3
الصف
الثانوي

عصير الاحصاء

كتيب مفاهيم الاحصاء
وجميع الثغرات الهامة

إعداد:
محمد جابر

جمهورية الرياضيات

ملخص قوانين الباب الأول الارتباط والانحدار

الارتباط ← هو طريقة احصائية يمكننا من خلالها يا صديقي تحديد درجة ونوع العلاقة بين متغيرين وهما أي حاجتين (س)(ص) مثلاً.

أنواع الارتباط

ارتباط طردي ← يكون موجب (+)
لما يحدث إذا كان المتغيران يتزايدان معاً أو يتناقصان معاً يعني من الاخر يا صحبي في نفس الاتجاه.
مثلاً ← عدد ساعات العمل وأجر هذا العامل.

ارتباط عكسي ← يكون سالب (-)
لما يحدث إذا كان المتغيران احدهما يزداد والآخر ينقص يعني من الاخر في عكس الاتجاه
مثلاً ← العلاقة بين عدد العمال وعدد ساعات العمل.

ارتباط منعدم ← يساوي (صفر)
لما يحدث عندما لا توجد علاقة ارتباط بين المتغيرات
مثلاً ← العلاقة بين طول الطالب ودرجته في الامتحان.

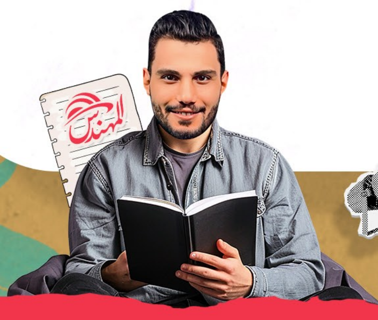
درجة الارتباط ومعامل الارتباط

درجة الارتباط يتم قياسها من خلال معامل الارتباط يسمى (ر)

معامل الارتباط ← هو مقياس كمي أو رقمي يقيس قوة الارتباط بين المتغيرين س، ص ويرمز له بالرمز (ر) وهو ر ∈ [-١، ١]

طردي تام | منعدم | عكسي تام
١ | ٠ | -١
طردي | عكسي

← تزداد القوة كلما اقتربنا من ١، -١ وتقل كلما اقتربنا إلى صفر.



خصائص معامل الارتباط

1) ر ∈ [-١ ، ١] ← -١ ≤ ر ≤ ١

تتراوح قيمة معامل الارتباط بين -١ ، ١

2) ر ← (+) في الارتباط الطردي

← (-) في الارتباط العكسي

← (صفر) في الارتباط المنعدم

3) يتم تحديد درجة الارتباط :-

(كما هو متفق عليه)

(ر) = صفر ← ارتباط منعدم

(ر) = ١ ← طردي تام

(ر) = -١ ← عكسي تام

٠ < ر < ٠٫٤ ← ضعيف (٠٫١ ، ٠٫٢ ، ٠٫٣)

٠٫٤ ≤ ر ≤ ٠٫٦ ← متوسط (٠٫٤ ، ٠٫٥ ، ٠٫٦)

٠٫٦ < ر < ١ ← قوي (٠٫٧ ، ٠٫٨ ، ٠٫٩)

4) ضع في بالك السالب يدل على العكسي والموجب يدل على الطردي وليس إشارة عدد.

خدع الامتحان على معامل الارتباط

هام

1) لو قالك معامل الارتباط بصفة عامة ← ر ∈ [-١ ، ١] ، -١ ≤ ر ≤ ١

2) لو قالك معامل الارتباط الطردي له ر ∈ [٠ ، ١] ، ٠ ≤ ر ≤ ١

3) لو قالك معامل الارتباط العكسي له ر ∈ [-١ ، ٠[، -١ ≤ ر < ٠

4) لو قالك معامل الارتباط غير طردي له ر ∈ [-١ ، ٠] ، -١ ≤ ر ≤ ٠

5) لو قالك معامل الارتباط غير عكسي له ر ∈ [٠ ، ١] ، ٠ ≤ ر ≤ ١

6) لو قالك معامل الارتباط غير تام له ر ∈]-١ ، ١[، -١ < ر < ١

7) لو قالك معامل الارتباط التام له ر ∈ {-١ ، ١}

العلاقات المشهورة

١- العلاقة بين طول ضلع المربع ومحيطه ← طردي تام

٢- العلاقة بين طول ضلع المربع ومساحته ← علاقة غير خطية

٣- العلاقة بين طول ضلع المثلث المتساوي الأضلاع ومحيطه ← علاقة طردي تام

٤- العلاقة بين طول نصف قطر الدائرة ومحيطها ← طردي تام

٥- مستطيل محيطه ٨ سم فإن معامل الارتباط بين طوله وعرضه ← عكسي تام

معامل الارتباط الخطي لبيرسون

← يتعامل مع البيانات الكمية (العددية أو الرقمية) فقط

← هو أدق من ارتباط سبيرمان لأنه يتعامل مع القيم نفسها وليس الترتيب يا برنسا.

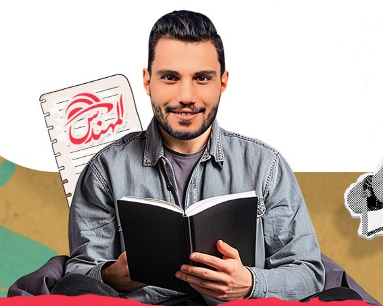
لحساب معامل ارتباط بيرسون نكون جدول من ٥ أعمدة كالآتي:

س	ص	$س^2$	$ص^2$	س ص
مجـ س	مجـ ص	مجـ $س^2$	مجـ $ص^2$	مجـ س ص

$$ر = \frac{ن \text{ مجـ } س ص - (\text{مجـ } س)(\text{مجـ } ص)}{\sqrt{ن \text{ مجـ } س^2 - (\text{مجـ } س)^2} \times \sqrt{ن \text{ مجـ } ص^2 - (\text{مجـ } ص)^2}}$$

حيث مجـ ← رمز المجموع

ن ← عدد قيم أو مفردات



خدع بيرسون في الامتحان

قانون بيرسون مكون من بسط ومقام ولأن المقام يكون دائماً موجب لأن الجذر يلغي السالب فإن البسط يا صديقي المحترم هو من يتحكم في تحديد نوع ودرجة الارتباط كالآتي:

١ لو البسط بتاع بيرسون > صفر ← يدل على الارتباط طردي ر ∈]٠، ١]

← ن مجـ س ص − مجـ س × مجـ ص > صفر

← ن مجـ س ص > مجـ س × مجـ ص

← $\frac{\text{ن مجـ س ص}}{\text{مجـ س × مجـ ص}}$ > ١

٢ لو البسط بتاع بيرسون < صفر ← يدل على الارتباط عكسي ر ∈ [−١، ٠[

← ن مجـ س ص − مجـ س × مجـ ص < صفر

← ن مجـ س ص < مجـ س × مجـ ص

← $\frac{\text{ن مجـ س ص}}{\text{مجـ س × مجـ ص}}$ < ١

٣ لو البسط بتاع بيرسون = صفر ← يدل على الارتباط منعدم

← ن مجـ س ص − مجـ س × مجـ ص = صفر

← ن مجـ س ص = مجـ س × مجـ ص

← $\frac{\text{ن مجـ س ص}}{\text{مجـ س × مجـ ص}}$ = ١

ملاحظات آخيرة على بيرسون

١ ن = $\frac{\text{مجـ س × مجـ ص}}{\text{مجـ س ص}}$ فإن: ر = صفر (منعدم)

