جعلها تتزن فى وضع يجعل $\overline{أب}$ أفقيًا ، فإن القياس الجبرى لعزم الازدواج = ... ث.كجم.سم.

(أ) ١٣٥ (ب) −٩٠ (جـ) −١٣٥ (د) ٩٠

(١٧) (استرشادى ٢٠٢٥) في الشكل المقابل :



صفيحة رقيقة منتظمة السُمك والكثافة على شكل مثلث قائم الزاوية فى ب حيث ق (∠ حـ) = °٣٠ ، أحـ = ٣٠ سم ووزنها ٩٠ ث.جم. علقت الصفيحة من ثقب بالقرب من الرأس أ بواسطة مسمار وأثر عليها ازدواج فى مستواها جعلها تتزن فى وضع يجعل $\overline{ب حـ}$ أفقيًا ، فإن القياس الجبرى لعزم الازدواج = ... ث.جم.سم.

(أ) ٤٥٠ $\sqrt{٣}$ (ب) −٤٥٠ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٢٠ $\sqrt{٣}$ (د) −١٢٠ $\sqrt{٣}$

(١٨) إذا كانت القوتان $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ تكونان ازدواج القياس الجبرى لعزمه ٣٠ وحدة عزم والقوتان $\overrightarrow{ق_٢}$ ، $\overrightarrow{ق_٣}$ تكونان ازدواج القياس الجبرى لعزمه −٤٠ وحدة عزم فإن القوتان $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٣}$ ....

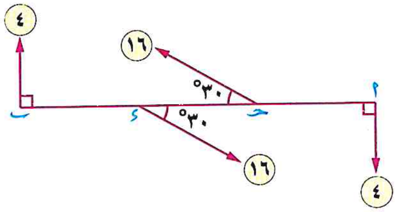
(أ) تكونان ازدواج القياس الجبرى لعزمه ١٠ وحدة عزم.

(ب) تكونان ازدواج القياس الجبرى لعزمه −١٠ وحدة عزم.

(جـ) متوازيتان وفى نفس الاتجاه.

(د) متزنتان.

(١٩) (دور أول ٢٠٢٥) في الشكل المرسوم :

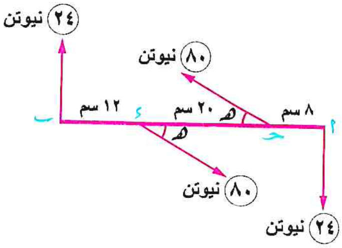


$\overline{أب}$ قضيب مهمل الوزن طوله ١٢٠ سم ، متزن أفقيًا تحت تأثير القوى المبينة والمقدرة بالنيوتن.

فإن : حـ ء = ... سم.

(أ) ٣٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٥٠ (د) ٦٠

(٢٠) في الشكل المقابل :



إذا كان $\overline{\text{أب}}$ قضيب متزن

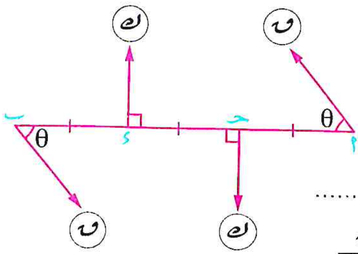
تحت تأثير مجموعة القوى المبينة

فإن : حا هـ = ...

(أ) $\frac{٥}{٦}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$

(جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{١}{٢}$

(٢١) (دور ثان ٢٠٢٢) في الشكل المقابل :



أحـ = حـ ء = ء ب ، القوتان ق ، ق نيوتن

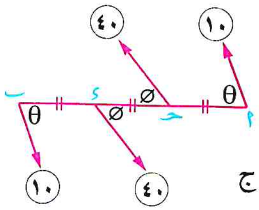
تكونان ازدواجًا ، فإذا اتزن مع الازدواج المكون

من القوتين ك ، ك نيوتن ، فإن : حا θ = ...

(أ) $\frac{\text{ك}}{\text{ق}}$ (ب) $\frac{\text{ق}}{٣\,\text{ك}}$

(جـ) $\frac{\text{ك}}{٣\,\text{ق}}$ (د) $\frac{\text{ق}}{\text{ك}}$

(٢٢) (دور أول ٢٠٢٢) في الشكل المقابل :



أ ، ب ، حـ ، ء أربع نقاط على استقامة واحدة

، أحـ = حـ ء = ء ب ، القوتان اللتان

مقداراهما ١٠ ، ١٠ نيوتن تكوّنان ازدواجًا يكافئ الازدواج

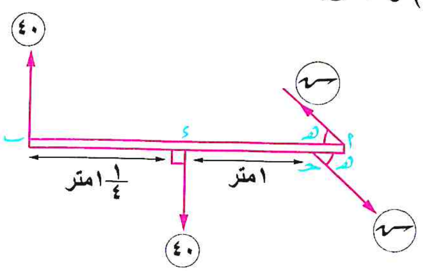
الناتج عن القوتين اللتين مقداراهما ٤٠ ، ٤٠ نيوتن

، فإذا كانت حا θ = $\frac{٣}{٥}$ ، فإن : ....

(أ) $\theta = \varnothing$ (ب) $\theta + \varnothing = ٦٠°$

(جـ) $\theta + \varnothing = ١٢٠°$ (د) $\theta + \varnothing = ٩٠°$

(٢٣) (دور أول ٢٠٢٣) في الشكل المقابل :



إذا كان $\overline{\text{أب}}$ قضيب مهمل الوزن ومتزن

تحت تأثير الازدواجين (٤٠ ، ٤٠) ث.كجم

، (ش ، ش) ث.كجم ،

حيث طا هـ = $\frac{٤}{٣}$ ، أحـ = $\frac{١}{٤}$ متر.

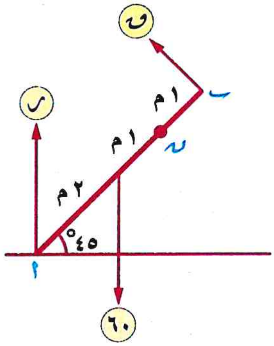
فإن مقدار ش = ... ث.كجم.

(أ) ٥٠ (ب) ١٢٥ (جـ) ٢٥٠ (د) ١٠٠

(٢٤) (دور ثان ٢٠٢٣) في الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٤ أمتار ووزنه ٦٠ نيوتن يرتكز بطرفه أ على سطح أفقى أملس ، ويمكنه الدوران فى مستوى رأسى حول مسمار أفقى ثابت يمر بثقب صغير فى القضيب عند نقطة ىٰ $\in \overline{أب}$ ، إذا شد من طرفه ب بالقوة $\overleftarrow{ق} \perp \overline{أب}$ الموضحة بالشكل حتى أصبح القضيب متزنًا عندما كان الوزن ورد الفعل عند أ يكونان ازدواجًا.

فإن مقدار ق = ... نيوتن.

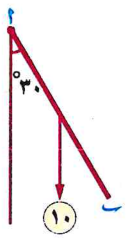


(أ) ١٢٠ $\sqrt{٢}$ (ب) ٦٠ (جـ) ٦٠ $\sqrt{٢}$ (د) ١٢٠

(٢٥) (تجريبي ٢٠٢١) في الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٢ متر ووزنه ١٠ ث.كجم يؤثر عند منتصفه ، علق من طرفه أ فى مفصل مثبت فى حائط رأسى ، أثر فيه ازدواج عمودى على المستوى الرأسى المار بالقضيب معيار عزمه = ١٠ ث.كجم.متر. فاتزن فى وضع يميل على الرأسى بزاوية ٣٠°

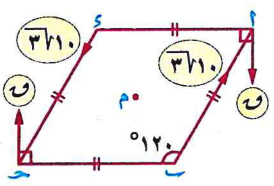
عندما عُلق فى طرفه (ب) كتلة مقدارها = ... كجم.



(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٥ $\sqrt{٣}$ (د) ١٠ $\sqrt{٣}$

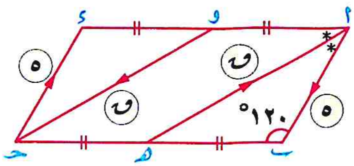
(٢٦) (تجريبي ٢٠٢١) في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء صفيحة رقيقة منتظمة على هيئة معين فيه ق (∠ب) = ١٢٠° ، علقت الصفيحة فى مسمار من ثقب صغير عند مركزها م وأثرت القوتان ١٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن ، ١٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن فى $\overrightarrow{ب أ}$ ، $\overrightarrow{ء حـ}$ كما أثرت قوتان مقداراهما ق نيوتن ، ق نيوتن عند أ ، حـ ، وعموديتان على $\overline{أ ء}$ ، $\overline{ب حـ}$ على هو موضح بالشكل فاتزنت الصفيحة ، فإن مقدار ق = ... نيوتن.



(أ) ٥ (ب) ٥ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٠ $\sqrt{٣}$ (د) ١٠

(٢٧) (دور أول ٢٠٢٣) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، $\overleftarrow{\text{أهـ}}$ ينصف زاوية أ

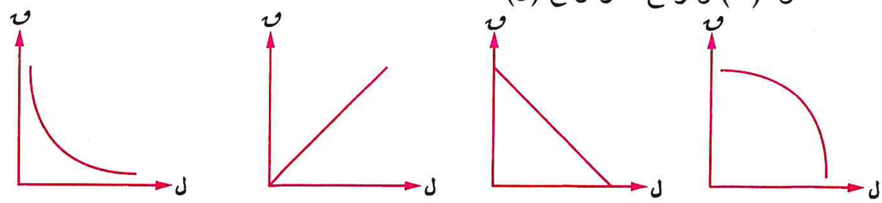
، قوتان مقداراهما (٥) ث.جم ، (٥) ث.جم

تكونان ازدواجًا يتزن مع الازدواج المكون من قوتين مقداراهما (ق) ث.جم

، (ق) ث.جم. فإن : ق = ... ث.جم.

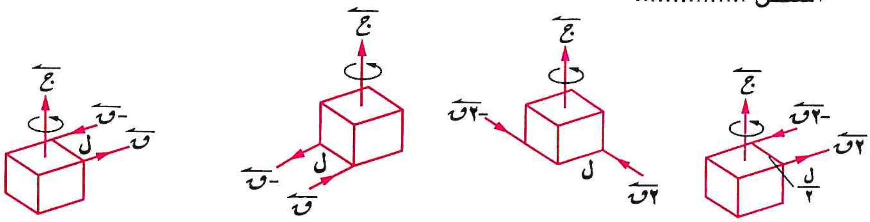
(أ) ١٠ (ب) ١٠ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٢٠ (د) ٢٠ $\sqrt{٣}$

(٢٨) ازدواج معيار عزمه ٦٠ وحدة عزم فأى الأشكال الآتية توضح العلاقة بين مقدار القوة (ق) وذراع الازدواج (ل) ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

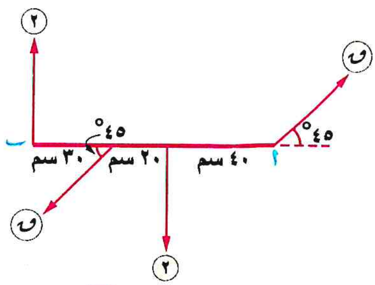
(٢٩) القوى فى كل شكل من الأشكال الآتية تعطى ازدواجات متكافئة ما عدا الشكل ....



(أ) (ب) (جـ) (د)

---

(١٢) أثر ازدواجان مستويان فى قضيب أ ب مهمل الوزن طوله ٩٠ سم ، وكان الازدواج الأول يتكون من قوتين مقداراهما ق ، ق ث.كجم والثانى من قوتين مقداراهما ٢ ، ٢ ث.كجم وتؤثر عند النقط وفى الاتجاهات الموضحة فى الشكل المقابل.

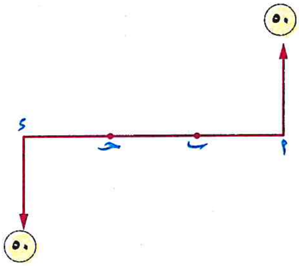


عيِّن قيمة ق التى تجعل الجسم يتزن تحت تأثير الازدواجين. «$\frac{٥\sqrt{٢}}{٣}$ ث.كجم»

١٣ **فى الشكل المقابل :**

أب = ب حـ = حـ ء = ٦ سم

، قوتان مقداراهما ٥٠ ، ٥٠ ثقل جرام تؤثران فى أ ، ء فى اتجاه عمودى على $\overline{\text{أء}}$ أوجد قوتين متساويتين تكونان ازدواجًا مكافئًا للازدواج المكوَّن من القوتين المعلومتين بحيث :



(١) تكونان عموديتين على $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ تؤثران فى ب ، حـ

(٢) تصنع كل منهما زاوية قياسها ٦٠° مع $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ وتؤثران فى ب ، حـ

«١٥٠ ، ١٥٠ ، ١٠٠ $\sqrt{3}$ ، ١٠٠ $\sqrt{3}$ ث.جم»

---

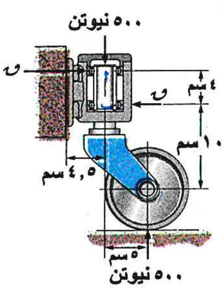
١٤ $\overline{\text{أب}}$ قضيب مهمل الوزن طوله ١,٥ متر تؤثر عند نقطتى تثليثه قوتان مقدار كل منهما ٢٠٠ نيوتن فى اتجاهين متضادين وعموديًا على القضيب. رفعت القوتان وأثرت بدلًا منهما قوتان أخريان مقدار كل منهما ١٢٠ نيوتن عند طرفى القضيب بحيث تكونان ازدواجًا يكافئ الازدواج الأول. فما هو قياس زاوية ميل خط عمل كل من القوتين الجديدتين على القضيب ؟

«٣٣° ٤٥َ»

---

١٥ الشكل المقابل يمثل عجلة كرسى تؤثر فيها القوى الموضحة بالشكل فإذا كانت العجلة متزنة.

أوجد قيمة : ق



«٦٢٥ نيوتن»

---

١٦ أب حـ ء هـ و سداسى منتظم أثرت القوى التى مقاديرها ٣ ، ٩ ، ق، ، ٣ ، ٩ ، ق، ث.جم فى الاتجاهات $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء هـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{هـ و}}$ ، $\overleftarrow{\text{أو}}$ على الترتيب.

أوجد قيمة كل من ق، ، ق، لكى تتزن المجموعة.

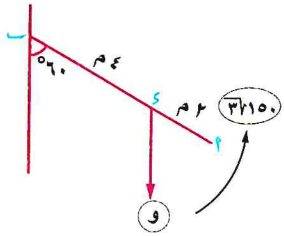
«١٢ نيوتن»

---

١٧ أب حـ ء مستطيل فيه : أب = ٨ سم ، ب حـ = ٦ سم ، س ، ص ، ع ، ل منتصفات الأضلاع $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$ ، $\overline{\text{أء}}$ على الترتيب ، أثرت القوى التى مقاديرها ق ، ق ، ق ، ق ، ٦ ، ٦ نيوتن فى الاتجاهات $\overleftarrow{\text{أس}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ع}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ل ع}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{أل}}$ على الترتيب إذا اتزنت مجموعة القوى أوجد قيمة : ق

«٤٠ نيوتن»

١٨ (دور ثان ٢٠٢٤) في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ ب}}$ ساق غير منتظمة طولها ٦ متر ووزنها (و) نيوتن يؤثر في نقطة ء ، إذا عُلقت الساق في مسمار رفيع من ثقب صغير بالقرب من طرفها ب بحيث كان مستواها رأسيًا ، وأثر على الساق في نفس مستواها ازدواج معيار عزمه ١٥٠ √٣ نيوتن.متر ،

فأوجد مقدار رد فعل المسمار في وضع الاتزان. «٧٥ نيوتن»

---

١٩ قضيب خفيف طوله ٣٠ سم مُعلّق أفقيًا من مسمار في منتصفه ، أثرت قوتان معيار كلٍ منهما ١٠ √٣ ثقل جرام في طرفيه إحداهما رأسية إلى أعلى والأخرى رأسية إلى أسفل ، كما شد القضيب من إحدى نقطه (حـ) بخيط يميل عليه بزاوية قياسها ٦٠° وكان الشد في الخيط مقداره ٥٠ ثقل جرام. أوجد مقدار واتجاه ونقطة تأثير قوة رابعة إذا أثرت على القضيب حفظته في حالة اتزان وهو أفقي. «٥٠ ثقل جم وتؤثر في ء بحيث : حـ ء = ١٢ سم»

---

٢٠ $\overline{\text{أ ب}}$ قضيب منتظم طوله ٤٠ سم ووزنه ٣٠٠ ثقل جرام يؤثر في منتصفه ويمكنه الدوران بسهولة في مستوٍ رأسي حول مسمار أفقي يمر بثقب في القضيب عند حـ حيث : أ حـ = ١٥ سم ، أثرت على القضيب عند أ قوة قدرها ٣٠٠ ثقل جرام رأسيًا إلى أعلى. أوجد مقدار القوة التي إذا أثرت على القضيب عند ب في اتجاه عمودي على $\overline{\text{أ ب}}$ تجعله يتزن بحيث يكون القضيب مائلاً على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° وتكون أ أعلى من ب وكم يكون مقدار رد فعل المسمار حينئذٍ ؟ «١٢٠ √٣ ثقل جم ، ١٢٠ √٣ ثقل جم عند حـ عموديًا على القضيب لأسفل»

---

٢١ $\overline{\text{أ ب}}$ قضيب منتظم طوله ٢٠ سم يدور حول مسمار في ثقب صغير عند نقطة حـ ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ حيث : أ حـ = ٥ سم فاتزن القضيب في وضع أفقي بتأثير قوتين مقدار كلٍ منهما ٥٠ نيوتن تؤثران عند طرفيه أ ، ب في اتجاهين متضادين وتصنعان مع القضيب زاوية قياسها ٣٠°

أوجد وزن القضيب ومقدار رد فعل المسمار. «١٠٠ ، ١٠٠ نيوتن»

---

٢٢ (دور أول ٢٠١٨) $\overline{\text{أ ب}}$ قضيب طوله ٥٠ سم ووزنه ٢٠ نيوتن يؤثر في منتصفه ، يمكنه الدوران بسهولة في مستوى رأسي حول مفصل مثبت عند طرفه أ أثر على القضيب ازدواج في مستوى رأسي معيار عزمه ٢٥٠ نيوتن.سم. أوجد رد فعل المفصل وزاوية ميل القضيب على الرأسي في وضع التوازن. «٢٠ نيوتن لأعلى ، ٣٠° أ، ١٥٠°»

٢٣ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٤٠ سم يتحرك فى مستوٍ رأسى حول مفصل مُثبت عند أ ، أثر على القضيب فى نفس مستويه ازدواج معيار عزمه $\frac{٣\sqrt{٣}}{٥}$ ثقل كجم. متر فدار القضيب حتى اتزن فى وضع يميل فيه على الرأسى بزاوية قياسها ٦٠°

أوجد كلاً من وزن القضيب ورد فعل المفصل. «٦ ، ٦ ثقل كجم»

---

٢٤ $\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه ٥ نيوتن يتحرك فى مستوٍ رأسى حول مفصل ثابت عند طرفه أ ، أثر على القضيب فى نفس مستويه ازدواج معيار عزمه ٥٠ نيوتن. سم فاتزن القضيب فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠°

أوجد طول القضيب وكذلك رد فعل المفصل فى وضع الاتزان. «٤٠ سم ، ٥ نيوتن رأسيًا لأعلى»

---

٢٥ $\overline{أب}$ قضيب طوله ٦٠ سم ووزنه ١٨ نيوتن يؤثر عند منتصفه. يمكن للقضيب الدوران بسهولة فى مستوٍ رأسى حول مسمار أفقى ثابت يمر بثقب صغير فى القضيب عند النقطة حـ التى تبعد ١٥ سم عن أ فإذا استند القضيب بطرفه ب على نضد أفقى أملس وشد الطرف أ أفقيًا بحبل حتى أصبح رد فعل النضد مساويًا لوزن القضيب. أوجد الشد فى الحبل ورد فعل المسمار علمًا بأن القضيب يتزن فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° «$١٢\sqrt{٣}$ ، $١٢\sqrt{٣}$ نيوتن»

---

٢٦ $\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه ٧٥ نيوتن وطوله ٨٠ سم يدور بسهولة حول مسمار أفقى ثابت يمر بثقب صغير فى القضيب عند نقطة حـ على القضيب حيث : ب حـ = ٢٠ سم فإذا استند القضيب بطرفه أ على سطح أفقى أملس. فأوجد مقدار واتجاه رد فعل كلٍ من السطح الأفقى والمسمار على القضيب ، إذا شد الطرف ب بحبل حتى أصبح رد فعل المستوى يساوى وزن القضيب وكان القضيب يميل على الأفقى بزاوية ٣٠°

فأوجد الشد فى الحبل ومقدار واتجاه رد فعل المسمار إذا كان الحبل :

(١) أفقيًا. (٢) رأسيًا. (٣) عموديًا على القضيب.