٢ ن > $\frac{\text{مجـ س × مجـ ص}}{\text{مجـ س ص}}$ فإن: ر ∈]٠، ١] (طردي)

٣ ن < $\frac{\text{مجـ س × مجـ ص}}{\text{مجـ س ص}}$ فإن: ر ∈ [−١، ٠[(عكسي)

٤ س̄ = $\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}$ ، مجـ س = س̄ × ن

ص̄ = $\frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}$ ، مجـ ص = ص̄ × ن

المجموع = الوسط × العدد

أو الوسط = $\frac{\text{المجموع}}{\text{العدد}}$

ملاحظة هامة جداً :-

في حالة البيانات الرقمية الكبيرة (الضخمة) نحسب معامل الارتباط لبيرسون للقيم المعدلة فيكون هو نفس معامل الارتباط الخطي لبيرسون بين القيم الأصلية س، ص

حيث $س' = س - \overline{س}$

$ص' = ص - \overline{ص}$

ولتحويل القيمة الضخمة أو الكبيرة نطرحها من قيمة الوسط الحسابي

مثال: إذا كانت س' = س - ٥ ، ص' = ص - ٤ وكان معامل الارتباط الخطي لبيرسون بين س'، ص' هو ٠,٧ فإن معامل الارتباط الخطي لبيرسون بين س، ص هو ....

[٠,٥ ، ٠,٧ ، -٠,٧ ، ٠,٧٥]

معامل الارتباط المعدل س'، ص' هو نفس الأصلي بين س، ص لا يتغير يا صديقي (٠,٧)

معامل ارتباط الرتب لسبيرمان

← يتعامل مع البيانات الوصفية والكمية (العددية).

← أقل دقة من معامل ارتباط بيرسون (الخطي) لأنه يتعامل مع الرتب وليس القيم.

لحساب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان :

← نروح نحسب الأول رتب س رتب ص (تصاعدي أو تنازلي براحتنا المهم الاتنين زي بعض) ولو كان العنصر متكرر لازم نعدل بينهم ونجيب الوسط الحسابي

← نروح نكون جدول من ٤ أعمدة.

رتب س	رتب ص	ف	ف²
		مجـ ف = ٠	مجـ ف²

حيث ف = رتب س - رتب ص

← نعوض في قانون سبيرمان

$$ر = 1 - \frac{6 \text{ مج } ف^2}{ن(ن^2-1)}$$

أو

$$ر = 1 - \frac{6 \text{ مج } ف^2}{ن^3 - ن}$$

خدع سبيرمان

1 إذا كان مج $ف^2$ = صفر

← فإن الارتباط طردي تام ($ر = 1$)

2 عند حساب سبيرمان متى يكون الارتباط منعدم في الحالات الآتية

أ) مج $ف^2 = \frac{ن(ن^2-1)}{6}$

ب) 6 مج $ف^2 = ن(ن^2-1)$

ج) 6 مج $ف^2 = ن^3 - ن$

→ $ر$ = صفر

3 إذا كان $0 <$ مج $ف^2 < \frac{ن(ن^2-1)}{6}$

← فإن الارتباط بين س، ص طردي

4 إذا كان 6 مج $ف^2 = 2ن(ن^2-1)$

← فإن الارتباط يكون عكسي تام

5 عند حساب معامل ارتباط سبيرمان بين س، ص

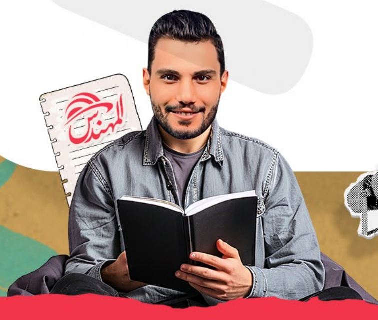
أ) مج ف = صفر (دائماً)

ب) مج [ر(س) - ر(ص)] = صفر

ج) مج $\{ر(س) - ر(ص)\}^2$ = مج $ف^2$

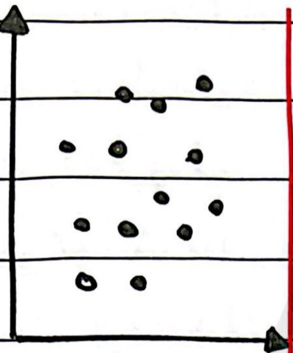
د) مج $ف^2 \neq$ (مج ف$)^2$

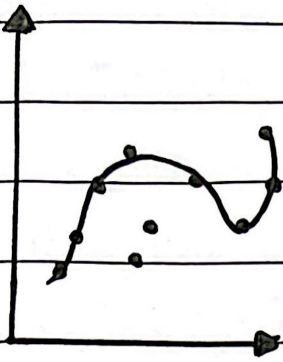
6 صفر $\leq \frac{6 \text{ مج } ف^2}{ن(ن^2-1)} \leq 2$



شكل الانتشار

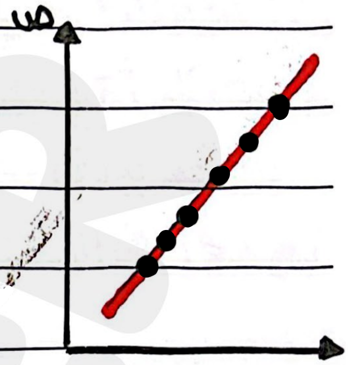
هو تمثيل بياني يعبر عن قيم (س،ص) في شكل نقط ويستخدم لتحديد نوع الارتباط وقوته.

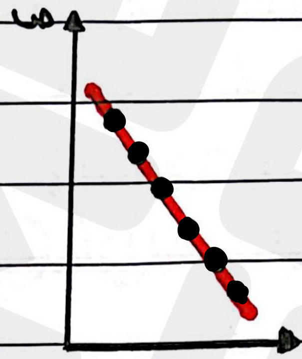




منعدم مفيش أي خط تقع عليه النقط ر = صفر

ارتباط غير خطي دا مش بندرسه احنا بندرس الخطي

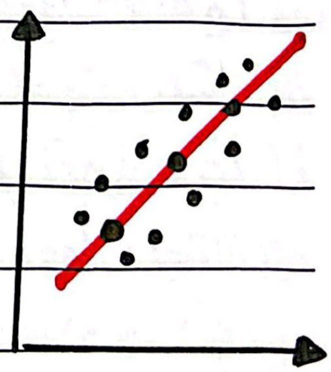


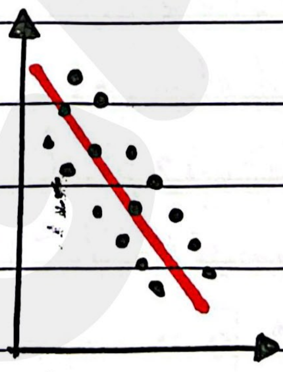


طردي تام
ر = 1
كل النقط تقع على خط
ميله موجب

عكسي تام
ر = -1
كل النقط تقع على خط
ميله سالب

الخلاصة ← الخط الواقع عليه النقط هو خط الانحدار وتزداد القوة كلما اقتربت النقاط منه حتى تصبح يا صديقي كلها على الخط ودا يسمى تام.





طردي غير تام
مش كل النقط على الخط

عكسي غير تام
مش كل النقط على الخط

فقرة لو قالك

هااام

[1] لو قالك جميع النقاط في شكل الانتشار تقع على خط مستقيم ميله موجب يبقى له طردي تام ر = 1

٢ لو قالك جميع النقاط في شكل الانتشار تقع على خط مستقيم ميله سالب يبقى
← عكسي تام $\boxed{ر = -١}$

٣ لو قالك جميع النقاط في شكل الانتشار تقع على خط مستقيم واحد يبقى ← ر ∈ {-١، ١}
أو دور في الاختيارات على ١ أو -١

٤ لو قالك جميع النقاط في شكل الانتشار تقع على خط واحد يصنع زاوية حادة يعني تقع بين]٠، ٩٠°[مع الاتجاه الموجب لمحور السينات
يبقى ← طردي تام $\boxed{ر = ١}$

٥ لو قالك جميع النقاط في شكل الانتشار تقع على خط واحد يصنع زاوية منفرجة يعني تقع بين]٩٠°، ١٨٠°[مع الاتجاه الموجب لمحور السينات
يبقى ← عكسي تام $\boxed{ر = -١}$

٦ إذا كانت جميع النقاط تقع على خط الانحدار فإن الارتباط إما طردي تام أو عكسي تام وعندها لا يوجد مقدار خطأ يا معجبي ∴ مقدار الخطأ = صفر

معادلة خط الانحدار

الانحدار ← هو أسلوب احصائي يمكن بواسطته تقدير أحد المتغيرين بواسطة الاخر ويتم عن طريق معادلة الخط

← معادلة خط الانحدار هي:

$$\boxed{\hat{ص} = أ + ب س}$$

حيث: ص ← المتغير التابع
س ← المتغير المستقل
ب ← معامل الانحدار (الميل)
أ ← الجزء المقطوع من محور ص

لإيجاد معادلة خط الانحدار:

نكون جدول من أربع أعمدة كالآتي

$س$	$ص$	$س^2$	$س ص$
$\sum س$	$\sum ص$	$\sum س^2$	$\sum س ص$

فنحصل على $\sum س$، $\sum ص$، $\sum س^2$، $\sum س ص$

← نحسب معامل الانحدار الأول (ب) من القانون ده

$$ب = \frac{ن \sum س ص - \sum س \times \sum ص}{ن \sum س^2 - (\sum س)^2}$$

← ثم بعد كده ياصيقي هنحسب أ من القانون ده

$$أ = \frac{\sum ص - ب \sum س}{ن}$$

← ثم نكتب معادلة الخط

$$\hat{ص} = أ + ب س$$

استخدامات معادلة خط الانحدار

1. التنبؤ بقيمة ص إذا علم س
2. حساب مقدار الخطأ في ص عند قيمة معينة لـ س

← نجيب قيمة ص الجدولية عند س المعطاة

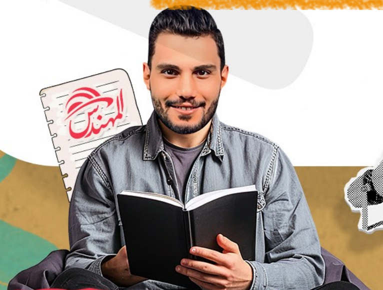
← نجيب قيمة ص من معادلة الانحدار عند س المعطاة

$$\text{مقدار الخطأ} = \left| ص_{\text{القيمة الجدولية}} - ص_{\text{المتوقعة}} \right|$$

ملحوظات ياصيقي في الامتحانات

1. معامل الانحدار (ب) أو يسمى الميل أو يسمى معامل س أو يسمى معامل المتغير المستقل له نفس إشارة معامل الارتباط (ر) ولكن ليس له نفس القيمة

ويكون $ر \times ب > \text{صفر}$ دائماً

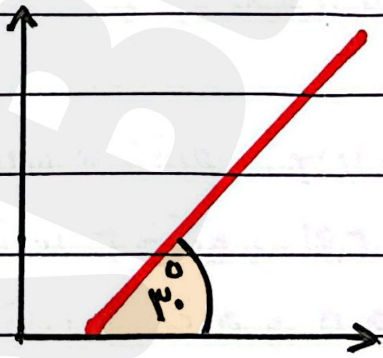


٢ إذا كان :

ب > ٠	ب < ٠	ر × ب > ٠
ر > ٠	ر < ٠	دائماً
طردي	عكسي	
ميل ← (+)	ميل ← (−)	
معامل س > صفر	معامل س < ٠	

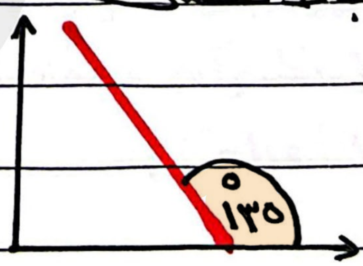
٣ إذا كان خط الانحدار يصنع زاوية حادة يعني تقع بين ٠°، ٩٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن الارتباط طردي

زي



٤ إذا كان خط الانحدار يصنع زاوية منفرجة يعني تقع بين ٩٠°، ١٨٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن الارتباط عكسي

زي



٥ إزاي احسب معامل الانحدار ب (اللي هو ميل الخط أو معامل س)

أ من القانون بتاعه لو معايا المجموع

$$ب = \frac{ن\ مج\ س\ ص - مج\ س \times مج\ ص}{ن\ مج\ س^2 - (مج\ س)^2}$$

ب لو معايا نقطتين على الخط

$$ب = \frac{فرق\ الصادات}{فرق\ السينات} = \frac{التغير\ الرأسي}{التغير\ الأفقي}$$

ج لو معايا معادلة الخط

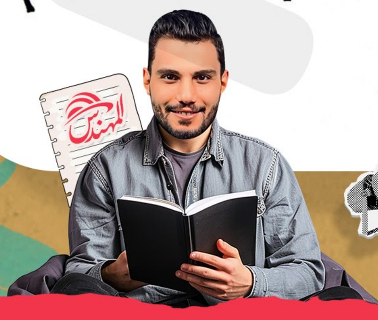
يبقى ب هو معامل س بس بشرط يا برنس لازم س ، ص في طرفين مختلفين عن بعض

د لو معايا زاوية (θ)

$$ب = ظا\ θ$$

٦ مقدار الخطأ = صفر

في حالة جميع النقط تقع على الخط إذا كان (طردي تام / عكسي تام)



ملخص قوانين الباب الثانى الساق والاوراق والربيعات

ماهو مخطط الساق والاوراق :

← هو طريقة عمودية لعرض البيانات العددية فقط وهى تعتمد على القيمة المكانية للارقام حيث الاحاد دائماً هى الورقة وباقى العدد هو الساق

← ماهو المفتاح ؟

٧/٣ = ٣٧	← ورقة ٧ ساق ٣
٦/١٤ = ١٤٦	← ورقة ٦ ساق ١٤
٤/٥ = ٥٤	← ورقة ٤ ساق ٥
٢/١٥ = ١٥٢	← ورقة ٢ ساق ١٥

← خطوات مخطط الساق والاوراق

[١] نجيب أكبر رقم وأصغر رقم ونكون المخطط (حط رأسى شماله الساق ويمينه الأوراق)

[٢] وقدام كل ساق نرص الاوراق من البيانات

[٣] نرتب الاوراق تصاعدياً

[٤] نعطى مفتاح مناسب للبيانات

مميزات الساق والاوراق

[١] تكون البيانات مرتبة تصاعدياً من أعلى للاسفل (كل ما بتنزل القيمة بتزيد) وبناء عليه يكون أول عنصر فى المخطط هو أصغر عنصر وآخر عنصر فى المخطط هو أكبر قيمة على الترتيب.