---

٢٧ أ ب حـ صفيحة على شكل مثلث متساوى الأضلاع ارتفاعه ١٨ سم ووزنها ٣٠٠ جرام ويؤثر عند نقطة تلاقى متوسطات المثلث ، والصفيحة مثقوبة ثقبًا صغيرًا بالقرب من الرأس أ ومعلقة من هذا الثقب فى مسمار أفقى بحيث يكون مستواها رأسيًا أثر على الصفيحة ازدواج معيار عزمه ١٨٠٠ ثقل جرام. سم فى مستويها. أوجد قياس زاوية ميل $\overline{أب}$ على الأفقى فى وضع التوازن. «٣٠° أ ، ٩٠°»

٢٨ أب‌حـ صفيحة على شكل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٢٤ سم ووزنها ٥٠٠ ثقل جرام ويؤثر عند نقطة تلاقى متوسطات المثلث والصفيحة مُعلّقة فى مستوٍ رأسى من ثقب صغير بالقرب من أ فإذا أثر على الصفيحة وفى مستويها ازدواج فاتزنت عندما كان الحرف $\overline{أب}$ أفقيًا فأوجد معيار عزم هذا الازدواج. «٦٠٠٠ ثقل جم.سم»

---

٢٩ أب‌حـ صفيحة على شكل مثلث متساوى الساقين فيه : أب = أحـ = ١٣ سم ، ب‌حـ = ١٠ سم تدور بسهولة فى مستوٍ رأسى حول مفصل مُثبت عند أ فإذا أثر على الصفيحة وفى مستويها ازدواج معيار عزمه ٨٠٠ ثقل جرام. سم فاتزنت فى وضع كان فيه أحد الساقين رأسيًا. فأوجد وزن الصفيحة علمًا بأنه يؤثر فى نقطة تلاقى متوسطات المثلث. «٢٦٠ ثقل جرام»

---

٣٠ أب‌حـ صفيحة على شكل مثلث قائم الزاوية فى ب ، أب = ٩ سم ، ب‌حـ = ١٢ سم ووزنها ٢٠٠ ثقل جم يؤثر فى نقطة تقاطع متوسطات المثلث ، عُلقت من الرأس أ بحيث كان مستواها رأسيًا ، أوجد معيار عزم الازدواج الذى إذا أثر عليها فى مستويها يجعل الحرف $\overline{أب}$ رأسيًا. أوجد كذلك معيار عزم الازدواج الذى يجعل $\overline{أب}$ أفقيًا. وإذا عُلقت الصفيحة من الرأس حـ فكم يكون القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى يجعل $\overline{ب‌حـ}$ رأسيًا ؟ «٨٠٠ ، ١٢٠٠ ، ٦٠٠ ثقل جم.سم»

---

٣١ (١٩٩٣) صفيحة على شكل مربع أب‌حـ‌ء طول ضلعه ٨٠ سم ، وزنها ٢٥٠ ثقل جرام يؤثر فى نقطه تلاقى القطرين. عُلقت الصفيحة من مسمار فى ثقب صغير بالقرب من الرأس أ بحيث كان مستويها رأسيًا وأثر عليها ازدواج فى مستويها فاتزنت فى وضع يميل فيه $\overline{أحـ}$ على الرأسى بزاوية قياسها °٣٠ عيِّن معيار عزم الازدواج. «$٥٠٠٠\sqrt{٢}$ ثقل جرام.سم»

---

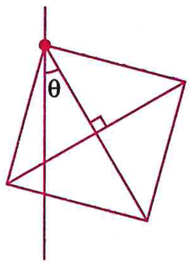
٣٢ أب‌حـ‌ء صفيحة رقيقة على هيئة مربع طول ضلعه ٢٠ سم ووزنها ١٥٠ نيوتن ويؤثر فى نقطة تلاقى القطرين. عُلِقت الصفيحة على مسمار أفقى رفيع من ثقب صغير بالقرب من الرأس ء فاتزنت فى مستوٍ رأسى. أوجد الضغط على المسمار وإذا أثر على الصفيحة ازدواج اتجاهه عموديًا على مستويها فاتزنت فى وضع فيه $\overline{أء}$ أفقى.

أوجد معيار عزم الازدواج. «١٥٠ نيوتن ، ١٥٠٠ نيوتن.سم»

٣٣ (دور أول ٢٠١٧) أ ب حـ ء صفيحة رقيقة على هيئة مستطيل فيه : أ ب = ١٨ سم ، ب حـ = ٢٤ سم ووزنها ٢٠ نيوتن ويؤثر في نقطة تلاقي القطرين. علقت الصفيحة في مسمار أفقي رفيع من ثقب صغير بالقرب من الرأس ء بحيث كان مستواها رأسيًا. فإذا أثر على الصفيحة ازدواج معيار عزمه يساوي ١٥٠ نيوتن.سم واتجاهه عمودي على مستوى الصفيحة فأوجد زاوية ميل $\overline{\text{ء ب}}$ على الرأسي في وضع الاتزان. «٣٠° أ، ١٥٠°»

---

٣٤ (استرشادى ٢٠٢٥) في الشكل المقابل :



صفيحة رقيقة على شكل مربع طول ضلعه ٤٠ $\sqrt{٢}$ سم ، ووزنها ٥٠٠ ث.جرام يؤثر عند نقطة تلاقي قطري المربع ، عُلقت الصفيحة من ثقب صغير بالقرب من أحد رؤوسها في مسمار أفقي بحيث كان مستواها رأسيًا. أثر على الصفيحة في مستواها ازدواج معيار عزمه ٣٠٠٠ ث.جم.سم ، **أوجد :** جا θ.

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٣٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

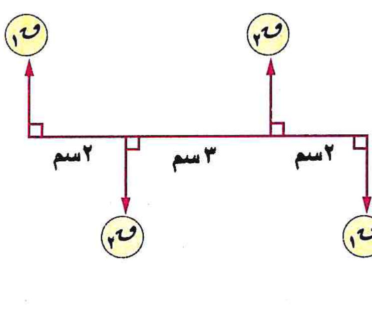
(١) إذا كونت القوتان $\overrightarrow{ق_{١}}$ = أ $\overrightarrow{س}$ + ب $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_{٢}}$ = (١٣ نيوتن ، هـ°) ازدواجًا حيث جا هـ = $\frac{٥}{١٣}$ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٧ أ، ١٧ (ب) ٧ أ، −١٧ (جـ) −٧ أ، ١٧ (د) −٧ أ، −١٧

(٢) ازدواج معيار عزمه (ع$_{١}$) فإذا تضاعف معيار كل من قوتيه ونقصت المسافة العمودية بينهما بمقدار النصف كان معيار عزم الازدواج الجديد (ع$_{٢}$) فإن : ....

(أ) ع$_{١}$ = ع$_{٢}$ (ب) ع$_{١}$ = ٢ ع$_{٢}$ (جـ) ع$_{٢}$ = ٢ ع$_{١}$ (د) ع$_{١}$ = ٤ ع$_{٢}$

(٣) في الشكل المقابل :



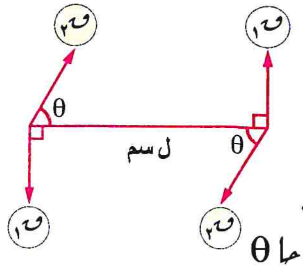
إذا كانت المجموعة متزنة فإن : ....

(أ) ق$_{١}$ > ق$_{٢}$

(ب) ق$_{١}$ < ق$_{٢}$

(جـ) ق$_{١}$ = ق$_{٢}$

(د) $\frac{ق_{١}}{ق_{٢}} = \frac{٣}{٢}$



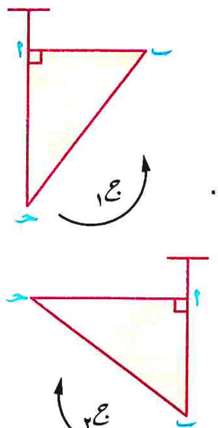
④ في الشكل المقابل :

إذا كانت المجموعة متزنة

فإن : .... (حيث θ زاوية حادة)

(أ) ق١ > ق٢ (ب) ق١ < ق٢

(جـ) ق١ = ق٢ (د) ق٢ = ق١ جا θ



⑤ في الشكل المقابل :

أ ب جـ صفيحة رقيقة منتظمة السمك والكثافة

على شكل مثلث قائم الزاوية في أ ، فيه أ ب = ٩ سم

، أ جـ = ١٢ سم ، وزنها «و» يؤثر عند نقطة تلاقي المتوسطات.

علقت الصفيحة في مسمار رفيع من ثقب صغير

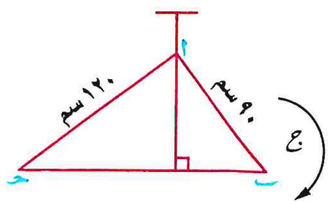
بالقرب من الرأس أ ، إذا أثر على الصفيحة ازدواج

معيار عزمه ع١ اتزنت بحيث كان $\overline{\text{أ ب}}$ أفقيًا

، وإذا أثر عليها ازدواج معيار عزمه ع٢ اتزنت

بحيث كان : $\overline{\text{أ جـ}}$ أفقيًا فإن : ع١ : ع٢ = ...

(أ) ٢ : ٣ (ب) ٣ : ٤ (جـ) ٣ : ٥ (د) ٤ : ٥



⑥ في الشكل المقابل :

أ ب جـ صفيحة رقيقة منتظمة السمك والكثافة

على شكل مثلث قائم الزاوية في أ

وفيه أ ب = ٩٠ سم ، أ جـ = ١٢٠ سم وزنها ٥٠ نيوتن

يؤثر عند نقطة تلاقي المتوسطات ، علقت الصفيحة من مسمار رفيع من ثقب صغير بالقرب من الرأس أ بحيث كان مستواها رأسي ، أثر عليها ازدواج معيار عزمه ع فجعل $\overline{\text{ب جـ}}$ أفقيًا في وضع الاتزان فإن : ع = ... نيوتن.سم.

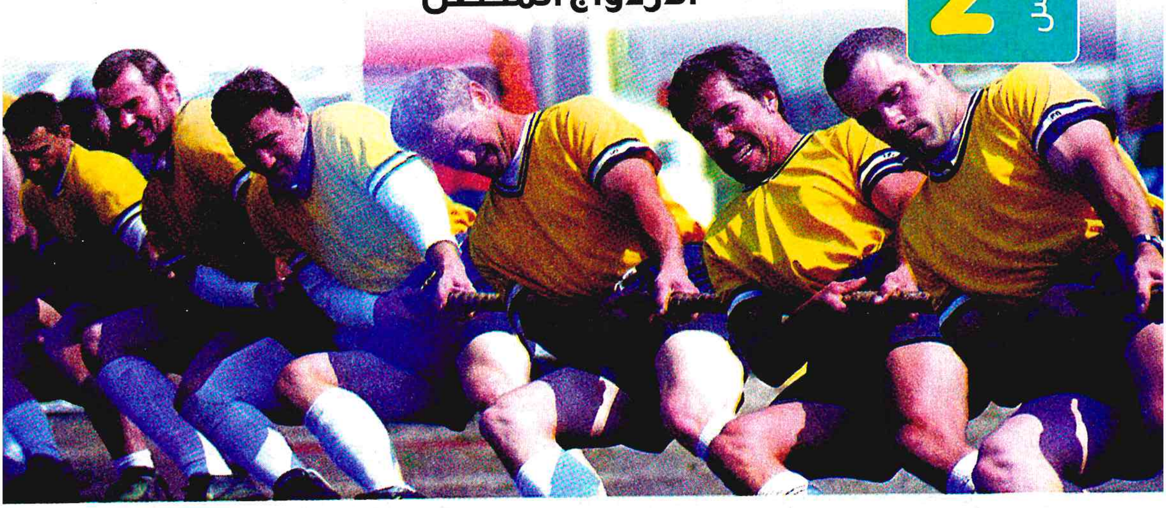
(أ) ٤٥٠ (ب) ٦٠٠ (جـ) ٧٠٠ (د) ٧٥٠

---

٣٦ $\overline{\text{أ ب}}$ قضيب منتظم وزنه (و) ثقل كجم يمكنه الدوران بسهولة في مستوٍ رأسي حول مسمار أفقي ثابت يمر بثقب صغير في القضيب عند نقطة تبعد عن ب بمقدار $\frac{1}{6}$ طول القضيب. فإذا استند القضيب بطرفه أ على نضد أفقي أملس وشد الطرف ب أفقيًا بحبل حتى أصبح رد فعل النضد مساويًا وزن القضيب فأثبت أن الشد في الحبل يساوي ٣ و ظتا هـ ثقل كجم حيث هـ قياس زاوية ميل القضيب على النضد.

الدرس 2

الازدواج المحصل



تعريف مجموع ازدواجين مستويين

مجموع ازدواجين مستويين هو ازدواج واحد يسمى «الازدواج المحصل» عزمه يساوى مجموع عزمى هذين الازدواجين.

أى أن: إذا كانت القوتان $\overleftarrow{ق_{١}}$ ، $-\overleftarrow{ق_{١}}$ تكونان ازدواجًا عزمه $\overleftarrow{ج_{١}}$ ، القوتان $\overleftarrow{ق_{٢}}$ ، $-\overleftarrow{ق_{٢}}$ تكونان ازدواجًا عزمه $\overleftarrow{ج_{٢}}$ فإن: $\overleftarrow{ج}$ (عزم الازدواج المحصل) $= \overleftarrow{ج_{١}} + \overleftarrow{ج_{٢}}$

ويكون القياس الجبرى لعزم مجموع ازدواجين مستويين = مجموع القياسين الجبريين لعزميهما

أى أن: $ج = ج_{١} + ج_{٢}$

تعميم

مجموع أى عدد محدود من الازدواجات المستوية هو ازدواج عزمه يساوى مجموع عزوم هذه الازدواجات.

أى أن: $\overleftarrow{ج} = \overleftarrow{ج_{١}} + \overleftarrow{ج_{٢}} + \dots + \overleftarrow{ج_{ه}}$

ويكون القياس الجبرى لعزم مجموع عدة ازدواجات مستوية = مجموع القياسات الجبرية لعزومها.

أى أن: $ج = ج_{١} + ج_{٢} + \dots + ج_{ه}$

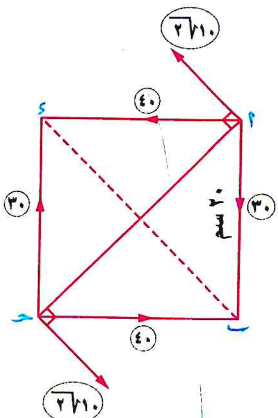
ملاحظة

- الازدواج $\overleftarrow{ج}$ يسمى الازدواج المحصل كما يُقال إننا اختزلنا مجموعة الازدواجات إلى ازدواج واحد محصل.
- إذا كان ج (القياس الجبرى لعزم مجموع عدة ازدواجات مستوية) = صفرًا فيُقال حينئذٍ لمجموعة الازدواجات إنها متوازنة.

مثال ١

أبحـء مربع طول ضلعه ٢٠ سم. أثرت قوى مقاديرها ٣٠ ، ٤٠ ، ٣٠ ، ٤٠ نيوتن فى $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـب}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـء}}$ ، $\overleftarrow{\text{أء}}$ على الترتيب. كما أثرت فى أ ، حـ قوتان مقدار كل منهما ١٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن فى اتجاهى $\overleftarrow{\text{بء}}$ ، $\overleftarrow{\text{ءب}}$ على الترتيب. أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل.

الحـــل



∵ طول ضلع المربع أبحـء = ٢٠ سم

∴ طول قطره = ٢٠ $\sqrt{٢}$ سم

، ∵ القوتين اللتين مقداراهما (٣٠ ، ٣٠) نيوتن

تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه ج$_{١}$

∴ ج$_{١}$ = −٣٠ × بحـ = −٣٠ × ٢٠ = −٦٠٠ نيوتن.سم

، ∵ القوتين اللتين مقداراهما (٤٠ ، ٤٠) نيوتن

تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه ج$_{٢}$

∴ ج$_{٢}$ = ٤٠ × أب = ٤٠ × ٢٠ = ٨٠٠ نيوتن.سم

، ∵ القوتين اللتين مقداراهما (١٠ $\sqrt{٢}$ ، ١٠ $\sqrt{٢}$) نيوتن

تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه ج$_{٣}$:

∴ ج$_{٣}$ = ١٠ $\sqrt{٢}$ × أحـ = ١٠ $\sqrt{٢}$ × ٢٠ $\sqrt{٢}$ = ٤٠٠ نيوتن.سم

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه ج :

، ج = ج$_{١}$ + ج$_{٢}$ + ج$_{٣}$ = −٦٠٠ + ٨٠٠ + ٤٠٠ = ٦٠٠ نيوتن.سم.

مثال ٢

أ ب ح ء متوازى أضلاع فيه : $\text{أ ب} = ٨$ سم ، $\text{ب ح} = ١٠$ سم ، $\text{ق}(\angle \text{أ ب ح}) = ١٢٠^\circ$

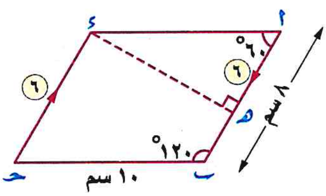
أثرت قوتان مقدار كلٍ منهما ٦ ثقل كجم فى $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ح ء}}$ كما أثر ازدواج متجه عزمه عمودى على المستوى أ ب ح ء ومعيار عزمه $٢٠\sqrt{٣}$ ثقل كجم.سم

فأوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل إذا كان :

(١) اتجاه متجه عزم الازدواج المعطى فى نفس اتجاه متجه عزم الازدواج المكون من القوتين ٦ ، ٦ ثقل كجم.