[٢] عدد البيانات (ن) = عدد الاوراق

[٣] يمكن من خلاله استرجاع البيانات الاصلية كاملة وحساب المدى والوسيط والمنوال والوسط الحسابى.

عيوب السابق والاوراق

مش بنعمل مع البيانات ذات الاحجام الكبيرة.

ملاحظات هامة جداً يا محبي

أو تنازلياً براحتك يا محبي

المهم قبل حساب نرتب

لو عدد القيم ن ← فردي	لو عدد القيم ن ← زوجي
رتبة الوسيط $\frac{ن+1}{2}$	رتبة الوسيط $\frac{ن}{2}$ ، $\frac{ن}{2}+1$

من مقاييس النزعة المركزية :-

[1] الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$

[2] المنوال ← هو القيمة الأكثر تكراراً أو شيوعاً في البيانات

← إذا كانت البيانات مفيهاش تكرار يبقى مفيش منوال

← إذا كان هناك أكثر من رقم تكرروا بنفس العدد يبقى المنوال هو كل الارقام اللي تكررت بنفس العدد

[3] الوسيط ← هو القيمة التي تتوسط مجموعة من القيم بس بشرط الترتيب أولاً تصاعدياً

من مقاييس التشتت

المدى = أكبر قيمة − أصغر قيمة

هاااام جداً

← لدراسة التباين بين مجموعتين من المدى إذا كانت مدى المجموعة الأولى > مدى الثانية

∴ المجموعة الأولى هي الأكثر تبايناً لان لها أكبر مدى يا محبي المحترم

*لَا يهم كيفَ تمشي ببطْء مَا دُمت لا تَتوقف.

It does not matter how slowly you go as long as you do not stop.

مخطط الساق والأوراق المزدوج

← هو مخطط لمجموعتين من البيانات ولتعيينة نقوم بالآتي:

$\boxed{1}$ نجيب أكبر وأصغر رقم في البيانات

$\boxed{2}$ نكون جدول نكون الساق في منتصفه ويمينه أوراق المجموعة الأولى وشماله أوراق المجموعة الثانية.

$\boxed{3}$ نرتب أوراق كل مجموعة ثم نرتبها تصاعدياً.

المجموعة الأولى	الساق	المجموعة الثانية

الربيعات

← هي أحد مقاييس النزعة المركزية لقياس التشتت بين البيانات المفردة والمبوبة وهي تقسم البيانات إلى أربعة أقسام متساوية عند الترتيب وعددها ٣ ربيعات

$\frac{1}{4}$ البيانات		$\frac{1}{4}$ البيانات		$\frac{1}{4}$ البيانات		$\frac{1}{4}$ البيانات
٢٥٪		٢٥٪		٢٥٪		٢٥٪
	ر٣		ر٢		ر١	
	الربيع الأعلى		الوسيط		الربيع الأدنى	

ر١ ← يسمى الربيع الأول (الأدنى) وهو الربيع الذي يسبقه ربع البيانات ٢٥٪ ويليه ثلاثة أرباع البيانات ٧٥٪

ر٢ ← يسمى الربيع الثاني (الوسيط) وهو الربيع الذي يسبقه نصف البيانات ٥٠٪ ويليه النصف الآخر ٥٠٪

ر٣ ← يسمى الربيع الثالث (الأعلى) وهو الربيع الذي يسبقه ثلاث أرباع البيانات ٧٥٪ ويليه ربع البيانات ٢٥٪

تعيين الربيعات من البيانات المفردة (عندنا حالتان)

١ الحالة الأولى

← عدد البيانات = ن

ن+١ ← يقبل القسمة ÷ ٤

فإن الربيعات هي إحدى قيم البيانات المعطاة ويعين مباشرة منها على حسب ترتيب (هاااام)

رتبة ر١ = (ن+١) / ٤

رتبة ر٢ = ٢(ن+١) / ٤ = ٢× الرتبة الأول

رتبة ر٣ = ٣(ن+١) / ٤ = ٣× الرتبة الأول

٢ الحالة الثانية

← عدد البيانات = ن

ن+١ ← لا تقبل القسمة ÷ ٤ (عشرية)

(أ) نعيين الرتب الأول من نفس القوانين

(ب) نستخدم القانون ده لتحديد قيم

ر = القيمة السابقة + (فرق القيم) (الفكة الجزء العشري للترتيب)

٣ قوانين هامة (جداً)

(أ) نصف المدى الربيعي (الانحراف الربيعي)

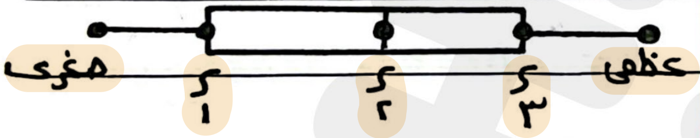
← أحد مقاييس التشتت

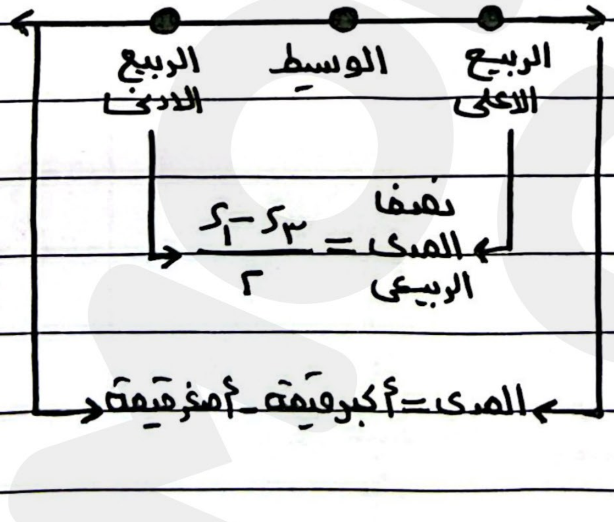
نصف المدى الربيعي = (ر٣ − ر١) / ٢

(ب) المدى الربيعي = ر٣ − ر١

(جـ) المدى = أكبر قيمة − أصغر قيمة

٤ التمثيل الصندوقي :





الربيعات من الجدول التكرارية

الخطوات جبرياً :-

[1] ننشئ جدول تكراري متجمع صاعد

[2] نعين ترتيب الربيعات

رتبة $ر_1 = \frac{ن}{4}$

رتبة $ر_2 = \frac{2ن}{4}$

رتبة $ر_3 = \frac{3ن}{4}$

حيث (ن) مجموع التكرار

[3] نعين الربيعات من القانون ده :-

$$ر = \text{بداية فترة الربيع} + \frac{\text{ترتيب الربيع} - \text{التكرار السابق}}{\text{التكرار المتأخر}} \times \text{طول الفترة}$$