(٢) اتجاه متجه عزم الازدواج المعطى فى اتجاه مضاد لاتجاه متجه عزم الازدواج المكون من القوتين ٦ ، ٦ ثقل كجم.

الحل



نرسم $\overline{\text{ء هـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ فيكون :

$\text{ء هـ} = \text{أ ء} \,\text{جا}\, \text{أ} = ١٠ \,\text{جا}\, ٦٠^\circ = ٥\sqrt{٣}$ سم

∴ $\text{ج}_١$ (القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون من القوتين ٦ ، ٦ ثقل كجم) $= -٦ \times ٥\sqrt{٣} = -٣٠\sqrt{٣}$ ثقل كجم .سم

(١) إذا كان متجه عزم الازدواج المعطى فى نفس اتجاه متجه عزم الازدواج $\overleftarrow{\text{ج}_١}$

كان $\text{ج}_٢$ (القياس الجبرى لعزم الازدواج المعطى) $= -٢٠\sqrt{٣}$ ثقل كجم .سم

∴ ج (القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل) $= \text{ج}_١ + \text{ج}_٢ = -٣٠\sqrt{٣} - ٢٠\sqrt{٣}$

$= -٥٠\sqrt{٣}$ ثقل كجم .سم.

(٢) إذا كان متجه عزم الازدواج المعطى فى اتجاه مضاد لعزم الازدواج $\overleftarrow{\text{ج}_١}$

كان $\text{ج}_٢$ (القياس الجبرى لعزم الازدواج المعطى) $= ٢٠\sqrt{٣}$

∴ $\text{ج}_٢$ (القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل) $= \text{ج}_١ + \text{ج}_٢ = -٣٠\sqrt{٣} + ٢٠\sqrt{٣}$

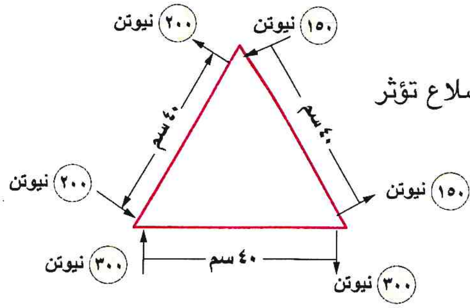
$= -١٠\sqrt{٣}$ ثقل كجم .سم.

مثال ٣

الشكل المقابل :

يمثل صفيحة منتظمة على شكل مثلث متساوى الأضلاع تؤثر عليها القوى عموديًا على الأضلاع كما بالشكل.

أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل.



الحـــل

∵ القوتين اللتين مقداراهما (٣٠٠ ، ٣٠٠) نيوتن تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه $ج_١$

∴ $ج_١$ = − ٣٠٠ × ٤٠ = − ١٢٠٠٠ نيوتن.سم

، القوتين اللتين مقداراهما (١٥٠ ، ١٥٠) نيوتن تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه $ج_٢$

∴ $ج_٢$ = ١٥٠ × ٤٠ = ٦٠٠٠ نيوتن.سم

، القوتين اللتين مقداراهما (٢٠٠ ، ٢٠٠) نيوتن تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه $ج_٣$

∴ $ج_٣$ = ٢٠٠ × ٤٠ = ٨٠٠٠ نيوتن.سم

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه ج حيث :

ج = $ج_١$ + $ج_٢$ + $ج_٣$ = − ١٢٠٠٠ + ٦٠٠٠ + ٨٠٠٠ = ٢٠٠٠ نيوتن.سم

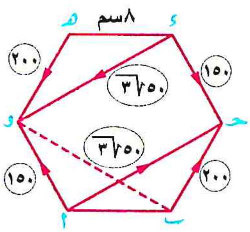
مثال ٤

أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم طول ضلعه ٨ سم أثرت قوى مقاديرها ٢٠٠ ، ١٥٠ ، ٥٠ $\sqrt{٣}$ ، ٢٠٠ ، ١٥٠ ثقل جرام فى $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{ء حـ}$ ، $\overleftarrow{أ حـ}$ ، $\overleftarrow{ء و}$ ، $\overleftarrow{هـ و}$ ، $\overleftarrow{أ و}$ على الترتيب ٥٠ $\sqrt{٣}$ ، ٢٠٠ ، ١٥٠

أوجد : (١) القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى يكافئ المجموعة.

(٢) مقدار واتجاه قوتين تعملان فى $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{ء هـ}$ لتصبح المجموعة متزنة.

الحـــل



∵ طول ضلع السداسى (ل) = ٨ سم

∴ أ حـ = ب و = ل $\sqrt{٣}$ = ٨ $\sqrt{٣}$

$ج_١$ (القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى قوتاه ٢٠٠ ، ٢٠٠ ثقل جرام)

= ٢٠٠ × ٨ $\sqrt{٣}$ = ١٦٠٠ $\sqrt{٣}$ ثقل جم.سم

، $ج_٢$ (القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى قوتاه ١٥٠ ، ١٥٠ ثقل جرام)

$= -١٥٠ \times ٨ \sqrt{٣} = -١٢٠٠ \sqrt{٣}$ ثقل جم.سم

، $ج_٣$ (القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى قوتاه ٥٠ $\sqrt{٣}$ ، ٥٠ $\sqrt{٣}$ ثقل جرام)

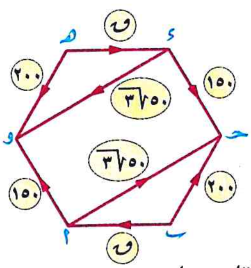
$= ٥٠\sqrt{٣} \times ل = ٥٠\sqrt{٣} \times ٨ = ٤٠٠\sqrt{٣}$ ثقل جم.سم

(١) ج (القياس الجبرى لمجموع عزوم الازدواجات) = $ج_١ + ج_٢ + ج_٣$

$= ١٦٠٠\sqrt{٣} - ١٢٠٠\sqrt{٣} + ٤٠٠\sqrt{٣} = ٨٠٠\sqrt{٣}$ ثقل جم.سم

∴ القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى يكافئ المجموعة = ٨٠٠ $\sqrt{٣}$ ثقل جم.سم.

(٢) لكى تتزن المجموعة يجب أن تكون القوتان اللتان تعملان فى $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ءهـ}$ ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه يساوى $-٨٠٠\sqrt{٣}$ ثقل جم.سم



∴ يجب أن تؤثر إحدى القوتين فى اتجاه $\overleftarrow{بأ}$ والأخرى فى اتجاه $\overleftarrow{هـء}$ (كما فى الشكل) وبفرض أن مقدار كلٍ من القوتين ق ثقل جرام

∴ القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون من القوتين الذى مقداراهما (ق ، ق) = $-٨\sqrt{٣}$ ق

∴ $-٨\sqrt{٣}$ ق $= -٨٠٠\sqrt{٣}$ ∴ ق = ١٠٠ ثقل جرام.

نظام القوى المستوية الذى يكافئ ازدواجًا

يقال لعدة قوى مستوية $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، ... ، $\overleftarrow{ق_ن}$ إنها تكافئ ازدواجًا إذا تحقق الشرطان الآتيان معًا :

(١) انعدام محصلة القوى (أو مجموع المركبات الجبرية للقوى فى أى اتجاه = صفر).

(٢) مجموع عزوم القوى حول أى نقطة لا ينعدم.

- وفى هذه الحالة يكون عزم الازدواج هو مجموع عزوم هذه القوى حول أى نقطة.

ملاحظة

إذا كانت محصلة عدة قوى = صفر فإن القوى إما متزنة أو تكافئ ازدواجًا وبالتالى يكون :

- إذا كان $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{٠}$ ، $\overleftarrow{ج} = \overleftarrow{٠}$ فإن القوى متزنة.
- إذا كان $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{٠}$ ، $\overleftarrow{ج} \neq \overleftarrow{٠}$ فإن القوى تكافئ ازدواج.

مثال ٥

تؤثر القوى $\overrightarrow{ق_١} = ٤ \overrightarrow{س} + ٢ \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = ٢ \overrightarrow{س} - ٣ \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٣} = -٦ \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$

فى النقط أ = (٢ ، ٣) ، ب = (-٢ ، ٣) ، حـ = (٤ ، -٦) على الترتيب.

أثبت أن هذه القوى تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

الحل

$\because \overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢} + \overrightarrow{ق_٣} = (٤ + ٢ - ٦) \overrightarrow{س} + (٢ - ٣ + ١) \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{٠}$

$\therefore$ إما أن تكون مجموعة القوى متزنة

أو تكافئ ازدواجًا

لاحظ أنه

يمكننا أخذ العزم حول أى نقطة اختيارية أخرى ولتكن أ أو ب ونجد أن :

$ج_{أ} = ج_{ب} = ج_{حـ} = -٤٠$

، $\because \overrightarrow{ج_{حـ}} = \overrightarrow{حـ أ} \times \overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{حـ ب} \times \overrightarrow{ق_٢}$

حيث : $\overrightarrow{حـ أ} = (٢ \overrightarrow{س} + ٣ \overrightarrow{ص}) - (٤ \overrightarrow{س} - ٦ \overrightarrow{ص})$

$= -٢ \overrightarrow{س} + ٩ \overrightarrow{ص}$

، $\overrightarrow{حـ ب} = (-٢ \overrightarrow{س} + ٣ \overrightarrow{ص}) - (٤ \overrightarrow{س} - ٦ \overrightarrow{ص}) = -٦ \overrightarrow{س} + ٩ \overrightarrow{ص}$

$\therefore \overrightarrow{ج_{حـ}} = (-٢ \overrightarrow{س} + ٩ \overrightarrow{ص}) \times (٤ \overrightarrow{س} + ٢ \overrightarrow{ص})$

$+ (-٦ \overrightarrow{س} + ٩ \overrightarrow{ص}) \times (٢ \overrightarrow{س} - ٣ \overrightarrow{ص})$

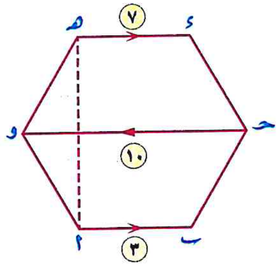
$= (-٤ - ٣٦) \overrightarrow{ع} + (١٨ - ١٨) \overrightarrow{ع} = -٤٠ \overrightarrow{ع}$ (لا يساوى $\overrightarrow{٠}$)

$\therefore$ القوى تكافئ ازدواجًا معيار عزمه = ٤٠ وحدة عزم.

مثال ٦

أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم طول ضلعه ١٢ سم أثرت قوى مقاديرها ٣ ، ٧ ، ١٠ ثقل جرام فى $\overrightarrow{أ ب}$ ، $\overrightarrow{هـ ء}$ ، $\overrightarrow{حـ و}$ على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه ثم أوجد مقدار كلٍ من القوتين اللتين تؤثران عند حـ ، و عموديتين على $\overline{حـ و}$ لكى تتزن المجموعة.

الحــل



∵ طول الضلع (ل) = ١٢ سم

∴ أ ﻫ = ل $\sqrt{3}$ = ١٢ $\sqrt{3}$

، حـ و = ٢ ل = ٢٤ سم

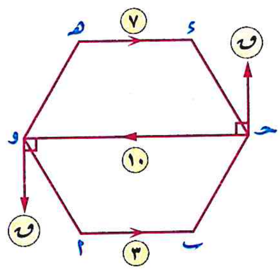
وبفرض أن $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$

∴ $\overleftarrow{ح}$ (محصلة القوى) = ٣ $\overleftarrow{ى}$ + ٧ $\overleftarrow{ى}$ − ١٠ $\overleftarrow{ى}$ = $\overleftarrow{٠}$

، ∵ $ح_و$ = ٣ × $\frac{1}{2}$ أ ﻫ − ٧ × $\frac{1}{2}$ أ ﻫ = ٣ × ٦ $\sqrt{3}$ − ٧ × ٦ $\sqrt{3}$ = − ٢٤ $\sqrt{3}$

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه = ٢٤ $\sqrt{3}$ ثقل.جم.سم

، ∵ المجموعة تكافئ ازدواجًا



∴ لكى تتزن المجموعة لابد من وجود ازدواج آخر قياسه الجبرى = ٢٤ $\sqrt{3}$ ثقل جم.سم

∴ القوتان المؤثرتان عند حـ ، و عموديتان على $\overline{حـ و}$ هما ق

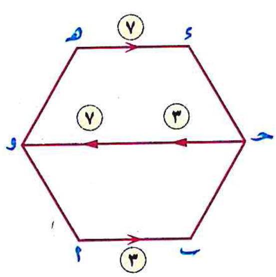
، ق حيث ق × ٢٤ = ٢٤ $\sqrt{3}$

∴ ق = $\sqrt{3}$ ثقل جم

∴ مقدار كلٍ من القوتين اللتين تؤثران عند حـ ، و عموديتين على $\overline{حـ و}$ لكى تتزن المجموعة هما $\sqrt{3}$ ثقل جم ، $\sqrt{3}$ ثقل جم.

حل آخر :

* نحلل القوة ١٠ ثقل جرام المؤثرة فى $\overleftarrow{حـ و}$ إلى قوتين ٧ ثقل جم ، ٣ ثقل جم فى اتجاه $\overleftarrow{حـ و}$



فتكون القوتان ٧ ثقل جم فى $\overleftarrow{ﻫ ء}$ ، ٧ ثقل جم فى $\overleftarrow{حـ و}$ تكافئان ازدواجًا قياسه الجبرى = −٧ × ٦ $\sqrt{3}$ = −٤٢ $\sqrt{3}$ ثقل جم.سم

، القوتان ٣ ثقل جم فى $\overleftarrow{أب}$ ، ٣ ثقل جم فى $\overleftarrow{حـ و}$

تكافئان ازدواجًا قياسه الجبرى

= ٣ × ٦ $\sqrt{3}$ = ١٨ $\sqrt{3}$ ثقل جم.سم

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا واحدًا قياسه الجبرى = −٤٢ $\sqrt{3}$ + ١٨ $\sqrt{3}$ = −٢٤ $\sqrt{3}$ ثقل جم.سم.

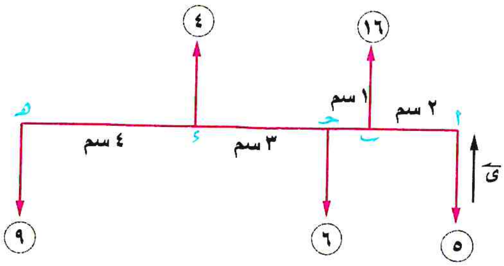
مثال ٧

أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ خمس نقط على مستقيم أفقى واحد حيث :

أب = ٢ سم ، ب حـ = ١ سم ، حـ ء = ٣ سم ، ء هـ = ٤ سم. أثرت فى أ ، حـ ، هـ قوى مقاديرها ٥ ، ٦ ، ٩ ثقل جم رأسيًا إلى أسفل ، كما أثرت فى ب ، ء قوتان مقداراهما ١٦ ، ٤ ثقل جرام رأسيًا إلى أعلى.

أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد عزمه.

الحل



بفرض أن $\overline{ى}$ متجه وحدة فى الاتجاه الرأسى إلى أعلى

∴ $\overline{ح}$ = ١٦ $\overline{ى}$ + ٤ $\overline{ى}$ − ٥ $\overline{ى}$ − ٦ $\overline{ى}$ − ٩ $\overline{ى}$

∴ $\overline{ح}$ = $\overline{٠}$ (١)

، القياس الجبرى لمجموع عزوم القوى حول أ (ج)

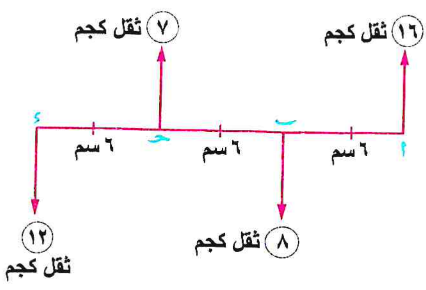
= ٦ × ٣ + ٩ × ١٠ − ١٦ × ٢ − ٤ × ٦

= ١٨ + ٩٠ − ٣٢ − ٢٤ = ١٠٨ − ٥٦ = ٥٢ ثقل جم.سم

∴ ج = ٥٢ ثقل جم.سم (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن مجموعة القوى تكافئ ازدواجًا معيار عزمه ٥٢ ثقل جم.سم ويعمل على الدوران فى اتجاه عكس اتجاه دوران عقارب الساعة.

مثال ٨



فى الشكل المقابل :

أب = ب حـ = حـ ء = ٦ سم

أوجد قوة $\overline{ق}$ بحيث تؤول القوى الخمس إلى ازدواج القياس الجبرى لعزمه ١٦٢ ثقل كجم. سم.

الحل

نفرض أن ى متجه وحدة قوة فى الاتجاه الرأسى إلى أعلى

، ∵ مجموعة القوى الخمس تكافئ ازدواج ∴ ح = ٠

∴ ١٦ ى + ٧ ى − ٨ ى − ١٢ ى + ق = ٠ ∴ ٣ ى + ق = ٠ ∴ ق = −٣ ى

∴ ق مقدارها ٣ ثقل كجم واتجاهها رأسى إلى أسفل

، ∵ القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى يكافئ المجموعة = ١٦٢ ثقل كجم.سم

∴ جـ$_{\text{أ}}$ = ١٦٢ ∴ ١٦ × ٠ + ٨ × ٦ + ١٢ × ١٨ − ٧ × ١٢ + جـ$_{\text{ق}}$ = ١٦٢

حيث جـ$_{\text{ق}}$ هو القياس الجبرى لعزم القوى ق بالنسبة للنقطة أ

∴ جـ$_{\text{ق}}$ = ١٦٢ − ٤٨ − ٢١٦ + ٨٤ ∴ جـ$_{\text{ق}}$ = −١٨ ثقل كجم. سم

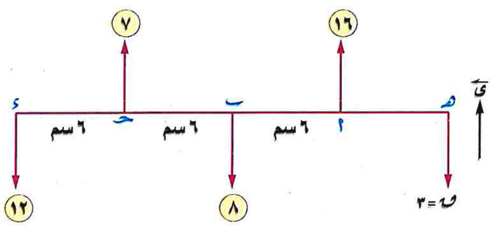
، ∵ القياس الجبرى لعزم القوة ق بالنسبة للنقطة أ سالب ، واتجاه ق إلى أسفل

∴ خط عمل ق يقطع ءأ فى

نقطة هـ (مثلًا) حيث هـ ∉ ءأ

∴ −٣ × أهـ = −١٨

∴ أهـ = ٦ سم.

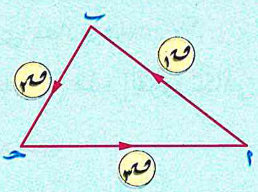


قاعدة هامة

إذا أثرت ثلاث قوى مستوية وغير متلاقية فى نقطة فى جسم متماسك ومثلها تمثيلاً تامًا أضلاع مثلث مأخوذة فى ترتيب دورى واحد كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه يساوى ضعف مساحة سطح المثلث × م حيث م ثابت يساوى $\frac{\text{مقدار القوة}}{\text{طول الضلع الممثل لها}}$

أى أن : إذا كانت ق١ ، ق٢ ، ق٣ ثلاث قوى يمثلها

تمثيلاً تامًا أضلاع المثلث أ ب حـ

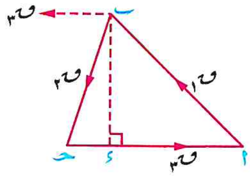


وكان : $\frac{\text{ق١}}{\text{أب}} = \frac{\text{ق٢}}{\text{بحـ}} = \frac{\text{ق٣}}{\text{حـأ}}$ = م حيث م مقدار ثابت

ومأخوذة فى اتجاه دورى واحد أب ، بحـ ، حـأ على الترتيب

فإن مجموعة القوى ق١ ، ق٢ ، ق٣ تكافئ ازدواجًا معيار عزمه

= ٢ × مساحة سطح Δ أ ب حـ × م



البرهان : (لا يمتحن فيه الطالب)

نفرض أن : $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب ح}}$ ، $\overrightarrow{\text{ح أ}}$ تمثل تمثيلاً تامًا القوى $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ على الترتيب بمقياس رسم :

كل ١ وحدة طول تمثل م وحدة من وحدات مقادير القوى

$\because \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب ح}} + \overrightarrow{\text{ح أ}} = \overrightarrow{0}$ $\quad\therefore \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} + \overrightarrow{ق_3} = \overrightarrow{0}$

$\therefore \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} = - \overrightarrow{ق_3}$

أى أن : محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ هى قوة تساوى $\left(-\overrightarrow{ق_3}\right)$

لكننا نعلم أن خط عمل محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة يمر بنفس هذه النقطة

$\therefore$ خط عمل القوة $\left(-\overrightarrow{ق_3}\right)$ وهى محصلة $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ يمر بالنقطة ب

$\therefore$ القوى الثلاث $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ اختزلت إلى قوتين متوازيتين $\overrightarrow{ق_3}$ وتعمل فى $\overleftrightarrow{\text{ح أ}}$ $\left(-\overrightarrow{ق_3}\right)$ وتعمل عند ب

$\therefore$ مجموعة القوى الثلاث تكافئ ازدواج

ويكون معيار عزم الازدواج = $\|\overrightarrow{ق_3}\|$. ب ء حيث (ب ء البُعد العمودى بين خطى عمل قوتى الازدواج) ولكن $\|\overrightarrow{ق_3}\|$ = أ ح × م

$\therefore$ معيار عزم الازدواج = أ ح × م × ب ء = (أ ح × ب ء) × م

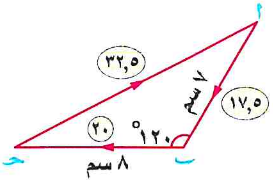
= ضعف مساحة سطح Δ أ ب ح × م

(وهو المطلوب)

مثال ٩

أ ب ح مثلث فيه : أ ب = ٧ سم ، ب ح = ٨ سم ، ق (∠ أ ب ح) = ١٢٠° أثرت قوى مقاديرها ١٧,٥ ، ٢٠ ، ٣٢,٥ نيوتن فى $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب ح}}$ ، $\overrightarrow{\text{ح أ}}$ على الترتيب. بيِّن أن مجموعة هذه القوى تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

الحل



نحسب طول $\overline{\text{أ ح}}$ حيث من دراستنا لحساب المثلثات نعلم أن :

$ب^2 = ح^2 + أ^2 - ٢ \, ح \, أ \, جتا \, ب = ٤٩ + ٦٤ - ٢ \times ٧ \times ٨ \times -\frac{١}{٢}$

(حيث : جتا ١٢٠° = $-\frac{١}{٢}$)

∴ ب^{٢} = ١٦٩ ∴ ب = أ حـ = ١٣ سم

∵ $\frac{١٧,٥}{٧} = \frac{٥}{٢}$ ، $\frac{٢٠}{٨} = \frac{٥}{٢}$ ، $\frac{٣٢,٥}{١٣} = \frac{٥}{٢}$

∴ القوى الثلاثة ممثلة تمثيلاً تامًا بأضلاع المثلث أ ب حـ فى اتجاه دورى واحد

∴ مجموعة القوى تكافئ ازدواجًا معيار عزمه = ضعف مساحة سطح Δ أ ب حـ × م

، ∵ مساحة سطح Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ أ حـ × أ ب جا ب = $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ٧ جا ١٢٠° = ١٤ $\sqrt{٣}$

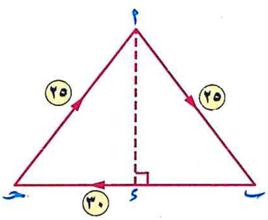
∴ مجموعة القوى تكافئ ازدواج معيار عزمه = ٢ × ١٤ $\sqrt{٣}$ × $\frac{٥}{٢}$ = ٧٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن.سم.

مثال ١٠

ثلاث قوى مقاديرها ٢٥ ، ٣٠ ، ٢٥ نيوتن يمثلها تمثيلاً تامًا القطع المستقيمة الموجهة $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{حـ أ}$ على الترتيب من Δ أ ب حـ الذى فيه : ب حـ = ٤٥ سم

أوجد معيار عزم الازدواج الذى يكافئ القوى الثلاث.

الحـــل



∵ ب حـ يمثل ٣٠ نيوتن أى أن ٤٥ سم تمثل ٣٠ نيوتن

∴ م (عدد وحدات القوة التى تمثلها وحدة الطول)

= $\frac{٣٠}{٤٥} = \frac{٢}{٣}$ نيوتن/سم

∴ أ ب = أ حـ = ٢٥ ÷ $\frac{٢}{٣}$ = ٣٧,٥ سم

نرسم $\overline{أ ء} \perp \overline{ب حـ}$ فيكون ب ء = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = ٢٢,٥ سم ويكون :

أ ء = $\sqrt{(٣٧,٥)^{٢} - (٢٢,٥)^{٢}}$ = ٣٠ سم

∴ معيار عزم الازدواج = ضعف مساحة سطح Δ أ ب حـ × م

= ٢ × $\frac{ب حـ × أ ء}{٢}$ × م = ٤٥ × ٣٠ × $\frac{٢}{٣}$ = ٩٠٠ نيوتن.سم

حل آخر :

* عزم الازدواج = مجموع عزوم القوى حول أ = −٣٠ × أ ء = −٣٠ × ٣٠ = −٩٠٠ نيوتن.سم.

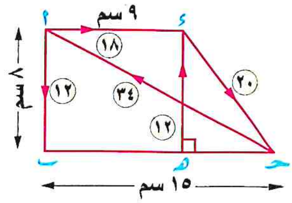
∴ معيار عزم الازدواج = ٩٠٠ نيوتن.سم.

مثال ١١

أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{أ ء} // \overline{ب حـ}$ ، $\overline{أ ب}$ عمودى عليهما ، هـ مسقط ء على $\overline{ب حـ}$ ، حـ ب = ١٥ سم ، ب أ = ٨ سم ، أ ء = ٩ سم أثرت قوى مقاديرها ١٢ ، ١٨ ، ٢٠ ، ١٢ ، ٣٤ نيوتن فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{أ ء}$ ، $\overleftarrow{ء حـ}$ ، $\overleftarrow{هـ ء}$ ، $\overleftarrow{حـ أ}$ على الترتيب.

أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد قياسه الجبرى.

الحــل



واضح أن ب هـ = ٩ سم

∴ هـ ح = ٦ سم   ∴ ء ح = $\sqrt{٦٤ + ٣٦}$ = ١٠ سم

، ح أ = $\sqrt{(٨)^{٢} + (١٥)^{٢}}$ = ١٧ سم

القوتان ١٢ في $\overleftarrow{هـ ء}$ ، ١٢ في $\overleftarrow{أ ب}$ تكونان ازدواجًا

والقياس الجبري لعزمه = ١٢ × ٩ = ١٠٨ نيوتن.سم. (١)

، القوى ١٨ ، ٢٠ ، ٣٤ نيوتن في ترتيب دوري واحد في Δ أ ء ح حيث :

$\frac{١٨}{٩} = \frac{٢٠}{١٠} = \frac{٣٤}{١٧} = ٢$

∴ هذه المجموعة تكون ازدواجًا القياس الجبري لعزمه = − ٢ مساحة Δ أ ء ح × ٢

ولكن مساحة سطح Δ أ ء ح = $\frac{١}{٢}$ × ٩ × ٨ = ٣٦

∴ القياس الجبري لعزم هذا الازدواج = − ٢ × ٣٦ × ٢ = −١٤٤ نيوتن.سم. (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا واحدًا قياسه الجبري = −١٤٤ + ١٠٨ = −٣٦ نيوتن.سم.

مثال ١٢

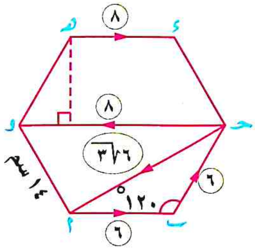
أ ب ح ء هـ و سداسي منتظم طول ضلعه ١٤ سم أثرت قوى مقاديرها ٦ ، ٦ ، ٨ ، ٦$\sqrt{٣}$ ، ٨ ثقل جرام في $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{ب ح}$ ، $\overleftarrow{ح و}$ ، $\overleftarrow{ح أ}$ ، $\overleftarrow{هـ ء}$ على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا واحسب معيار عزمه.

الحــل

القوتان ٨ ثقل جرام في $\overleftarrow{ح و}$ ، ٨ ثقل جرام في $\overleftarrow{هـ ء}$ تكونان ازدواجًا

القياس الجبري لعزمه = −٨ × ٧$\sqrt{٣}$ = −٥٦$\sqrt{٣}$ ثقل جم.سم (١)

، القوى ٦ ، ٦ ، ٦$\sqrt{٣}$ ثقل جرام تؤثر في أضلاع المثلث أ ب ح وفي ترتيب دوري واحد كما أن :



$\frac{٦}{١٤} = \frac{٦}{١٤} = \frac{٦\sqrt{٣}}{١٤\sqrt{٣}} = \frac{٣}{٧}$

∴ هذه المجموعة تكون ازدواج القياس الجبري لعزمه

= ٢ مساحة سطح Δ أ ب ح × $\frac{٣}{٧}$

، ∵ مساحة Δ أ ب ح = $\frac{١}{٢}$ × ١٤ × ١٤ جا ١٢٠° = ٤٩$\sqrt{٣}$

∴ القياس الجبرى لعزم هذا الازدواج = ٢ × ٤٩ $\sqrt{٣}$ × $\frac{٣}{٧}$

= ٤٢ $\sqrt{٣}$ ثقل جم .سم. (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ المجموعة كلها تكون ازدواجًا واحدًا القياس الجبرى لعزمه

= −٥٦ $\sqrt{٣}$ + ٤٢ $\sqrt{٣}$ = −١٤ $\sqrt{٣}$ ثقل جم .سم

∴ معيار عزم الازدواج = ١٤ $\sqrt{٣}$ ثقل جم.سم.

تعميم

إذا أثرت عدة قوى مستوية غير متلاقية فى جسم متماسك ومثلها تمثيلاً تامًا أضلاع مضلع مقفل مأخوذة فى ترتيب دورى واحد كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه يساوى ضعف مساحة سطح المضلع فى عدد وحدات القوة التى تمثلها وحدة الأطوال.

مثال ١٣

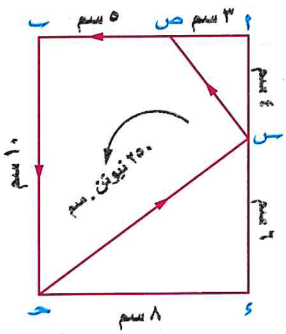
أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١٠ سم فإذا كانت : س ∈ $\overline{\text{أ ء}}$ حيث :

أ س = ٤ سم ، ص ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ حيث : أ ص = ٣ سم أثرت قوى ممثلة تمثيلاً تامًا بالمتجهات

$\overleftarrow{\text{س ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ س}}$ ، فإذا علم أن المجموعة تؤول إلى ازدواج عزمه

٢٥٠ نيوتن .سم فى الاتجاه أ ب حـ ء أوجد مقدار كلٍ من القوى المؤثرة.

الحل



∵ القوى المؤثرة ممثلة تمثيلاً تامًا بالمتجهات

$\overleftarrow{\text{س ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ س}}$ وفى ترتيب دورى واحد

∵ المجموعة تكافئ ازدواجًا عزمه ٢٥٠ نيوتن.سم

∴ يمكن حساب مقادير القوى من أطوال المضلع حـ س ص ب

، ∵ س ص = $\sqrt{١٦ + ٩}$ = ٥ سم ، ص ب = ٥ سم

، ب حـ = ١٠ سم (معطى) ، حـ س = $\sqrt{٣٦ + ٦٤}$ = ١٠ سم

∴ مقاديرالقوى على الترتيب هى ٥ ك ، ٥ ك ، ١٠ ك ، ١٠ ك حيث ك مقدار ثابت

، ∵ مساحة الشكل حـ س ص ب

= مساحة المستطيل − (مجموع مساحتى المثلثين أ س ص ، س ء حـ)

= ٨٠ − (٦ + ٢٤) = ٥٠ سم^{٢}

، ∵ معيار عزم الازدواج = ٢ مساحة الشكل حـ س ص ب × ك

∴ ٢٥٠ = ٢ × ٥٠ × ك ∴ ك = ٢,٥

∴ مقادير القوى هى : ١٢,٥ ، ١٢,٥ ، ٢٥ ، ٢٥ نيوتن على الترتيب.

قاعدة

إذا كان مجموع القياسات الجبرية لعزوم مجموعة من القوى المستوية بالنسبة لثلاث نقط فى مستواها ليست على استقامة واحدة يساوى مقدار ثابتًا (لا يساوى الصفر) كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه يساوى هذا المقدار الثابت.

أى أن : إذا كانت : أ ، ب ، حـ ثلاث نقط فى مستوى القوى وليست على استقامة واحدة وكان $ج_{أ}$ = $ج_{ب}$ = $ج_{حـ}$ = مقدار ثابت (لا يساوى الصفر) فإن مجموعة القوى تكافئ ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه يساوى هذا المقدار الثابت.

البرهان : **(لا يمتحن فيه الطالب)**

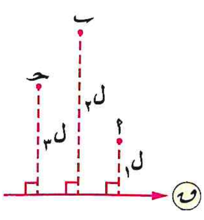
بفرض أن النقط الثلاث هى : أ ، ب ، حـ

، ∵ $ج_{أ}$ = $ج_{ب}$ = $ج_{حـ}$ = مقدار ثابت (لا يساوى الصفر)

∴ لا يمكن أن تكون مجموعة القوى متوازنة إذ أن مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى لا تنعدم

∴ مجموعة القوى إما انها تكافئ قوة أو تكافئ ازدواجًا

وبفرض أن المجموعة تكافئ قوة مقدارها ق وأن النقط الثلاث على أبعاد $ل_١$ ، $ل_٢$ ، $ل_٣$ من خط عمل هذه القوة على الترتيب.



∴ ق × $ل_١$ = ق × $ل_٢$ = ق × $ل_٣$ = مقدار ثابت

وبالقسمة على ق حيث ق ≠ ٠

∴ $ل_١$ = $ل_٢$ = $ل_٣$

أى أن : النقط أ ، ب ، حـ تقع على مستقيم واحد يوازى خط عمل $\overleftarrow{ق}$

وهذا يتنافى مع الفرض (حيث إن أ ، ب ، حـ ليست على استقامة واحدة)

∴ فرض أن مجموعة القوى تكافئ قوة لا يمكن أن يتحقق.

∴ مجموعة القوى تكافئ ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه يساوى المقدار الثابت.

* لاحظ أن : إذا كان المقدار الثابت يساوى صفرًا فإن مجموعة القوى تكون متزنة.

مثال ١٤

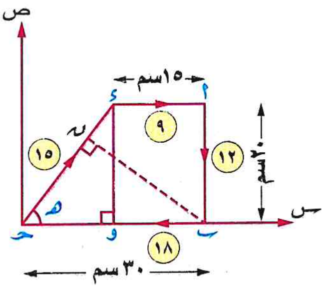
أ ب حـ ء شبه منحرف قائم الزاوية عند ب ، $\overline{\text{أء}} \,//\, \overline{\text{بحـ}}$ ، أ ب = ٢٠ سم

، ب حـ = ٣٠ سم ، أ ء = ١٥ سم أثرت قوى مقاديرها ١٢ ، ١٨ ، ١٥ ، ٩ نيوتن فى $\overleftarrow{\text{أب}}$

، $\overleftarrow{\text{بحـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـء}}$ ، $\overleftarrow{\text{ءأ}}$ على الترتيب.

أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا ، أوجد معيار عزمه.

الحــل



نرسم $\overline{\text{ءو}} \perp \overline{\text{بحـ}}$

∴ ب و = ١٥ سم ، و حـ = ٣٠ − ١٥ = ١٥ سم

∴ من Δ ء و حـ القائم الزاوية فى و يكون

ء حـ = $\sqrt{(٢٠)^٢ + (١٥)^٢}$ = ٢٥ سم

∴ حتا هـ = $\frac{١٥}{٢٥} = \frac{٣}{٥}$ ، حا هـ = $\frac{٢٠}{٢٥} = \frac{٤}{٥}$

بأخذ $\overleftarrow{\text{حـس}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـص}}$ اتجاهين متعامدين كما فى الرسم

وفرض أن $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ متجها وحدة القوة فى اتجاهى $\overleftarrow{\text{حـس}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـص}}$ وبفرض أن القوى

هى $\overleftarrow{\text{ق}}_١$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_٢$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_٣$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_٤$ ∴ $\overleftarrow{\text{ق}}_١$ = −١٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_٢$ = −١٨ $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_٤$ = ٩ $\overleftarrow{\text{س}}$

، $\overleftarrow{\text{ق}}_٣$ = (١٥ حتا هـ) $\overleftarrow{\text{س}}$ + (١٥ حا هـ) $\overleftarrow{\text{ص}}$ = ١٥ × $\frac{٣}{٥}$ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ١٥ × $\frac{٤}{٥}$ $\overleftarrow{\text{ص}}$

= ٩ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ١٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$

∴ $\overleftarrow{\text{ح}}$ = −١٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$ − ١٨ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٩ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ١٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$ + ٩ $\overleftarrow{\text{س}}$ = $\overleftarrow{٠}$

، $\text{ج}_{\text{حـ}}$ (القياس الجبرى لمجموع العزوم بالنسبة للنقطة حـ)

= −١٢ × ٣٠ − ٩ × ٢٠ = −٣٦٠ − ١٨٠ = −٥٤٠ نيوتن.سم

، ∵ $\overleftarrow{\text{ح}}$ = $\overleftarrow{٠}$ ، $\text{ج}_{\text{حـ}}$ = −٥٤٠ نيوتن.سم

∴ مجموعة القوى تكافئ ازدواجًا معيار عزمه ٥٤٠ نيوتن.سم ويعمل على الدوران فى اتجاه دوران عقارب الساعة.