$$ر = م + \frac{ت - ك_1}{ك_2 - ك_1} \times ل$$

حيث $م$ ← بداية فترة الربيع

$ت$ ← ترتيب الربيع

$ك_1$ ← التكرار السابق

$ك_2$ ← التكرار اللاحق

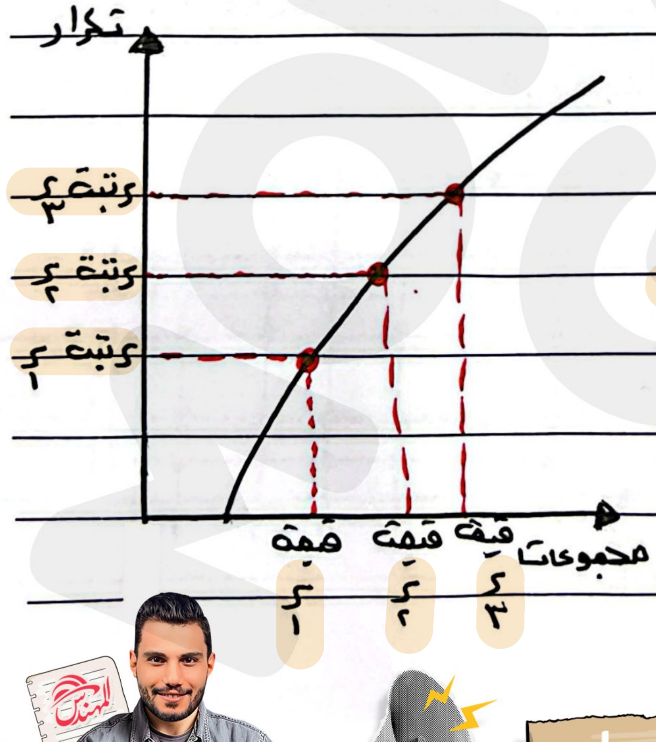
$ل$ ← طول الفترة الربيعية

الخطوات بيانياً :-

[1] ننشئ جدول تكرار متجمع صاعد

[2] نعين ترتيب الربيعات (بنفس قوانين الجبري)

[3] عند كل رتبة من رتب الرباعيات نرسم خطاً أفقياً يقطع المنحنى في نقطة فيكون قيمة الربيع هي مسقط هذه النقطة على المحور الأفقي كما موضح بالشكل



ملخص قوانين الباب الثالث الاحتمالات

التجربة العشوائية ← هي تجربة نستطيع تحديد نواتجها مسبقاً قبل حدوثها ولكن لا نعلم أي منها سيحدث بالفعل.

زى ← حجر النرد
← قطعة النقود
← سحب الكروت

فضاء العينة ← هو مجموعة كل النواتج لنتاعت التجربة العشوائية ويرمز له بالرمز (ف) أما عدد عناصر فضاء العينة يرمز له بالرمز ن(ف)

أمثلة فضاء العينة المحترم

زى [١] فضاء العينة لالقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة

ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

←

ن(ف) = ٦

[٢] فضاء العينة لالقاء قطعة نقود مرة واحدة

ف = {ص، ك}

← ن(ف) = ٢

[٣] سحب كروت مرقمة من ١ إلى ٥

ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥}

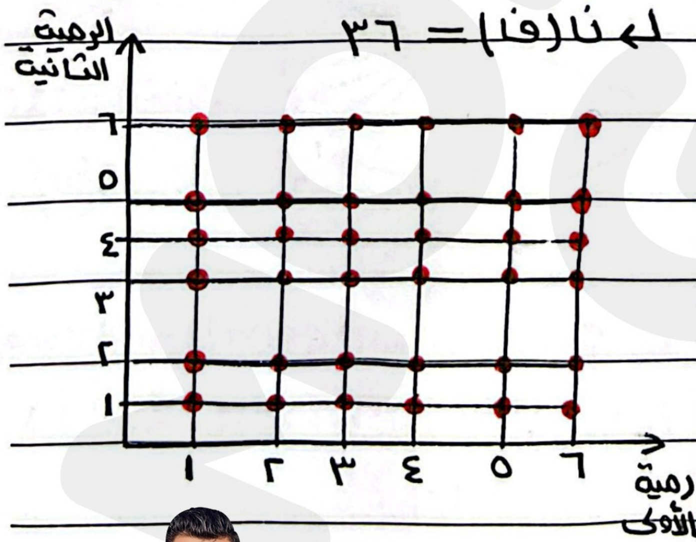
← ن(ف) = ٥

أمثلة فضاء العينة الغير محترم (معقد)

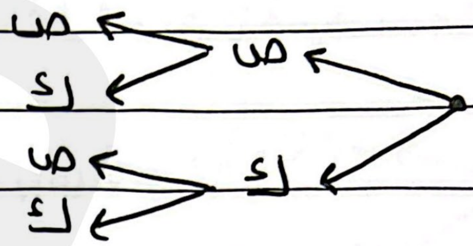
يتم تمثيله عن طريق: الشجرة
جدول
مخطط هندسي

[١] كل رمية من نفس الحاجة ← زى القاء حجر منتظم مرتين

← ن(ف) = ٣٦



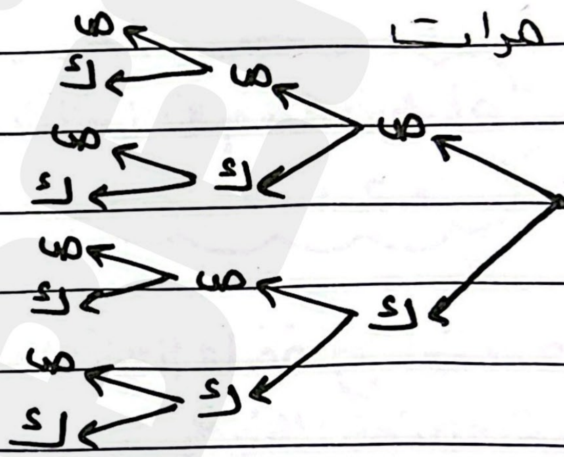
← زي القاء قطعة نقود مرتين



ف = { (ص،ص) ، (ص،ك) ، (ك،ص) ، (ك،ك) }

← ن(ف) = ٤

← زي القاء قطعة نقود ثلاث مرات



ف = { (ص،ص،ص) ، (ص،ص،ك) ، (ص،ك،ص) ، (ص،ك،ك) ، (ك،ص،ص) ، (ك،ص،ك) ، (ك،ك،ص) ، (ك،ك،ك) }

← ن(ف) = ٨

قانون هاااام

← لو كنا رمية من نفس النفس

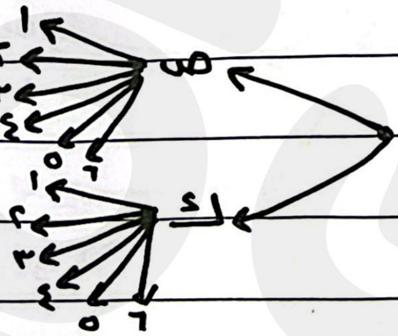
يبقى عدد عناصر فضاء العينة

ن(ف) = (عدد النواتج)^{عدد الرميات}

قطعة النقود	حجر النرد
عدد النواتج ← ٢	عدد النواتج ← ٦
لو مرة ← ن(ف) = $٢^١$ = ٢	لو مرة ن(ف) = $٦^١$ = ٦
لو مرتين ← ن(ف) = $٢^٢$ = ٤	لو مرتين ن(ف) = $٦^٢$ = ٣٦
لو ٣ مرات ← ن(ف) = $٢^٣$ = ٨	لو ٣ مرات ن(ف) = $٦^٣$ = ٢١٦
وهكذا	وهكذا .....