حل آخر :

$ج_{حـ}$ = −٥٤٠ نيوتن.سم (من الحل السابق)

، $ج_{ء}$ = −١٢ × ١٥ − ١٨ × ٢٠ = −١٨٠ − ٣٦٠ = −٥٤٠ نيوتن.سم

، $ج_{ب}$ = −٩ × ٢٠ − ١٥ × ب ن = −١٨٠ − ١٥ × ب حـ جا هـ

= −١٨٠ − ١٥ × ٣٠ × $\frac{٤}{٥}$ = −١٨٠ − ٣٦٠ = −٥٤٠ نيوتن.سم

، ∵ $ج_{حـ}$ = $ج_{ء}$ = $ج_{ب}$ = −٥٤٠ نيوتن.سم والنقط ب ، حـ ، ء ليست على استقامة واحدة

∴ مجموعة القوى تكافئ ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه = −٥٤٠ نيوتن.سم

حل ثالث :

∵ القوى ١٢ ، ١٨ ، ١٥ ، ٩ نيوتن فى ترتيب دورى واحد

، ∵ $\frac{١٢}{٢٠}$ = $\frac{١٨}{٣٠}$ = $\frac{١٥}{٢٥}$ = $\frac{٩}{١٥}$ = $\frac{٣}{٥}$

∴ هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه = −٢ × مساحة شبه المنحرف × $\frac{٣}{٥}$

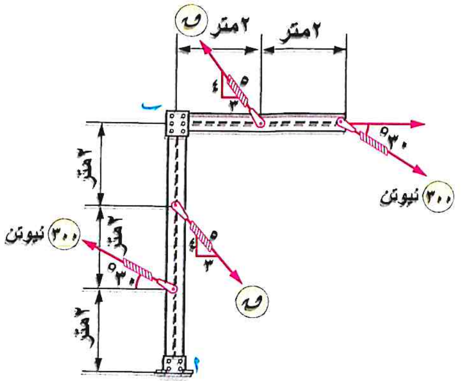
= −٢ × $\frac{٣٠ + ١٥}{٢}$ × ٢٠ × $\frac{٣}{٥}$

= −٥٤٠ نيوتن.سم

مثال ١٥

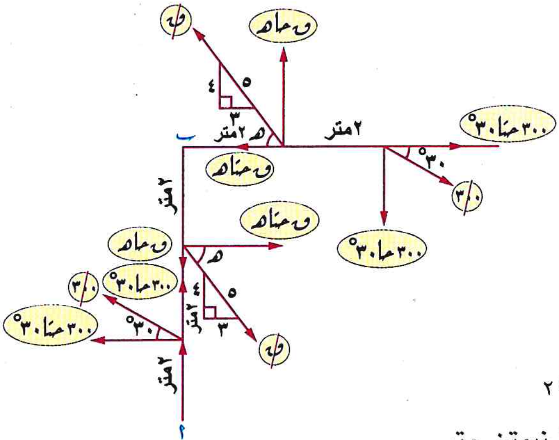
فى الشكل المقابل :

أوجد ق التى تجعل القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل يساوى ١٠٠ − ٦٠٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن.متر.



الحـــل

* بتحليل القوى إلى مركبات متعامدة فإن



القوتين (300 جتا $30°$ ، 300 جتا $30°$)

تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه $ج_1$

حيث $ج_1 = -300$ جتا $30° \times 4$

$= -600\sqrt{3}$ نيوتن. متر

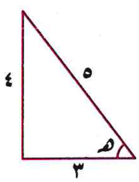
، القوتان (300 جا $30°$ ، 300 جا $30°$)

تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه $ج_2$

حيث $ج_2 = -300$ جا $30° \times 4 = -600$ نيوتن. متر

، القوتان (ق جا هـ ، ق جا هـ) تكونان ازدواجا القياس الجبرى لعزمه $ج_3$

حيث $ج_3 =$ ق جا هـ $\times 2 =$ ق $\times \frac{4}{5} \times 2 = \frac{8}{5}$ ق نيوتن. متر



، القوتان (ق جتا هـ ، ق جتا هـ) تكونان ازدواجا القياس الجبرى لعزمه $ج_4$

حيث $ج_4 =$ ق جتا هـ $\times 2 =$ ق $\times \frac{3}{5} \times 2 = \frac{6}{5}$ ق نيوتن. متر

، ∵ القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل $= 100 - 600\sqrt{3}$

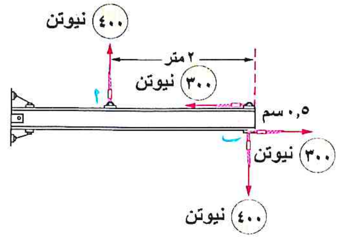
∴ $-600\sqrt{3} - 600 + \frac{8}{5}$ ق $+ \frac{6}{5}$ ق $= 100 - 600\sqrt{3}$

∴ $\frac{14}{5}$ ق $= 700$ ∴ ق $= 250$ نيوتن.

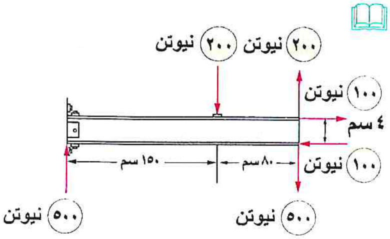
من أسئلة الكتاب المدرسى | • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

١ أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل لكل شكل من الأشكال الآتية :

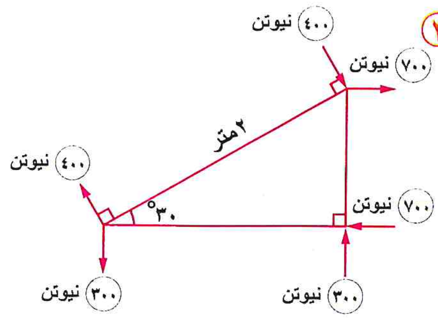
(١)



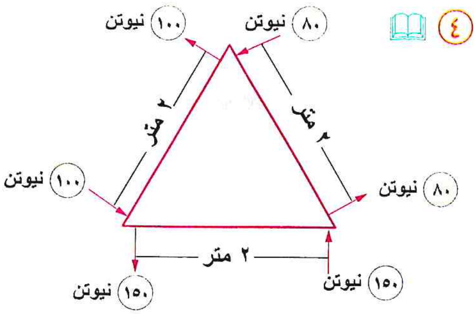
(٢)



(٣)



(٤)



٢ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم أثرت قوى مقدار كل منها ٧ ث. كجم فى كل من أ ب ، ب حـ ، حـ ء ، ء أ على الترتيب.

أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا ، أوجد معيار عزمه. «٩٨ ث.كجم . سم»

٣ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٢٠ سم أثرت القوى التى مقاديرها ٣ ، ٥ ، ٣ ، ٥ ث.كجم فى ب أ ، ب حـ ، ء حـ ، ء أ على الترتيب كما أثرت قوتان مقدار كلٍ منهما ٤ $\sqrt{2}$ ث.كجم فى الرأسين أ ، حـ فى اتجاه ب ء ، ء ب على الترتيب.

أوجد معيار الازدواج المحصل الذى يكافئ المجموعة. «١٢٠ ث.كجم . سم»

٤ (دور أول ٢٠٠١) أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم ، ق (∠ أ) = ٦٠° أثرت قوى مقاديرها ٨ ، ١٠ ، ٨ ، ١٠ نيوتن فى أ ب ، حـ ب ، حـ ء ، أ ء على الترتيب. أوجد معيار عزم الازدواج الذى يكافئ مجموعة هذه القوى. «٢٤ $\sqrt{3}$ نيوتن . سم»

٥ أ ب ح ء متوازى أضلاع فيه : أ ب = ٦ سم ، ب ح = ١٠ سم ، وطول العمود الساقط من الرأس ء على ب ح = ٤,٥ سم أثرت القوى التى مقاديرها ١٢ ، ١٥ ، ١٢ ، ١٥ ثقل كجم فى $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{ح ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{ح ب}}$ على الترتيب كما أثر ازدواج متجه عزمه عمودى على المستوى أ ب ح ء ومعيار عزمه ٧٢,٥ ثقل كجم . سم **فأوجد معيار عزم الازدواج المحصل إذا كان :**

(١) اتجاه متجه عزم الازدواج المعطى فى نفس اتجاه متجه عزم الازدواج المكون من القوتين اللتين مقداراهما ١٢ ، ١٢ ثقل كجم.

(٢) اتجاه متجه عزم الازدواج المعطى فى نفس اتجاه متجه عزم الازدواج المكون من القوتين اللتين مقداراهما ١٥ ، ١٥ ثقل كجم. «٩٥ ، ٥٠ ثقل كجم. سم»

---

٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قوى مقاديرها ٤ ، ٣ ، ٤ ، ٣ نيوتن تؤثر فى أضلاع مربع أ ب ح ء فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب ح}}$ ، $\overleftarrow{\text{ح ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء أ}}$ على الترتيب فإذا كان طول ضلع المربع ل فإن محصلة القوى تكافئ ....

(أ) قوة مقدارها ٥ $\sqrt{٢}$ وتمر بمركز المربع (ب) قوة مقدارها ١٤ وتمر بالنقطة أ

(جـ) ازدواج معيار عزمه ٧ ل (د) ازدواج معيار عزمه = ل

(٢) يؤثر على الجسم ازدواجان ، الأول مقدار إحدى قوتيه ٢٠ ث.كجم وذراع الازدواج = $\frac{١}{٢}$ متر واتجاه دورانه فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة والثانى مقدار إحدى قوتيه ٣٠ ث.كجم وذراع الازدواج = ١ متر واتجاه دورانه هو اتجاه عقارب الساعة فإن القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل = ... ث.كجم.متر.

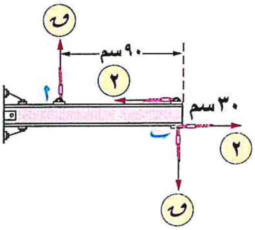
(أ) ٢٠ (ب) −٢٠ (جـ) ٤٠ (د) ١٠

(٣) إذا وقع جسم تحت تأثير ازدواجين مستويين متجها عزميهما $\overleftarrow{ج_١}$ ، $\overleftarrow{ج_٢}$ وكان : $ج_١ \neq ج_٢$ ، $ج_١ + ج_٢ \neq$ صفر فإن : ....

(أ) الجسم متزن. (ب) الازدواجين متكافئين.

(جـ) الجسم يتحرك حركة خطية. (د) الجسم يتحرك حركة دورانية.

(٤) **فى الشكل المقابل :**



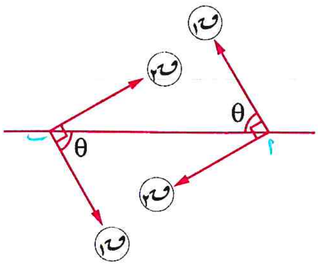
إذا كان عزم الازدواج المحصل = −١,٥ نيوتن.متر

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) $\frac{٧}{٣}$ (ب) $\frac{٤١}{٦٠}$

(جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{١٣}{٢٠}$

⑤ **في الشكل المقابل :**



إذا كان : أب = ل وحدة طول فإن القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل = ... وحدة عزم.

(أ) ل ($ق_1$ جا θ + $ق_2$ جتا θ)

(ب) ل ($ق_1$ جا θ − $ق_2$ جتا θ)

(جـ) ل ($ق_1$ جتا θ − $ق_2$ جا θ)

(د) ل ($ق_1$ جتا θ + $ق_2$ جا θ)

⑥ (دور أول ٢٠٢٢) إذا كانت مجموعة القوى : $\overleftarrow{ق_1}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ + ل $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ = م $\overleftarrow{س}$ + ٤ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_3}$ = ٧ $\overleftarrow{س}$ + ٨ $\overleftarrow{ص}$ تكافئ ازدواجًا ، فإن : ل + م = ...

(أ) ٢١ (ب) −٩ (جـ) −١٢ (د) −٢١

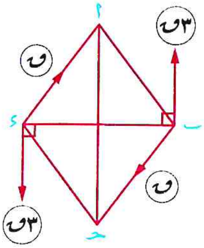
⑦ (استرشادى ٢٠٢٥) إذا كانت القوى : $\overleftarrow{ق_1}$ = (٣ ، −٥) ، $\overleftarrow{ق_2}$ = (−١ ، ٤) ، $\overleftarrow{ق_3}$ = (م ، ١) تؤثر فى النقط أ (−١ ، ن) ، ب (٠ ، ١) ، حـ (٢ ، ٣) على الترتيب ، وكانت المجموعة تكافئ ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه يساوى − ١٠ وحدة عزم ، فإن : م + ن = ...

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ١٢

⑧ (دور أول ٢٠٢٣) إذا كانت القوى : $\overleftarrow{ق_1}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ + $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ − ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_3}$ = −٥ $\overleftarrow{س}$ + ٢ $\overleftarrow{ص}$ تؤثر فى النقط : أ (١ ، ٢) ، ب (٢ ، −٣) ، حـ (٣ ، −١) على الترتيب ، وكانت المجموعة تكافئ ازدواجًا. فإن عزم الازدواج = ...

(أ) ١٢ $\overleftarrow{ع}$ (ب) ٦ $\overleftarrow{ع}$ (جـ) −٤ $\overleftarrow{ع}$ (د) −١٢ $\overleftarrow{ع}$

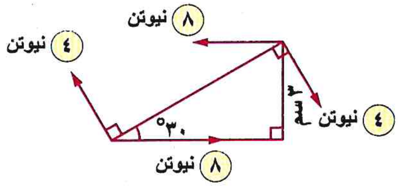
⑨ (دور ثان ٢٠٢٣) **في الشكل المقابل :**



أ ب حـ ء معين طولا قطريه $\overline{أحـ}$ ، $\overline{بء}$ هما ١٦ سم ، ١٢ سم على الترتيب. إذا أثرت القوى كما هو موضح بالشكل ، وكانت المجموعة تكافئ ازدواج القياس الجبرى لعزمه ٣٩٦ نيوتن. سم ، فإن مقدار ق = ... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ١٥ (جـ) ١٠ $\sqrt{٢}$ (د) ١٥ $\sqrt{٢}$

(١٠) (استرشادى ٢٠٢٥) فى الشكل المقابل :



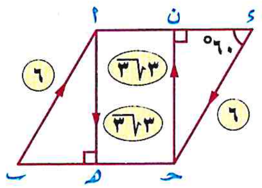
القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل

يساوى .... نيوتن. سم.

(أ) ١٤ (ب) ١٢

(جـ) ٦ (د) صفر

(١١) (استرشادى ٢٠٢٥) فى الشكل المقابل :



أ ب جـ ء معين طول ضلعه ١٠ سم ، ق(∠ء) = ٦٠° ،

$\overline{\text{أ هـ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ ن}} \perp \overline{\text{أ ء}}$ ، إذا أثرت القوى ٦ ، ٦

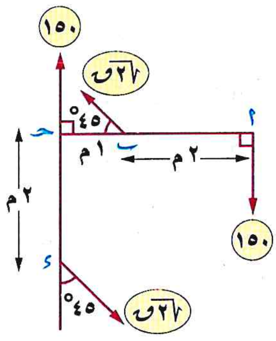
، $٣\sqrt{٣}$ ، $٣\sqrt{٣}$ ث.جم. فى الاتجاهات $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء جـ}}$ ،

$\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ن}}$ على الترتيب ، فإن مجموعة القوى تكافئ

ازدواج معيار عزمه = ... ث.جم. سم.

(أ) $١٥\sqrt{٣}$ (ب) $-١٥\sqrt{٣}$ (جـ) $٤٥\sqrt{٣}$ (د) $-٤٥\sqrt{٣}$

(١٢) (دورثان ٢٠٢٣) فى الشكل المقابل :



إذا كانت مجموعة القوى المؤثرة تكافئ ازدواج القياس

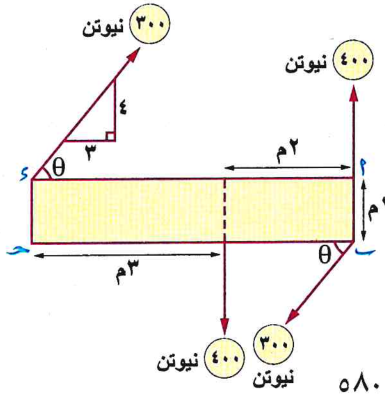
الجبرى لعزمه = ٧٥٠ نيوتن. متر ، حيث جـ ء = أ ب = ٢ م

، ب جـ = ١ م ، فإن مقدار ق = ... نيوتن.

(أ) $٤٠٠\sqrt{٢}$ (ب) ٤٠٠

(جـ) ٦٠٠ (د) $٦٠٠\sqrt{٢}$

(١٣) (دور أول ٢٠٢٣) فى الشكل المقابل :



أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ١ م

، ب جـ = ٥ م ، إذا أثرت القوى التى مقاديرها

(٤٠٠ ، ٣٠٠ ، ٤٠٠ ، ٣٠٠) نيوتن

كما هو موضح بالرسم. فإن المجموعة تكافئ

ازدواجًا معيار عزمه = ... نيوتن.م

(أ) ٢١٨٠ (ب) ٥٨٠

(جـ) ٢٢٠ (د) ١٨٢٠

٧ أ ب حـ ء مستطيل فيه : $\text{أب} = ١٠$ سم ، $\text{ب حـ} = ١٢$ سم ، نصف $\overline{\text{أب}}$ فى س ، حـ ء فى ص وأثرت قوى مقاديرها ١٨٠ ، ٢٠٠ ، ١٨٠ ، ٢٠٠ ، ٢٦٠ ، ٢٦٠ ث.جم فى $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{أء}}$ ، $\overleftarrow{\text{أص}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ س}}$ على الترتيب.

أوجد معيار عزم الازدواج المحصل. «١٠٤٠ ث.جم. سم»

---

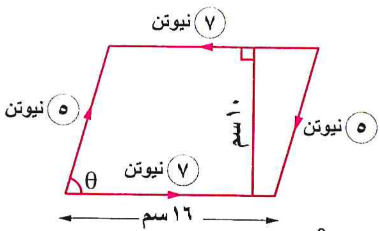
٨ أ ب حـ ء هـ و مسدس منتظم طول ضلعه ١٥ سم.

أثرت قوى مقاديرها ٤٠ ، ٥٠ ، ٣٠ ، ٤٠ ، ٥٠ ، ٣٠ نيوتن فى $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء هـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{و هـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{و أ}}$ على الترتيب. عيِّن معيار عزم الازدواج المحصل. «$٣٠٠\sqrt{٣}$ نيوتن. سم»

---

٩ **الشكل المقابل :**

يوضح صفيحة على شكل متوازى أضلاع أثر عليها ازدواجان.



(١) أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون من القوتين ٧ ، ٧ نيوتن.

(٢) أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون من القوتين اللتان مقداراهما ٥ ، ٥ نيوتن عندما $\theta = ٦٠^\circ$

(٣) إذا كان القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل يساوى ٣٠ نيوتن.سم فما قيمة θ ؟

(٤) إذا اتزنت الصفيحة فما قيمة θ ؟

---

١٠ (دور ثان ١٩٩٩) أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٦ سم أثرت قوى مقاديرها ٤٠ ، ق ، ٤٠ ، ق ثقل جرام فى $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء أ}}$ على الترتيب فإذا كانت هذه القوى الأربع تكافىء ازدواجًا معيار عزمه = ٤٨٠ ث.جم.سم فى الاتجاه أ ء حـ ب أوجد : ق «١٠ ث.جم»

---

١١ (دور أول ٢٠١٨) أ ب حـ ء مستطيل فيه : $\text{أب} = ٣٠$ سم ، $\text{ب حـ} = ٤٠$ سم أثرت القوى التى مقاديرها ١٥ ، ٣٠ ، ١٥ ، ٣٠ نيوتن فى $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء أ}}$ على الترتيب. أثبت أن هذه القوى تكافئ ازدواجًا وأوجد عزمه ثم أوجد قوتين تؤثران فى أ ، حـ عموديًا على $\overline{\text{أحـ}}$ بحيث تتزن المجموعة. «-٣٠٠ نيوتن.سم ، ٦ ، ٦ نيوتن»

---

١٢ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : $\text{أء} = ٢\ \text{أب} = ٨$ سم ، $ق(\angle \text{أ}) = ١٢٠^\circ$ ، و منتصف $\overline{\text{أء}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ أثرت قوى مقاديرها ١٢ ، ١٦ ، $ق_١$ ، $ق_٢$ ، ١٦ ، ١٢ ثقل جم فى $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{هـ أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{و حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أء}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ على الترتيب فإذا كانت مجموعة القوى متزنة

فأوجد قيمتى : $ق_١$ ، $ق_٢$ «$ق_١ = ق_٢ = ٨$ ثقل جم»

١٣ $\overline{أ ب ح ء هـ و}$ سداسى منتظم طول ضلعه ١٠ سم أثرت قوى مقاديرها ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ثقل كجم فى $\overleftarrow{ب أ}$ ، $\overleftarrow{أ و}$ ، $\overleftarrow{هـ و}$ ، $\overleftarrow{هـ ء}$ ، $\overleftarrow{ء ح}$ ، $\overleftarrow{ب ح}$ على الترتيب أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى يكافئ المجموعة ثم أوجد مقدار واتجاه قوتين تؤثران فى $\overleftrightarrow{أ هـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب ء}$ لتصبح المجموعة متزنة. «٤٠ $\sqrt{٣}$ ثقل كجم.سم ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ثقل كجم»

---

١٤ أ ب ح ء مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم ، ب ح = ٨ سم أثرت قوى مقاديرها ٢٠٠ ، ٥٠٠ ، ٢٠٠ ، ٥٠٠ ثقل جرام فى $\overleftarrow{ب أ}$ ، $\overleftarrow{ب ح}$ ، $\overleftarrow{ء ح}$ ، $\overleftarrow{ء أ}$ كما أثرت فى أ ، ح قوتان مقدار كلٍ منهما ٣٠٠ ثقل جرام الأولى فى اتجاه $\overleftarrow{ب ء}$ والثانية فى اتجاه $\overleftarrow{ء ب}$ أوجد عزم الازدواج المحصل ثم أوجد مقدار واتجاه قوتين تؤثران فى ب ، ء عموديتان على $\overline{ب ء}$ لكى تصبح المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه ٤٨٠ ثقل جم.سم ومتجه عزمه فى اتجاه متجه عزم الازدواج المكون من القوتين ٢٠٠ ، ٢٠٠ ثقل جرام.

«١٤٨٠ ثقل جم.سم ، ١٠٠ ، ١٠٠ ثقل جم»

---

١٥ أ ب ح ء مستطيل فيه : أ ب = ٦٠ سم ، ب ح = ١٦٠ سم ، س ، ص منتصفات $\overline{ب ح}$ ، $\overline{أ ء}$ على الترتيب ، أثرت القوى التى مقاديرها ٢٠٠ ، ٢٠٠ ، ٤٠٠ ، ٤٠٠ ، ق ، ق نيوتن فى الاتجاهات $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{ح ء}$ ، $\overleftarrow{ح ب}$ ، $\overleftarrow{أ ء}$ ، $\overleftarrow{س أ}$ ، $\overleftarrow{ص ح}$ ، على الترتيب ، إذا كان القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل يساوى ٦٤٠٠ نيوتن. سم فى الاتجاه أ ء ح ب أوجد : ق «٣٠٠ نيوتن»

---

١٦ (دور أول ٢٠١٠) أ ب ح ء متوازى أضلاع فيه : أ ب = ١٨ سم ، ب ح = ٢٠ سم ، ق (∠ أ) = ٣٠° أثرت قوى مقاديرها ٨ ، ٦ ، ٨ ، ٦ نيوتن فى $\overleftarrow{ب أ}$ ، $\overleftarrow{ب ح}$ ، $\overleftarrow{ء ح}$ ، $\overleftarrow{ء أ}$ على الترتيب. أثبت أن هذه القوى تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه ، ثم أوجد مقدار قوتين تؤثران فى أ ، ء وعموديتين على $\overline{أ ء}$ وتكافئان المجموعة السابقة.

«٢٦ نيوتن.سم ، ١,٣ ، ١,٣ نيوتن»

---

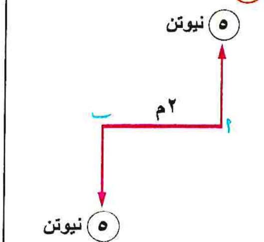
١٧ أ ب ح ء معين طول ضلعه ١٢ سم ، ق (∠ أ) = ٦٠° أثرت القوى التى مقاديرها ٥٠ ، ٨٠ ، ٥٠ ، ٨٠ ثقل جرام فى $\overleftarrow{ب أ}$ ، $\overleftarrow{ب ح}$ ، $\overleftarrow{ء ح}$ ، $\overleftarrow{ء أ}$ على الترتيب. أثبت أن مجموعة القوى تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه ثم أوجد قوتين تؤثران عند أ ، ح توازيان $\overleftrightarrow{ب ء}$ حتى تتزنا مع المجموعة السابقة. «١٨٠ $\sqrt{٣}$ ث.جم.سم ، ١٥ ، ١٥ ث.جم»

١٨ (دور أول ٢٠٠٨) أ ب حـ ء هـ و مسدس منتظم أثرت قوى مقاديرها ١٠ √٣ ، ٦ ، ١٠ √٣ ، ٦ نيوتن فى أب ، ءب ، ءهـ ، أهـ على الترتيب. أثبت أن هذه القوى تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه. ثم أوجد مقدار واتجاه قوتين تؤثران فى ب هـ ، أو حتى تتزن المجموعة. «٢٤ ل نيوتن.سم ، ١٦ √٣ ، ١٦ √٣ نيوتن»

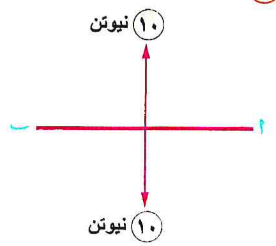
---

١٩ بيّن أى نظم القوى الآتية تكافئ ازدواجًا وأوجد القياس الجبرى لعزمه :

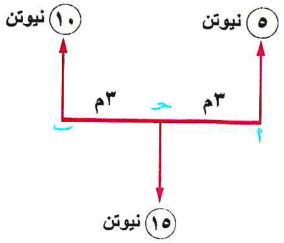
(١)



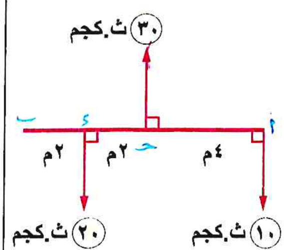
(٢)



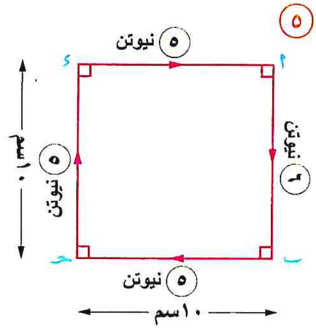
(٣)



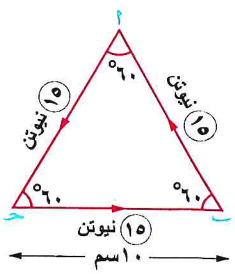
(٤)



(٥)



(٦)



---

٢٠ (دور ثان ٢٠١٨) أثرت القوى ق$_1$ = ٢ س − ٤ ص ، ق$_2$ = س − ٣ ص ، ق$_3$ = −٣ س + ٧ ص فى النقط أ (−١ ، ١) ، ب (−٢ ، ٣) ، حـ (٠ ، ١) على الترتيب. برهن أن هذه المجموعة من القوى تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه. «٨ وحدة عزم»

---

٢١ تؤثر القوى ق$_1$ = ٢ س + ص ، ق$_2$ = ٣ س − ٢ ص ، ق$_3$ = −٥ س + ص فى النقط أ = (١ ، ١) ، ب = (−١ ، ٣) ، حـ = (٤ ، ٥) على الترتيب.

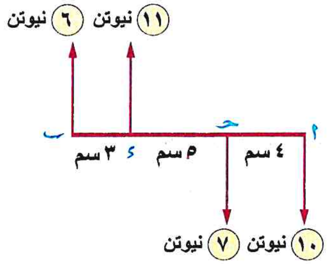
أثبت أن هذه القوى تكافئ ازدواجًا. وأوجد معيار عزمه. «٢١ وحدة عزم»

---

٢٢ أثرت القوى ق$_1$ = ص − ٤ س ، ق$_2$ = ٤ س − ص ، ق$_3$ = −٨ س − ٦ ص فى النقط : أ = (٣ ، −١) ، ب = (٧ ، ٢) ، حـ = (−٢ ، ٦) على الترتيب كما أثرت قوة ق$_4$ مقدارها ١٠ نيوتن فى أب أثبت أن القوى الأربع تكافئ ازدواجاً ، أوجد عزمه.

«٧٠ ع»

٢٣ في الشكل المقابل :



أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا ، أوجد القياس الجبرى لعزمه.

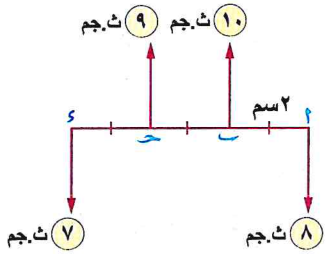
«–١٤٣ نيوتن.سم»

---

٢٤ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٢٤ سم ووزنه ٤ نيوتن يؤثر فى منتصفه م ، حـ ، ء $\in$ $\overline{أب}$ حيث : أحـ = ٦ سم ، أء = ١٤ سم. أثرت قوتان مقداراهما ٨ ، ١٢ نيوتن فى النقطتين أ ، ب على الترتيب رأسيًا إلى أعلى ، كما أثرت قوتان مقداراهما ٩ ، ٧ نيوتن فى نقطتى حـ ، ء على الترتيب رأسيًا إلى أسفل. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه. «٨٨ نيوتن .سم»

---

٢٥ في الشكل المقابل :



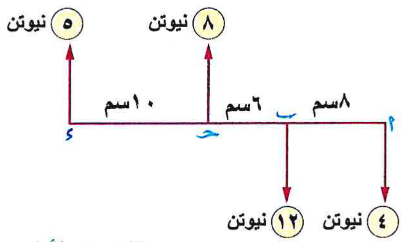
أب = ب حـ = حـ ء = ٢ سم

أوجد مقدار واتجاه وخط عمل قوة $\overrightarrow{ق}$ بحيث تؤول مجموعة القوى إلى ازدواج القياس الجبرى لعزمه يساوى –٢٦ ثقل جم.سم.

«٤ ثقل جم لأسفل»

---

٢٦ في الشكل المقابل :

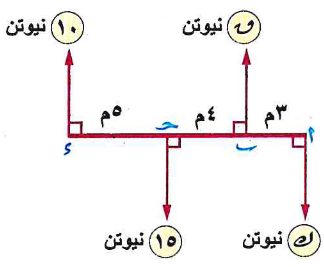


أب = ٨ سم ، ب حـ = ٦ سم ، حـ ء = ١٠ سم. أوجد مقدار واتجاه وخط عمل قوة $\overrightarrow{ق}$ بحيث تؤول المجموعة إلى ازدواج القياس الجبرى لعزمه يساوى – ١٥١ نيوتن.سم.

«٣ نيوتن لأعلى»

---

٢٧ في الشكل المقابل :



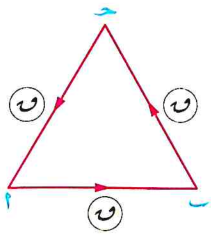
يوضح مجموعة من القوى المؤثرة على قضيب $\overline{أء}$ تكون ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه يساوى – ٧٥ نيوتن . م

أوجد قيمة كل من : ق ، ك

«٢٠ ، ١٥ نيوتن»

٢٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① (دور أول ٢٠١٩) **فى الشكل المقابل :**



أ ب ح مثلث متساوى الأضلاع ، طول ضلعه ل سم

إذا أثرت قوى مقاديرها متساوية ، مقدار كل منها ق نيوتن

فى $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{بح}}$ ، $\overleftarrow{\text{حأ}}$ على الترتيب

فإن عزم الازدواج المكافئ = ... نيوتن.سم

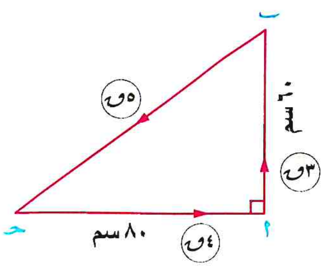
(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل^{٢} ق (ب) $٢\sqrt{٣}$ ل ق (ج) $\sqrt{٣}$ ل ق (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل ق

② معيار عزم الازدواج الناتج من ثلاث قوى ممثلة تمثيلاً تامًا بأضلاع المثلث أ ب ح مأخوذة فى اتجاه دورى واحد حيث وحدة القوة ممثلة بوحدة الطول ،

ب ح = ٥ سم ، ح أ = ٥ سم ، أ ب = ٨ سم هو .... وحدة عزم.

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (ج) ٣٦ (د) ١٦

③ (دور ثان ٢٠١٩) **فى الشكل المقابل :**



أ ب ح مثلث قائم الزاوية فى أ

، أ ب = ٦٠ سم ، أ ح = ٨٠ سم

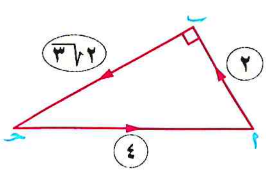
إذا أثرت القوى التى مقاديرها

٣ ق ، ٥ ق ، ٤ ق نيوتن فى $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{بح}}$ ، $\overleftarrow{\text{حأ}}$

على الترتيب فإن عزم الازدواج المكافئ يساوى .... نيوتن.سم

(أ) ٤٨٠ ق (ب) ٢٤٠ ق (ج) ١٢٠ ق (د) $\frac{٩٦٠٠٠}{ق}$

④ (دور ثان ٢٠٢٤) **فى الشكل المقابل :**



تؤثر القوى التى مقاديرها ٢ ، $٢\sqrt{٣}$ ، ٤ نيوتن فى الاتجاهات $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{بح}}$ ، $\overleftarrow{\text{حأ}}$ على الترتيب والقوى ممثلة تمثيلًا تامًا بأضلاع المثلث أ ب ح ، فإذا كانت مجموعة القوى تكافئ ازدواج القياس الجبرى لعزمه $١٦\sqrt{٣}$ نيوتن.سم ، فإن مساحة سطح المثلث

أ ب ح = ... سم^{٢}.

(أ) $٣٢\sqrt{٣}$ (ب) $١٦\sqrt{٣}$ (ج) $٨\sqrt{٣}$ (د) $٤\sqrt{٣}$

⑤ إذا كانت القوى $\overrightarrow{ق}_1$ ، $\overrightarrow{ق}_2$ ، $\overrightarrow{ق}_3$ تؤثر فى النقط (٠ ، ٠) ، (١ ، ٠) ، (٠ ، ١)

وتكافئ ازدواج بحيث كانت : $\overrightarrow{ق}_1$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق}_2$ = − $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$

فإن مقدار عزم الازدواج = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ٤ (د) ٦

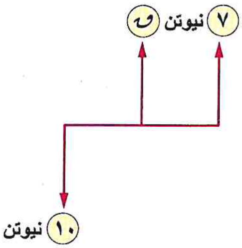
⑥ إذا كان نظام القوى

المقابل يكافئ ازدواج

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٣ (ب) ٧

(جـ) ١٠ (د) ١٧



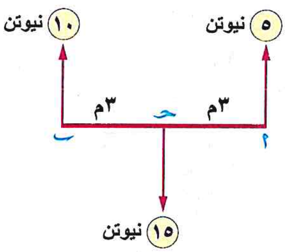
⑦ القياس الجبرى لعزم الازدواج

لمجموعة القوى الموضحة

بالشكل بوحدة نيوتن.متر تساوى ....

(أ) −١٥٠ (ب) −٣٠

(جـ) −١٥ (د) ١٣٥



⑧ (دور أول ٢٠٢٢) فى الشكل المقابل :

أ م = ن ب = ٢٠ سم ، م ن = ٦٠ سم

، ومجموعة القوى المقدرة بالنيوتن والمبين

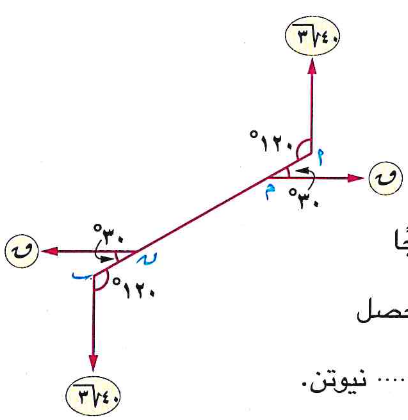
مقاديرها واتجاهاتها فى الشكل تكافئ ازدواجًا

، فإذا كان القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل

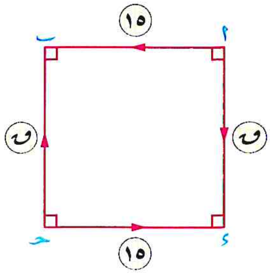
يساوى ٣٦٠٠ نيوتن.سم. فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٤٠ (ب) ٨٠ $\sqrt{3}$

(جـ) ٨٠ (د) ٤٠ $\sqrt{3}$



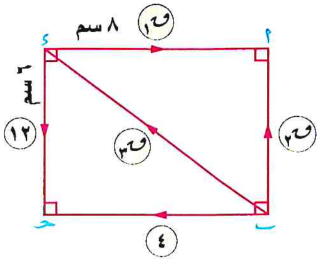
٩ (دور أول ٢٠٢٥) في الشكل المرسوم :



أ ب جـ د مربع طول ضلعه ١٠ سم ، أثرت قوى مقاديرها ١٥ ، ق ، ١٥ ، ق نيوتن والمبينة بالشكل ، فإذا كانت المجموعة تكافئ ازدواجًا ، القياس الجبرى لعزمه ٦٠ نيوتن. سم فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٢٤ (ب) ١٥ (جـ) ١٠ (د) ٩

١٠ (دور أول ٢٠١٧) في الشكل المقابل :



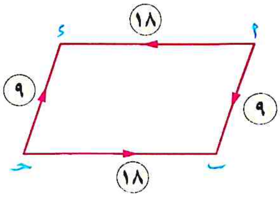
إذا كانت مقادير القوى بالنيوتن والمجموعة متزنة

فإن : ق$_{3}$ = ... نيوتن.

(أ) ١٦ (ب) ٥

(جـ) ٣ (د) ٨

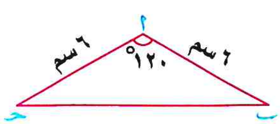
١١ (استرشادى ٢٠٢٥) في الشكل المقابل :



أ ب جـ د متوازى أضلاع فيه : أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ١٠ سم ، فإذا أثرت القوى التى مقاديرها ١٨ ، ٩ ، ١٨ ، ٩ نيوتن في أد ، جـ د ، جـ ب ، أ ب على الترتيب ، وكانت المجموعة تكافئ ازدواج عزمه ٩ $\sqrt{3}$ نيوتن. سم في اتجاه أ د جـ ب ، فإن : ق (∠ أ) = ... °

(أ) ٣٠ (ب) ٧٥ (جـ) ٤٥ (د) ٦٠

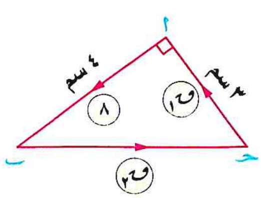
١٢ أى مجموعات القوى الآتية إذا أثرت في أضلاع المثلث أ ب جـ وفى ترتيب دورى واحد فإنها تكافئ ازدواج ؟



(أ) ١٠ ، ١٠ ، ١٠ نيوتن. (ب) ٦ ، ٨ ، ١٠ نيوتن.