[٢] كنا حاجة مش من نفس الحاجة

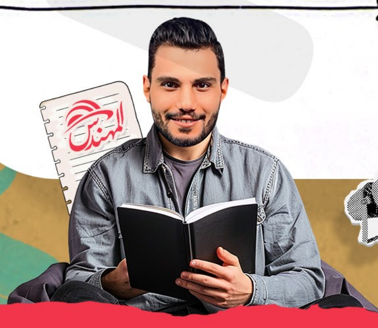
← زي القاء قطعة نقود ثم حجر نرد



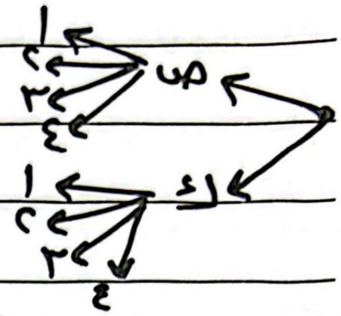
ن(ف) = ٢×٦

= [١٢]

ف = { (ص،١) ، (ص،٢) ، (ص،٣) ، (ص،٤) ، (ص،٥) ، (ص،٦) ، (ك،١) ، (ك،٢) ، (ك،٣) ، (ك،٤) ، (ك،٥) ، (ك،٦) }



← زي إلقاء قطعة نقود ثم كروت مرقمة من ١ إلى ٤



ن(ف) = ٢×٤

= ٨

ف = { (ص،١)، (ص،٢)، (ص،٣)، (ص،٤)، (ك،١)، (ك،٢)، (ك،٣)، (ك،٤) }

قانون مهم في الحالة دي

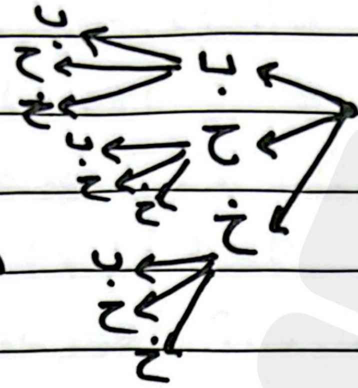
عدد نواتج فضاء العينة لحاجتين مش من نفس النوع

ن(ف) = عدد الأولى × عدد الثانية

$\boxed{٣}$ سحب كرات واحدة تلو الأخرى

مع الإحلال	بدون الإحلال
(مع الإرجاع)	(بدون إرجاع)
(مع التكرار)	(بدون تكرار)

← زي سحب ٣ كرات بيضاء، حمراء، خضراء مع الإحلال



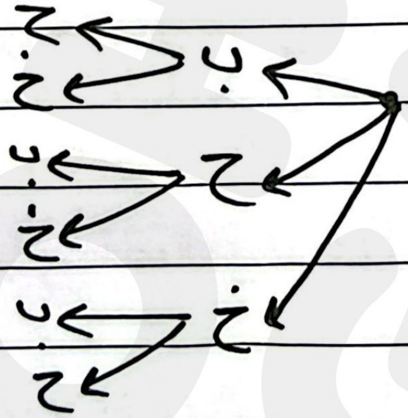
ن(ف) = $(٣)^٢$

= $\boxed{9}$

مسموح بالتكرار عشان مع الإحلال

ف = { (ب،ب)، (ب،ح)، (ب،خ)، (ح،ب)، (ح،ح)، (ح،خ)، (خ،ب)، (خ،ح)، (خ،خ) }

← زي سحب ٣ كرات بيضاء، حمراء، خضراء بدون إحلال



ن(ف) = ٦

غير مسموح بالتكرار عشان كلمة بدون إحلال

ف = { (ب،ح)، (ب،خ)، (ح،ب)، (ح،خ)، (خ،ب)، (خ،ح) }

الحدث ← هو مجموعة { } جزئية من فضاء العينة

ويسمى بأسماء اللغة العربية أ، ب، ج

أنواع الحدث

[١] الحدث المؤكد ← هو حدث لابد من وقوعه ويرمز له ف

زي: حدث ظهور صورة أو كتابة

ف = {ص، ك}

[٢] الحدث المستحيل ← هو حدث لا يمكن وقوعه ويرمز له ∅

زي: حدث ظهور العدد ٧ في حجر النرد ← ∅

[٣] الحدث البسيط (الأولي) ← هو حدث مكون من عنصر واحد فقط داخل قوس مجموعة {x}

زي: أ حدث ظهور عدد فردي غير أولي ← {١}

ب حدث ظهور عدد زوجي أولي ← {٢}

مثال لفهم الأحداث

عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة

ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

أ حدث ظهور عدد فردي

أ = {١، ٣، ٥}

ب حدث ظهور عدد أكبر من ٤

ب = {٥، ٦}

ج حدث ظهور عدد أقل من ٢

ج = {١} ← حدث أولي بسيط

د حدث ظهور عدد أكبر من ٦

د = ∅ = { } ← حدث مستحيل

هـ حدث الأعداد من ١ إلى ٦

ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} ← حدث مؤكد (ف)

العمليات على الأحداث

[١] عملية التقاطع (خد المشترك)

← أ ∩ ب = ب ∩ أ (التقاطع إبدالي)

← و ، معاً

[٢] عملية الاتحاد (خد الكل بدون تكرار)

↳ أ ∪ ب = ب ∪ أ (الاتحاد إبدالي)

↳ أو — كلاهما — أحدهما على الاقل

[٣] عملية الفرق

أ − ب ≠ ب − أ (الفرق ليس إبدالي)

أ − ب = أ ∩ ب′

↳ اللي موجود في أ ومش في ب

↳ أ − أ ∩ ب (الأول − التقاطع)

↳ وقوع أ وعدم وقوع ب

(وقوع أ فقط)

ب − أ = أ′ ∩ ب

↳ اللي موجود في ب ومش في أ

↳ ب − أ ∩ ب (الأول − التقاطع)

↳ وقوع ب وعدم وقوع (أ)

(وقوع ب فقط)

[٤] الحدث المكمل (أ′)

↳ هو عدم حدوث الحدث

زي ↳ أ′ = ف − أ

↳ عدم حدوث أ

↳ ب′ = ف − ب

↳ عدم حدوث ب

↳ (أ ∩ ب)′ = ف − أ ∩ ب

↳ عدم حدوث التقاطع

وهكذا ....

مثال لمهم الأحداث

بطاقات مرقمة من ٣ إلى ١٠

ف = {٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠}

أ ← حدث الأعداد الزوجية

أ = {٤، ٦، ٨، ١٠}

ب ← حدث الأعداد الأكبر من ٥

ب = {٦، ٧، ٨، ٩، ١٠}

(أ) أ ∩ ب = {٦، ٨، ١٠}

(ب) أ ∪ ب = {٤، ٦، ٨، ١٠، ٧، ٩}

(جـ) أ − ب = {٤}

(د) ب − أ = {٧، ٩}

الاحتمال

ماهو الاحتمال ← هو رقم يمثل حدوث الحدث

$$ل(أ) = \frac{ن(أ)}{ن(ف)} = \frac{\text{عدد الحدث}}{\text{عدد الكلي}}$$

هاام: $\boxed{0 \le ل(أ) \le 1}$

$\boxed{ل(أ) \in [0 ، 1]}$

الحدث المستحيل ← $\emptyset$
ولكن احتماله ياصديقي = صفر

الحدث المؤكد ← ف
ولكن احتماله = 1 = 100٪

قوانين ومسلمات الاحتمالات

لـ احمد يابطل وأوعى تفرط
والازم تحفظهم

٢ اخوات

$ل(أ \cap ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cup ب)$

$ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cap ب)$

الشفرة ← الأول + الثانى − الاخر

٢ اخوات

$ل(أ - ب) = ل(أ) - ل(أ \cap ب)$

$ل(ب - أ) = ل(ب) - ل(أ \cap ب)$

الشفرة ← الأول − التقاطع

٢ اخوات

$ل(أ' \cap ب) = ل(ب) - ل(أ \cap ب)$

$ل(أ \cap ب') = ل(أ) - ل(أ \cap ب)$

الشفرة ← اللى مش عليه شرطه − التقاطع

شوفت سهلين ازاى ياصحبى
احمد هانتا يابطل

٢ حوادث دي مورجان

ل(أ′ ∪ ب′) = ل(أ ∩ ب)′ = ١ − ل(أ ∩ ب)