(جـ) ١٢ ، ١٢ ، ١٢ $\sqrt{2}$ نيوتن. (د) ١٥ ، ١٥ ، ١٥ $\sqrt{3}$ نيوتن.

١٣ في الشكل المقابل :

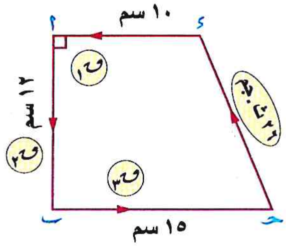


أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ ، أ ب = ٤ سم ، أ جـ = ٣ سم ، والقوى المبينة مقاسة بالنيوتن وممثلة تمثيلاً تامًا بأضلاع المثلث وكانت مجموعة القوى تكافئ ازدواج

فإن : ق$_{1}$ + ق$_{2}$ = ... نيوتن.

(أ) ٦ (ب) ١٠ (جـ) ٤ (د) ١٦

⑭ في الشكل المقابل :



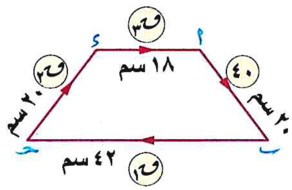
أ ب حـ ء شبه منحرف قائم الزاوية في أ

، مثلت القوى المبين مقاديرها (بالثقل جرام) واتجاهاتها تمثيلاً تامًا بأضلاع شبه المنحرف فإذا كانت المجموعة تكافئ ازدواج

فإن : $ق_1 + ق_2 + ق_3 =$ .... ثقل جرام.

(أ) ٧٤ (ب) ٣٠ (جـ) ٢٤ (د) ٢٠

⑮ (دور أول ٢٠٢٢) في الشكل المقابل :



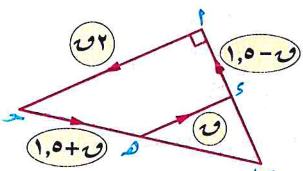
أ ب حـ ء شبه منحرف متساوي الساقين ،

مثلت القوى (المقدرة بالنيوتن) ، والمبين مقاديرها واتجاهاتها تمثيلًا تامًا بأضلاع شبه المنحرف

، فإذا كانت المجموعة تكافئ ازدواجًا ، فإن معيار عزم الازدواج = ... نيوتن.سم.

(أ) ٩٦٠ (ب) ٤٨٠ (جـ) ٢٤٠ (د) ١٩٢٠

⑯ (تجريبي ٢٠٢١) في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في أ ، أ ب = ٦ سم

، أ حـ = ٨ سم ، ء ، هـ منتصفا $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب حـ}$

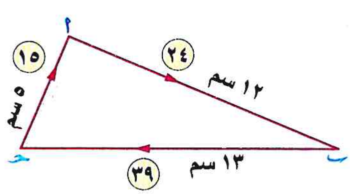
، أثرت قوى مقاديرها بالنيوتن ٢ ق ، ق

، (ق + ١,٥) ، (ق − ١,٥) وممثلة تمثيلًا تامًا بأضلاع الشكل الرباعي أ حـ هـ ء في الاتجاهات $\overleftarrow{أ حـ}$ ، $\overleftarrow{هـ ء}$ ، $\overleftarrow{حـ هـ}$ ، $\overleftarrow{ء أ}$ على الترتيب فإذا كانت مجموعة القوى تكافئ ازدواج

فإن معيار عزم الازدواج = ... نيوتن.سم.

(أ) ٣٦ (ب) ٥٤ (جـ) ٧٢ (د) ١٠٨

⑰ في الشكل المقابل :



إذا كانت مقادير القوى مقدرة بالنيوتن

فإن مقدار القوة التي تضاف للمجموعة

لتكافئ ازدواج = ...

(أ) ٢ نيوتن في اتجاه $\overleftarrow{أ ب}$ (ب) ١٢ نيوتن في اتجاه $\overleftarrow{ب أ}$

(جـ) ١٢ نيوتن في اتجاه $\overleftarrow{أ ب}$ (د) ٣٦ نيوتن في اتجاه $\overleftarrow{أ ب}$

(١٨) إذا كانت أ ، ب ، حـ ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة بحيث كان هناك مجموعة من القوى فى مستواها تكون ازدواج وكان : ٢ $ج_{أ}$ + ٣ $ج_{ب}$ + ٥ $ج_{حـ}$ = ٢٤٠ نيوتن.سم

فإن : ٤ $ج_{أ}$ − ٢ $ج_{حـ}$ = ... نيوتن.سم.

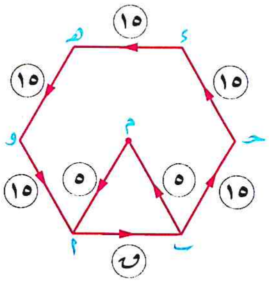
(أ) ٢٤ (ب) ٤٨ (جـ) ٩٦ (د) ١٩٢

(١٩) إذا أثرت ثلاث قوى مستوية وغير متلاقية فى نقطة فى جسم متماسك ومثلها تمثيلًا تامًا أضلاع مثلث أ ب حـ مأخوذة فى ترتيب دورى واحد فإن ....

(أ) $ج_{أ}$ = $ج_{ب}$ = $ج_{حـ}$ = صفر (ب) $ج_{أ}$ = $ج_{ب}$ = $ج_{حـ}$ ≠ صفر

(جـ) $ج_{أ}$ + $ج_{ب}$ = $ج_{حـ}$ (د) محصلة القوى ≠ صفر

(٢٠) (دور أول ٢٠٢٤) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم مركزه النقطة م ،

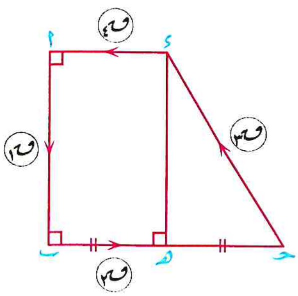
فإذا كانت مجموعة القوى تكافىء ازدواجًا ،

فإن : ق = ... وحدة قوى.

(أ) ٢٠ (ب) ١٥

(جـ) ١٠ (د) ٥

(٢١) (دور أول ٢٠٢٤) فى الشكل المقابل :

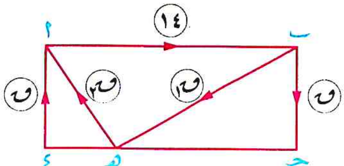


القوى $\overleftarrow{ق_{١}}$ ، $\overleftarrow{ق_{٢}}$ ، $\overleftarrow{ق_{٣}}$ ، $\overleftarrow{ق_{٤}}$ نيوتن تؤثر فى أضلاع شبه المنحرف أ ب حـ ء وفى ترتيب دورى واحد ومعيار القوى متناسبة مع أطوال الأضلاع الممثلة لها وتكون ازدواجًا معيار عزمه ٥٤٠ نيوتن.سم ، إذا كان المجموع العددى للقوى يساوى $\frac{٣}{٥}$ محيط شبه المنحرف أ ب حـ ء

فإن مساحة Δ ء حـ هـ = ... $سم^{٢}$.

(أ) ٤٥٠ (ب) ٣٠٠ (جـ) ٢٢٥ (د) ١٥٠

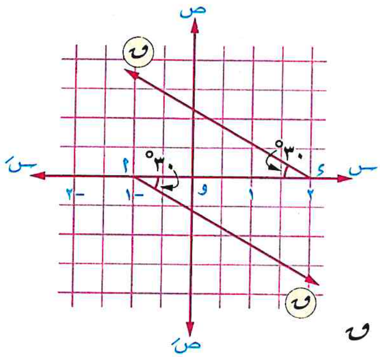
(٢٢) (دور ثان ٢٠٢٤) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء مستطيل فيه : ب حـ = ٤ سم ، إذا كانت القوتان اللتان مقداراهما (ق ، ق) تكونان ازدواجًا يكافئ الازدواج المكون من القوى التى مقاديرها ($ق_{١}$ ، $ق_{٢}$ ، ١٤) الممثلة تمثيلًا تامًا بأضلاع المثلث ب هـ أ والقوى مقاسة بوحدة النيوتن ، فإن معيار عزم الازدواج المكون من القوتين اللتين مقداراهما (ق ، ق) = ... نيوتن.سم.

(أ) ٢٨ (ب) ٤٢ (جـ) ٥٦ (د) ٨٤

(٢٣) (تجريبى ٢٠٢١) فى الشكل المقابل :



أثرت القوى $\overleftarrow{ق_1} = ٢ \overleftarrow{س} - ٤ \overleftarrow{ص}$

، $\overleftarrow{ق_2} = ٣ \overleftarrow{س} - ٥ \overleftarrow{ص}$

، $\overleftarrow{ق_3} = - ٥ \overleftarrow{س} + ٩ \overleftarrow{ص}$ فى النقاط

أ (-١ ، ٠) ، ب (٠ ، ٢) ، حـ (١ ، -٢)

فكونت ازدواجًا كما أثرت القوتان التى مقداراهما ق

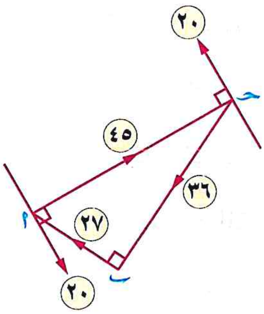
، ق عند النقطتين أ ، ء كما هو موضح بالشكل فاتزنت مع الازدواج السابق

، (علمًا بأن جميع القوى مقدرة بالثقل جرام وتؤثر فى جسم متماسك يقع

فى المستوى س ص) فإن : ق = ... ث.جم.

(أ) $\sqrt{3}$ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) $\sqrt{2}$

(٢٤) (دور أول ٢٠٢١) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب

، فيه : أ ب = ٩ سم ، ب حـ = ١٢ سم

أثرت القوى التى مقاديرها ٢٧ ، ٤٥ ، ٣٦ نيوتن

فى $\overleftarrow{ب أ}$ ، $\overleftarrow{أ حـ}$ ، $\overleftarrow{حـ ب}$ على الترتيب. كما أثرت

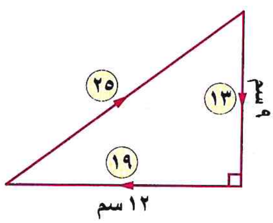
قوتان مقداراهما ٢٠ ، ٢٠ نيوتن عند أ ، حـ

عموديتان على $\overline{أ حـ}$ كما فى الشكل ، فإذا كانت المجموعة تكافئ ازدواجًا.

فإن معيار عزم الازدواج المحصل = ... نيوتن.سم.

(أ) ٢٤ (ب) ٦٢٤ (جـ) ٤٨ (د) ٩٤٨

(٢٥) فى الشكل المقابل :



إذا كانت مقادير القوى مقاسة بالنيوتن

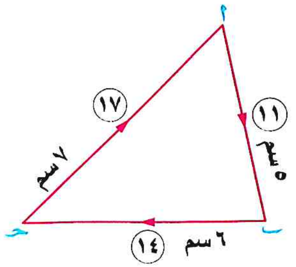
فإن مقدار القوة (ق) التى يجب إضافتها

إلى كل قوة من القوى المعطاة حتى تجعل

المجموعة تكافئ ازدواج يساوى .... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٢٦) (دور أول ٢٠٢١) في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث ، فيه : أ ب = ٥ سم

، ب حـ = ٦ سم ، أ حـ = ٧ سم

، القوى الموضحة بالشكل مُقاسة بالنيوتن

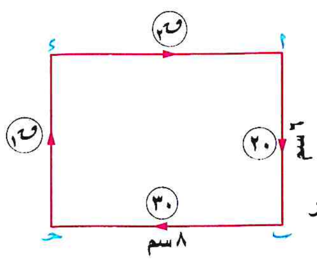
، فإذا أضيفت قوة مقدارها ق نيوتن إلى كل

قوة حتى أصبحت المجموعة تكافئ ازدواجًا فإن القياس الجبرى

لعزم الازدواج = ... نيوتن.سم.

(أ) $-٣٦\sqrt{٦}$ (ب) $٣٦\sqrt{٦}$ (جـ) ٧٢ (د) -٧٢

(٢٧) (دور ثان ٢٠٢١) في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم

، أثرت القوى المقدرة بالنيوتن الموضحة بالرسم ، فإذا

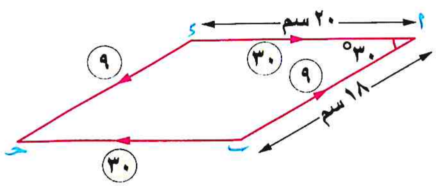
أضيفت قوة مقدارها ق نيوتن إلى كل قوة حيث ق ≠ صفر

، أصبحت القوى ممثلة تمثيلًا تامًا بأضلاع المستطيل

، فإن القياس الجبرى لعزم الازدواج الناتج = ... نيوتن.سم

(أ) ٤٨٠ (ب) -٤٨٠ (جـ) ٣٠٠ (د) -٣٠٠

(٢٨) (تجريبى ٢٠٢١) في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه :

ق (∠ أ) = °٣٠ ، أ ب = ١٨ سم

، أ ء = ٢٠ سم. أثرت القوى كما بالشكل مقدرة بوحدة ث.جم

فكونت ازدواج محصل ، فإذا أثرت قوتان مقدارايهما ق ، ق ث.جم عند أ ، ء

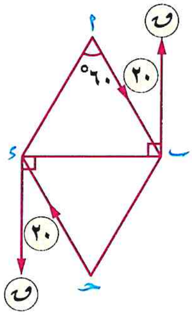
عموديتان على $\overline{أء}$ ويكونان ازدواجًا يكافئ الازدواج السابق

فإن : ق = ... ث.جم

(أ) ٢٠ (ب) ١٨ (جـ) ١٠ (د) ٩

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

(٢٩) (دور أول ٢٠٢٢) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء معين ، قوتان مقداراهما ٢٠ ، ٢٠ ث.كجم

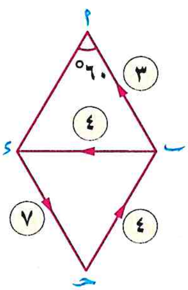
تكوِّنان ازدواجًا وقوتان مقداراهما ق ، ق ث.كجم

تكوِّنان ازدواجًا آخر ، فإذا اتزنت المجموعة

فإن : ق = ... ث.كجم.

(أ) ٢٠ (ب) ١٠ (جـ) ١٠ $\sqrt{٣}$ (د) ٢٠ $\sqrt{٣}$

(٣٠) (دور ثان ٢٠٢١) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء معين طول ضلعه ٦ سم ، ق (∠ أ) = ٦٠°

، أثرت القوى التى مقاديرها ٣ ، ٧ ، ٤ ، ٤ نيوتن

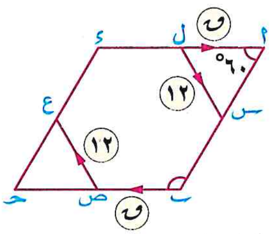
فى الاتجاهات $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ على الترتيب

وكانت المجموعة تكافئ ازدواجًا

، فإن معيار عزم الازدواج = ... نيوتن.سم.

(أ) ١٠ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٥ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٢٥ $\sqrt{٣}$ (د) ٢١ $\sqrt{٣}$

(٣١) (دور ثان ٢٠٢٢) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء معين طول ضلعه ١٢ سم ، فيه ق (∠ أ) = ٦٠°

، س ، ص ، ع ، ل منتصفات $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$

، $\overline{\text{حـ ء}}$ ، $\overline{\text{ء أ}}$ أثرت القوى التى مقاديرها ق ، ق ، ١٢ ، ١٢ نيوتن.

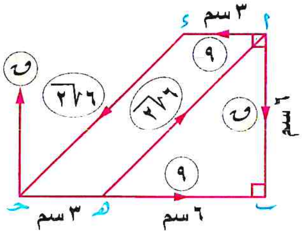
كما هو موضح بالشكل فإذا كان الازدواج الناتج عن القوتين

اللتين مقداراهما ق ، ق نيوتن يكافئ الازدواج الناتج عن القوتين اللتين

مقداراهما ١٢ ، ١٢ نيوتن ، فإن ق = ... نيوتن.

(أ) ٦ (ب) ٦ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٢ (د) ١٢ $\sqrt{٣}$

(٣٢) (دورثان ٢٠٢٢) في الشكل المقابل :



أ ب ح ء شبه منحرف قائم ، فيه أ ب = ٦ سم

، ب ح = ٩ سم ، أ ء = ٣ سم ، هـ ∈ ب ح

بحيث أ هـ // ء ح أثرت القوى الموضحة بالشكل

فإذا كانت المجموعة متزنة فإن : ق = ... وحدة قوة.

(علمًا بأن القوتين ق ، ق متوازيتان).

(أ) ٨√٢ (ب) ٤√٢ (جـ) ٤ (د) ٨

(٣٣) (دورثان ٢٠٢١) إذا كانت مجموعة من القوى تؤثر في مستوى المربع أ ب ح ء وتكون ازدواجًا معيار عزمه يساوي ٤٠ نيوتن.سم

فإن : ‖ جـ أ ‖ + ‖ جـ ب ‖ + ٣ ‖ جـ ح ‖ − ‖ جـ ء ‖ = ... نيوتن.سم

(أ) ٢٤٠ (ب) ٨٠ (جـ) ١٢٠ (د) ١٦٠

---

٢٩ ثلاث قوى مقاديرها ١٥ ، ١٥ ، ١٨ ثقل كجم يمثلها تمثيلاً تامًا ح أ ، أ ب ، ب ح من المثلث أ ب ح الذي فيه : ب ح = ١٢ سم

أوجد معيار عزم الازدواج الذي يكافئ القوى الثلاث. «١٤٤ ثقل كجم.سم»

---

٣٠ أ ب ح مثلث فيه : أ ب = ١٠ سم ، ب ح = ١٦ سم ، ق (∠ب) = ٦٠° أثرت قوى مقاديرها ٢,٥ ، ٤ ، ٣,٥ ثقل كجم في أ ب ، ب ح ، ح أ على الترتيب.