ل(أ′ ∩ ب′) = ل(أ ∪ ب)′ = ١ − ل(أ ∪ ب)

الشفرة ← حط الشرطه بره وشقلب العلامة وهات المكملة

٢ حوادث

ل(أ′ ∪ ب) = ل(أ − ب)′

= ١ − ل(أ − ب)

ل(أ ∪ ب′) = ل(ب − أ)′

= ١ − ل(ب − أ)

قانون مهم

$\boxed{\text{ل(أ − ب)} \cup \text{ل(ب − أ)}}$

= ل(أ ∪ ب) − ل(أ ∩ ب)

= ل(أ) + ل(ب) − ٢ ل(أ ∩ ب)

← يسمى احتمال وقوع احدهما فقط

دالة الفروق

← ل(أ′ − ب) = ل(أ′ ∩ ب′)

= ل(أ ∪ ب)′ = ١ − ل(أ ∪ ب)

← ل(أ − ب′) = ل(أ ∩ ب)

← ل(أ′ − ب′) = ل(ب − أ)

= ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

← ل(ب′ − أ′) = ل(أ − ب)

= ل(أ) − ل(أ ∩ ب)

← ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب)

∴ ل(ب − أ) = ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

ملاحظات هامة جداً

[١] لو قالك أ ⊂ ب

← ل(أ ∩ ب) = ل(أ) ← الصغير

← ل(أ ∪ ب) = ل(ب) ← الكبير

[٢] لو قالك ب ⊂ أ

← ل(أ ∩ ب) = ل(ب) ← الصغير

← ل(أ ∪ ب) = ل(أ) ← الكبير

٣ لو قالك أ، ب حدثان متنافيان

← $أ \cap ب = \emptyset$

ل$(أ \cap ب)$ = صفر

أمثلة على الأحداث المتنافية

← لا يتقاطعان أبداً

زي أ، أ' الحدث ومكملته

$أ \cap أ' = \emptyset$

ل$(أ \cap أ')$ = صفر

هاااام لو قالك أ، ب، جـ، د

أحداث متنافية

← يبقى التقاطع بين أي اثنين $\emptyset$

ل$(أ \cap ب)$ = صفر

ل$(ب \cap جـ)$ = صفر

ل$(أ \cap جـ)$ = صفر

ل$(أ \cap د)$ = صفر

٤ لو قالك أ، ب حدثان متساويان

∴ ل(أ) = ل(ب) = $\frac{1}{2}$

ن(أ) = ن(ب)

٥ ف = {أ، ب، جـ، د}

ل(أ) + ل(ب) + ل(جـ) + ل(د) = 1

٦ $\frac{ل(أ)}{ل(أ')} = \frac{ل}{م}$

∴ ل(أ) = $\frac{ل}{ل+م}$ ، ل(أ') = $\frac{م}{ل+م}$

٧ لو كان ل(أ) = ل(أ')

∴ ل(أ) = $\frac{1}{2}$ ، ل(أ') = $\frac{1}{2}$

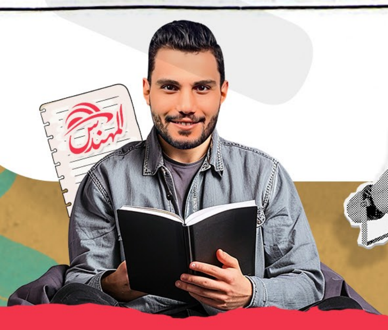
٨ كلمات هامة

على الأقل ← ينفع أكثر $\geq$

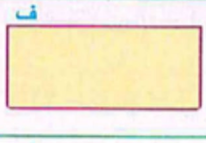
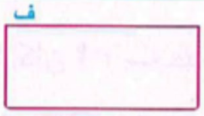
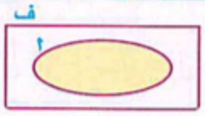
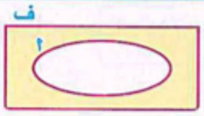
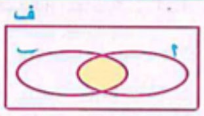
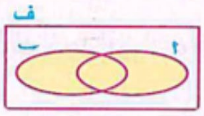
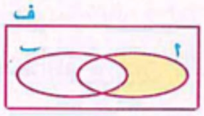
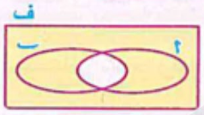
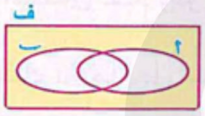
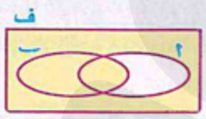
على الأكثر ← ينفع أقل $\leq$

مع الإحلال ← مع الإرجاع

بدون إحلال ← بدون إرجاع



بعض الاحتمالات وتمثيلها بشكل فن

احتمال الحدث	التعبير عنه لفظيًا	تمثيل الحدث بشكل فن
ل (ف)	* احتمال وقوع الحدث المؤكد = ١	
ل (∅)	* احتمال وقوع الحدث المستحيل = صفر	
ل (أ)	* احتمال وقوع الحدث أ	
ل (أ′) = ل (ف − أ)	* احتمال الحدث المكمل للحدث أ * احتمال عدم وقوع الحدث أ	
ل (أ ∩ ب)	* احتمال وقوع أ ، ب معًا.	
ل (أ ∪ ب)	* احتمال وقوع أ أو ب أو كليهما. * احتمال وقوع أحدهما على الأقل. * احتمال وقوع أى من الحدثين.	
ل (أ − ب) = ل (أ ∩ ب′) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب)	* احتمال وقوع أ وعدم وقوع ب * احتمال وقوع أ فقط.	
ل (أ′ ∪ ب′) = ل (أ ∩ ب)′ = ١ − ل (أ ∩ ب)	* احتمال عدم وقوع الحدثين معًا. * احتمال وقوع أحدهما على الأكثر.	
ل (أ′ ∩ ب′) = ل (أ ∪ ب)′ = ١ − ل (أ ∪ ب)	* احتمال عدم وقوع أى من الحدثين. * احتمال عدم وقوع أ وعدم وقوع ب	
ل (أ′ ∪ ب) = ل (أ − ب)′ = ١ − ل (أ − ب)	* احتمال وقوع ب أو عدم وقوع أ * احتمال عدم وقوع أ فقط.	
ل [(أ − ب) ∪ (ب − أ)] = ل (أ ∪ ب) − ل (أ ∩ ب)	* احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر. * احتمال وقوع أحد الحدثين فقط.	