بيِّن أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه. «٢٠√٣ ثقل جم.سم»

---

٣١ ثلاث قوى مقاديرها ١٠,٥ ، ١٢ ، ١٩,٥ نيوتن يمثلها تمثيلاً تامًا القطع المستقيمة الموجهة أ ب ، ب ح ، ح أ على الترتيب من المثلث أ ب ح الذي فيه أ ح = ١٣ سم

أوجد معيار عزم الازدواج الذي يكافئ القوى الثلاث. «٤٢√٣ نيوتن.سم»

---

٣٢ أ ب ح مثلث فيه : أ ب = ٥ سم ، ب ح = ١٢ سم ، ح أ = ١٣ سم أثرت القوى ١٥ ، ٣٦ ، ٣٩ ثقل جرام في أ ب ، ب ح ، ح أ على الترتيب أوجد القوتين المتساويتين في المقدار وتؤثران في نهايتي أ ح وعموديتين عليه لكي تحدثا اتزانًا مع مجموعة القوى السابقة. «كل قوة = $13\frac{11}{13}$ ثقل جرام»

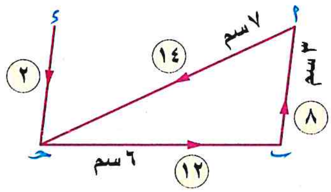
٣٣ أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ١٣ سم ، ب حـ = ١٤ سم ، حـ أ = ١٥ سم أثرت القوى التى مقاديرها ٣٩ ، ٤٢ ، ٤٥ نيوتن فى الاتجاهات $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ أ}}$ على الترتيب. أثبت أن مجموعة القوى تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه ثم أوجد قوتين متوازيتين عند ب ، حـ عموديتين على $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ لتتزن مع القوى السابقة. «٥٠٤ نيوتن.سم ، ٣٦ ، ٣٦ نيوتن»

---

٣٤ أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه : أ ب = أ حـ = ١٣ سم ، ب حـ = ١٠ سم ، ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ أثرت القوى التى مقاديرها ٥٢ ، ٢٠ ، ٤٨ نيوتن فى $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء أ}}$ على الترتيب. أثبت أن مجموعة القوى تكافئ ازدواجًا وأوجد القياس الجبرى لعزمه. أوجد مقدار قوتين إحداهما فى $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ والأخرى تؤثر عند ب فى اتجاه $\overleftarrow{\text{حـ أ}}$ بحيث تصبح المجموعة فى حالة توازن. «−٢٤٠ نيوتن.سم ، ٢٦ ، ٢٦ نيوتن»

---

٣٥ (تجريبى ٢٠٢٣) فى الشكل المقابل :



تؤثر مجموعة القوى التى مقاديرها ٨ ، ١٤ ، ١٢ ، ٢ نيوتن فى الاتجاهات $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء حـ}}$ على الترتيب وكان : $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{ء حـ}}$ وكانت المجموعة تكافئ ازدواج. أوجد معيار عزم الازدواج. «$\frac{٦٤\sqrt{٥}}{٣}$ نيوتن.سم.»

---

٣٦ (دور أول ٢٠١١) أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٩ سم ، ب حـ = ٢٤ سم ، هـ ، و منتصفا $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$ على الترتيب. أثرت قوى مقاديرها ١٨ ، ٤٨ ، ٣٠ ، ٢٤ ث.جم فى $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ و}}$ ، $\overleftarrow{\text{و أ}}$ على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه. ثم أوجد مقدارى القوتين اللتين تؤثران فى $\overleftarrow{\text{هـ أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{و حـ}}$ حتى تحدث اتزانًا مع القوى المعلومة. «٦٤٨ ث.جم.سم ، ٩٠ ، ٩٠ ث.جم»

---

٣٧ أ ب حـ ء شبه منحرف متساوى الساقين فيه : $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، أ ء = ٩ سم ، أ ب = ء حـ = ١٥ سم ، ب حـ = ٣٣ سم أثرت القوى التى مقاديرها ٤٥ ، ٩٩ ، ٤٥ ، ٢٧ نيوتن فى الاتجاهات $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء أ}}$ على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه. «١١٣٤ نيوتن.سم»

٣٨ أ ب حـ د شبه منحرف فيه : $\overline{\text{أ د}} // \overline{\text{ب حـ}}$ ، ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠° ، أ ب = ٩ سم ، ب حـ = ٢٤ سم ، أ د = ١٢ سم أثرت قوى مقاديرها ٤٨ ، ١٨ ، ٢٤ ، ٣٠ نيوتن في $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ د}}$ ، $\overleftarrow{\text{د حـ}}$ على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه. «٦٤٨ نيوتن . سم»

---

٣٩ هـ أ ب حـ د شكل خماسي فيه : ق(∠ هـ) = ق(∠ ب) = ق(∠ حـ) = ٩٠° ، هـ أ = ١٦ سم ، أ ب = حـ د = ١٠ سم ، ب حـ = ٢٠ سم أثرت قوى مقاديرها ٨ ، ٥ ، ١٠ ، ٥ ، ٦ ثقل جرام في $\overleftarrow{\text{هـ أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ د}}$ ، $\overleftarrow{\text{د هـ}}$ على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا واحسب معيار عزمه. «٢٩٦ ثقل جرام . سم»

---

٤٠ أ ب حـ د هـ خماسي منتظم طول ضلعه ١٥ سم أثرت قوى مقدار كل منها ١٠ ث.كجم في $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ د}}$ ، $\overleftarrow{\text{د هـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{هـ أ}}$ على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه. «٥١٦,١٤ ث.كجم . سم»

---

٤١ أ ب حـ د هـ و شكل سداسي منتظم طول ضلعه ١٠ سم أثرت قوى مقاديرها ٢٠ $\sqrt{٣}$ ، ٢٠ ، ٤٠ نيوتن في $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ د}}$ ، $\overleftarrow{\text{د أ}}$ كما أثرت قوتان في $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$

أوجد مقدار واتجاه القوتين لكي تتزن المجموعة. «٢٠ ، ٢٠ نيوتن في $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{و هـ}}$»

---

٤٢ أ ب حـ د هـ و سداسي منتظم طول ضلعه ٦ سم أثرت القوى ١١ ، ٢٧ ، ١٦ ثقل جرام في $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ و}}$ ، $\overleftarrow{\text{هـ د}}$ على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

«١٥ $\sqrt{٣}$ ثقل جم . سم»

---

٤٣ أ ب حـ د هـ و سداسي منتظم طول ضلعه ١٦ سم أثرت القوى ٨ ، ٨ ، ١٢ ، ١٢ ، ٨ $\sqrt{٣}$ ثقل جرام في $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ و}}$ ، $\overleftarrow{\text{هـ د}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ أ}}$ على الترتيب

أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه. «٣٢ $\sqrt{٣}$ ثقل جرام . سم»

---

٤٤ أ ب حـ د شبه منحرف فيه : $\overline{\text{أ د}} // \overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$ عمودي عليهما ، هـ مسقط د على $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ب حـ = ٧,٥ سم ، أ ب = ٤ سم ، أ د = ٤,٥ سم أثرت قوى مقاديرها ١٨ ، ٢٧ ، ٣٠ ، ١٨ ، ٥١ نيوتن في $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ د}}$ ، $\overleftarrow{\text{د حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{هـ د}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ أ}}$ على الترتيب.

أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه. «٢٧ نيوتن . سم»

٤٥ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ٩ سم ، أخذت نقطة م ∈ ب حـ بحيث : ب م = ٤ سم أثرت قوى مقاديرها ق١ ، ٨ $\sqrt{10}$ ، ٢٦ ، ق٢ ، ١٨ نيوتن فى الاتجاهات ب أ ، أ م ، م ء ، ء حـ ، ء أ على الترتيب فإذا كانت مجموعة القوى متزنة **فأوجد قيمتى : ق١ ، ق٢**

«٢٤ ، ٢٤ نيوتن»

---

٤٦ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١٠ سم ، هـ ∈ ب حـ حيث : ب هـ = ٤ سم أثرت قوتان مقداراهما ٢٠ نيوتن فى أ ء ، ٢٠ نيوتن فى ء هـ أوجد مقدار واتجاه القوة المؤثرة فى أ هـ حتى تؤول المجموعة إلى ازدواج وأوجد معيار عزمه.

«٨ $\sqrt{5}$ نيوتن فى اتجاه هـ أ ، ١٦٠ نيوتن.سم»

---

٤٧ أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ٦ سم ، حـ ء = ء أ = ١٣ سم ، ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠° أثرت قوى مقاديرها ٤ ، ٣ ، ٦,٥ ، ٦,٥ نيوتن فى أ ب ، ب حـ ، حـ ء ، ء أ على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه وإذا أثرت فى النقطتين ب ، ء قوتان مقداراهما ق ، ق فى اتجاهى حـ أ ، أ حـ على الترتيب. أوجد قيمة ق حتى تتزن المجموعة.

«٨٤ نيوتن.سم ، ٥ نيوتن»

---

٤٨ أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = أ ء = ٢٠ سم ، ب حـ = حـ ء = ١٠ $\sqrt{7}$ سم ، ق(∠ أ) = ١٢٠° أثرت قوى ممثلة بالقطع المستقيمة الموجهة أ ب ، ب حـ ، حـ ء ، ء أ فإذا كانت المجموعة تؤول إلى ازدواج معيار عزمه ١٨٠ $\sqrt{3}$ نيوتن. سم فى الاتجاه أ ب حـ ء أوجد مقدار القوى المؤثرة فى أضلاع الشكل.

«٦ ، ٣ $\sqrt{7}$ ، ٣ $\sqrt{7}$ ، ٦ نيوتن»

---

٤٩ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : أ ء // ب حـ ، أ ب ⊥ ب حـ ، أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٩ سم ، أ ء = ٣ سم أثرت القوى ق١ ، ق٢ ، ق٣ ، ق٤ نيوتن فى الاتجاهات ء أ ، حـ ء ، ب حـ ، أ ب على الترتيب فإذا كانت المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه يساوى ٣٦٠ نيوتن.سم فى الاتجاه أ ب حـ ء **فأوجد مقدار : ق١ ، ق٢ ، ق٣ ، ق٤**

«١٥ ، ٣٠ $\sqrt{2}$ ، ٤٥ ، ٣٠ نيوتن»

---

٥٠ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : ق(∠ أ) = ق(∠ ب) = ٩٠° ، أ ب = ٨ سم ، أ ء = ٩ سم ، ب حـ = ١٥ سم ، هـ ، ى منتصفا أ ب ، ب حـ أثرت قوى مقاديرها ١٨ ، ٢٠ ، ٥١ ، ١٧ نيوتن فى أ ء ، ء حـ ، حـ أ ، هـ ى أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا واحسب معيار عزمه.

«٨٤ نيوتن.سم»

٥١ أبحء مربع طول ضلعه ٦٠ سم أثرت قوى مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، ٨٠ ، ٥٠ نيوتن في أب ، بح ، حء ، ءأ على الترتيب واثرت قوتان مقداراهما ٥٠ $\sqrt{٢}$ ، ٢٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن فى أح ، ءب على الترتيب. برهن أن المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه ٤٨٠٠ نيوتن.سم.

---

٥٢ أبحء مربع طول ضلعه ١٠ سم ، هـ ∈ حب ، و ∈ حء ، بحيث كان : حهـ = حو = ٣٠ سم. أثرت قوى مقاديرها ٤٠ ، ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ٢٠ $\sqrt{٢}$ ث. كجم فى أب ، بح ، حء ، ءأ ، هـو على الترتيب.

أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد عزمه. «١٠٠ ث.كجم.سم»

---

٥٣ (دور أول ٢٠٢٠) أبحء مستطيل فيه : أب = ٣٠ سم ، بح = ٤٠ سم أثرت قوى مقاديرها ١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٥ ث.كجم فى أب ، بح ، حء ، ءأ ، أح على الترتيب.

برهن أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه. «٢٢٠ ث.كجم.سم»

---

٥٤ أبحء مستطيل فيه : بح = ٢ أب ، هـ ، و منتصفا أء ، بح أثرت القوى التى مقاديرها ٤ ، ٤ ، ١٤ $\sqrt{٢}$ ، ١٠ $\sqrt{٢}$ ثقل جرام فى هـأ ، أب ، بهـ ، ءو

أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا واحسب معيار عزمه بدلالة طول أب «٦٠ أب ثقل جم.سم»

---

٥٥ أبحء شبه منحرف قائم الزاوية فى ب ، أب // حء ، أب = ٦ سم ، بح = ١٦ سم ، حء = ١٨ سم ، هـ ∈ حء حيث : ءهـ = ٦ سم أثرت قوى مقاديرها ٤,٥ ، ١٢ ، ١٣,٥ ، ٣٠ ، ١٥ نيوتن فى أب ، بح ، حء ، ءأ ، بهـ

أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه. «٣٦٠ نيوتن.سم»

---

٥٦ أبحء شبه منحرف فيه : أء // بح ، ق(∠ب) = ٩٠° ، أب = ١٢ سم ، بح = ١٨ سم ، أء = ٩ سم ، أثرت القوى التى مقاديرها ٢٠٠ ، ٦٠٠ ، ٥٠٠ ، ١٢٠٠ ، ٣٠٠ $\sqrt{١٣}$ ث.كجم فى بأ ، بح ، حء ، ءأ ، أح على الترتيب.

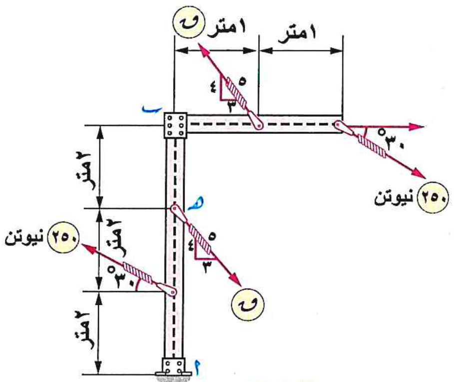
أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه. «١٠٨٠٠ ث.كجم.سم»

٥٧ $\overline{أبحء}$ مستطيل فيه : أب = ١٠ سم ، ب‌حـ = ٥ سم ، فإذا كانت و هي منتصف $\overline{أب}$ ، أثرت القوى التي مقاديرها ٤ ، ٥ ، ١٥ ، ٢ ، ٤ $\sqrt{٥}$ ، ٣ $\sqrt{٢}$ ثقل.كجم في $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{حب}$ ، $\overleftarrow{حء}$ ، $\overleftarrow{ءأ}$ ، $\overleftarrow{أح}$ ، $\overleftarrow{وح}$ على الترتيب أثبت أن هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا واحسب معيار عزمه. «٤٠ ث.جم.سم»

---

٥٨ في الشكل المقابل :

أوجد ق التي تجعل القياس الجبري لعزم الازدواج المحصل يساوي (١٥٠ − ٥٠٠ $\sqrt{٣}$) نيوتن.متر.

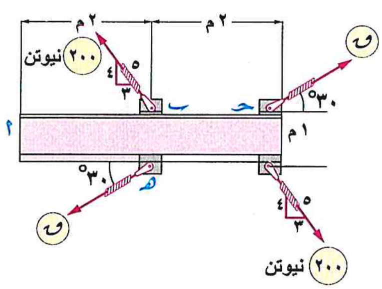


«٢٠٠ نيوتن»

---

٥٩ في الشكل المقابل :

يمثل قنطرة تؤثر عليها القوى الموضحة بالشكل إذا كان القياس الجبري لعزم الازدواج المحصل يساوي (٢٠٠ − ٢٠٠ $\sqrt{٣}$) نيوتن.م.



أوجد : ق «٤٠٠ نيوتن»

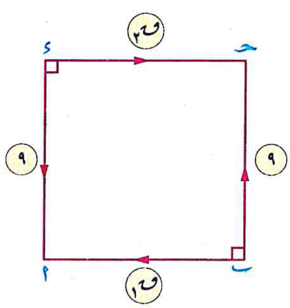
مسائل تقيس مهارات التفكير

٦٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) في الشكل المقابل :

أبحء مربع طول ضلعه ٤ سم أثرت القوى المبين مقاديرها على الرسم وكانت تكافئ ازدواج معيار عزمه = ٢٠ نيوتن.سم

فإن : $ق_١ = ق_٢ =$ ....



(أ) ٤ أ، ١٤ (ب) ١٤ أ، ٥٦ (جـ) ٤ أ، ٥٦ (د) ٥٦ أ، ٣٢

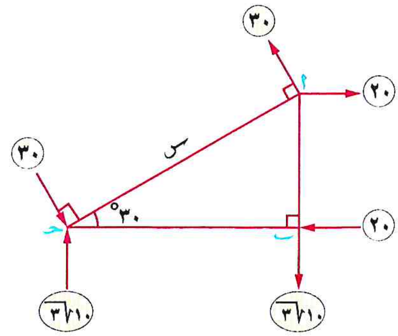
٢ في الشكل المقابل :

إذا كان القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل يساوى ١٠٠ نيوتن.سم

فإن : س = ... سم

(أ) ١٠ (ب) ٢٠

(جـ) ٢٥ (د) ٣٠



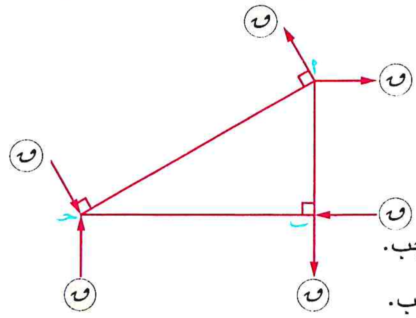
٣ مجموعة القوى فى الشكل المقابل ....

(أ) متزنة.

(ب) تكافئ قوة.

(جـ) تكافئ ازدواج القياس الجبرى لعزمه موجب.

(د) تكافئ ازدواج القياس الجبرى لعزمه سالب.



٤ في الشكل المقابل :

ثلاث قوى متوازية مقاسة بالنيوتن

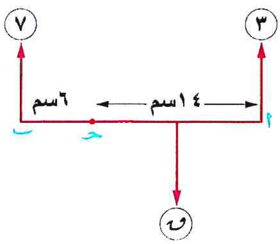
فإن كانت المجموعة تكون ازدواج فإن ....

(أ) ق = ١٠ نيوتن وتؤثر فى جـ

(ب) ق = ١٠ نيوتن وتؤثر فى ب

(جـ) ق = ٤ نيوتن وتؤثر فى أ

(د) ق = ١٠ نيوتن وتؤثر فى أى نقطة على القضيب غير نقطة جـ



---

٦١ أ ب جـ مثلث ، ى مركز الدائرة الداخلة ، أثرت خمس قوى فى أ ب ، ب ى ، أ جـ ، جـ ى ، ى أ على الترتيب فإذا كانت مقادير هذه القوى تمثل بالأطوال أ ب ، ى ب ، أ جـ ، جـ ى ، ٢ ى أ على الترتيب. فبرهن أنها تكافئ ازدواجًا وأوجد عزمه بدلالة أطوال أ ب ، أ جـ ، ونصف قطر الدائرة الداخلة متى تتوازن هذه القوى. «نق (أ جـ − أ ب) وحدة عزم»

---

٦٢ أ ب جـ ء هـ و مسدس منتظم طول ضلعه ١٠ سم أثرت قوى مقاديرها ٢ ، ٥ ، ٤ ، ٦ ، ١ ، ٣ نيوتن فى أ ب ، جـ ب ، جـ ء ، هـ ء ، هـ و ، أ و على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه القوة التى يجب أن تؤثر فى مركز المسدس لكى تؤول المجموعة إلى ازدواج ثم عيِّن عزمه. «$2\sqrt{3}$ نيوتن فى اتجاه جـ أ ، −٣٥ $\sqrt{3}$ نيوتن.سم»

الرياضيات التطبيقية

الاستاتيكا

يُصرف مجانًا مع هذا الكتاب:

- كتاب الديناميكا
- المراجعة المستمرة
- الإجابات

GPS

مكتبة الطلبة
للطبع والنشر والتوزيع
٣ شارع كامل صدقي - الفجالة
تليفون: ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٢٥٩٣٤٠١٢ /٠٢
www.gpseducation.com
الخط الساخن
١٥٠١٤

6 223007 312554