قاموس الألفاظ

الرمز	اللفظ
ل(أ ∪ ب)	احتمال أحد الحدثين على الاقل (أو)
ل(أ ∩ ب)	احتمال وقوع الحدثين معاً (و)
ل(أ − ب)	احتمال حدوث أ فقط
ل(ب − أ)	احتمال حدوث ب فقط
ل(أ ∪ ب) − ل(أ ∩ ب)	احتما احدهما فقط
ل(أ)′	احتمال عدم وقوع الحدث أ
ل(أ ∩ ب)′	احتمال عدم وقوع الحدثين معاً
ل(أ ∪ ب)′	احتمال عدم وقوع اياً منهما
ل(أ ∩ ب′)	احتمال وقوع أ و عدم وقوع ب
ل(أ ∪ ب′)	احتمال وقوع أ أو عدم وقوع ب
ل(أ ∩ ب)′	احتمال وقوع أحد الحدثين على الاكثر

قاموس الاستنتاجات

الاستنتاج	المعطى
ل(أ ∩ ب) = صفر	الحدثين متنافيان
ل(أ ∪ ب) = ١	أ ∪ ب = ف
= ل(أ)′ = ل(أ ∩ ب)′	ل(ف − أ) ل(ف − (أ ∩ ب))
(١) ل(أ ∩ ب) = ل(أ) (٢) ل(أ ∪ ب) = ب	أ ⊃ ب
ل(أ) + ل(ب) + ل(جـ) = ١	ف = {أ ، ب ، جـ}
ل(أ) = ١/٢	ل(أ) = ل(أ)′ (مجموعهم ١ دائماً)

الاحتمال الشرطي

← هو احتمال وقوع أ بشرط وقوع الحدث ب

القوانين

← ل(أ/ب) = ل(أ∩ب) / ل(ب)

← ل(ب/أ) = ل(أ∩ب) / ل(أ)

← ل(أ'/ب) = ل(أ'∩ب) / ل(ب) = (ل(ب) − ل(أ∩ب)) / ل(ب)

= ل(ب−أ) / ل(ب) = 1 − ل(أ/ب)

← ل(أ/ب') = ل(أ∩ب') / ل(ب') = (ل(أ) − ل(أ∩ب)) / (1 − ل(ب))

= ل(أ−ب) / (1 − ل(ب))

← ل(أ'/ب') = ل(أ'∩ب') / ل(ب') = ل(أ∪ب)' / (1 − ل(ب))

= (1 − ل(أ∪ب)) / (1 − ل(ب))

← ل(ب'/أ') = ل(أ'∩ب') / ل(أ') = ل(أ∪ب)' / (1 − ل(أ))

= (1 − ل(أ∪ب)) / (1 − ل(أ))

الخلاصة الاحتمال الشرطي = التقاطع / الثاني

ملاحظات وتركات هامة على الاحتمال الشرطي

1 ل(أ/ب) ≠ ل(ب/أ)

2 لو قالك أ ⊂ ب

فإن ل(أ/ب) = ل(أ) / ل(ب)

ل(ب/أ) = ل(أ) / ل(أ) = 1

3 إذا كان أ، ب حدثان متنافيان

فإن: ل(أ/ب) = ل(ب/أ) = صفر

← عشان الاحداث المتنافية تقاطعهم = صفر يا صحبي.

٤ في الاحتمال الشرطي

التقاطع = الشرطي × الثاني

← $ل(أ \cap ب) = ل(أ/ب) \times ل(ب)$

$= ل(ب/أ) \times ل(أ)$

٥ كلمات تدل على الاحتمال الشرطي في المسائل اللفظية

← إذا كان - علماً بأن - إذا ظهر بشرط أن - إذا علمت أن

٦ $ل(ف/أ) = ١$

$ل(أ/ف) = ل(أ)$

الاحداث المستقلة والغير مستقلة

إذا كان أ، ب حدثان مستقلان

← يعني وقوع أحدهما لا يؤثر على الاخر

زي ← القاء قطعة نقود ثم حجر نرد

← اصابة هدف من لاعب أ ثم اصابة من لاعب ب

← نجاح طالب في مادة ثم نجاحه في مادة آخرى

← سحب كرات مع الاحلال (مع الارجاع)

هاااام

لو قالك أ، ب حدثان مستقلان

فان: $ل(أ \cap ب) = ل(أ) \times ل(ب)$

من الاخر التقاطع = حاصل ضربهم

← إذا كان أ، ب حدثان غير مستقلان

فإن ← وقوع أحدهما يؤثر بطريقة ما على الآخر.

ex: سحب كرات بدون إحلال (أو بدون ارجاع)

فإن: ل(أ ∩ ب) ≠ ل(أ) × ل(ب)

ملاحظات هامة جداً على الأحداث المستقلة

[1] إذا كان أَ، بَ مستقلان
فإن: أ، ب مستقلان أيضاً

[2] إذا كان أَ، ب مستقلان
فإن: أ، ب مستقلان أيضاً

[3] إذا كان أ ⊂ ب، أ، ب مستقلان
فإن: ب = ف

[4] إذا كان أ، ب مستقلان فإن:

(أ) ل(أ | ب) = ل(أ)

(ب) ل(ب | أ) = ل(ب)

[5] متى يكون الحدثان أ، ب متنافيان ومستقلان

إذا كان: ل(أ) × ل(ب) = صفر

إما ل(أ) = صفر | أو ل(ب) = صفر

[6] للإثبات أن الأحداث مستقلة

هتروح تجيب ← التقاطع

هتروح تجيب ← ل(أ) × ل(ب)

لو ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب)
∴ مستقلان

لو ل(أ ∩ ب) ≠ ل(أ) × ل(ب)
∴ غير مستقلان

تراكميات هامة على الباب الثالث

← ماهي الاعداد الزوجية

{0، 2، 4، 6، 8، 10، ......}

← ماهي الاعداد الفردية

{1، 3، 5، 7، 9، 11، ......}

← ماهي الاعداد الأولية

{2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، ......}

← ماهو العدد الزوجي الأولي

{2} ← حدث بسيط

← ماهو العدد الفردي غير أولي

{1} ← حدث بسيط

← ماهي الاعداد الفردية الأولية

{3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، ......}

← ماهي الاعداد مربع كامل (تكون لها جذر تربيعي)

{1، 4، 9، 16، 25، 36، 49، ......}

← ماهي الاعداد المكعب كامل (تكون لها جذر تكعيبي)

{1، 8، 27، 64، 125، ......}

← ماهي الاعداد المضاعفة لـ 3

{3، 6، 9، 12، 15، ......}

← ماهي الاعداد الزوجية في حجر النرد

{2، 4، 6} احتمالها = $\frac{1}{2}$

← ماهي الاعداد الفردية في حجر النرد

{1، 3، 5} احتمالها = $\frac{1}{2}$

← ماهي الاعداد الأولية في حجر النرد

{2، 3، 5} احتمالها = $\frac{1}{2}$

ملخص قوانين الباب الرابع المتغيرات العشوائية

المتغير العشوائي ← يرمز له بالرمز س وهو دالة مجالها فراغ العينة ف ومجالها المقابل مجموعة الاعداد الحقيقية ح

س : ف ← ح

أنواع المتغير العشوائي

متقطع (منفصل) (الباب الرابع) — متصل (مستمر) — طبيعي (الباب الخامس)

1 المتغير العشوائي المتقطع (المنفصل - الوثاب)

← هو متغير مداه قيم (س) محدودة (منتهية) أو قابلة للحصر والعد

يعني من الاخر بريسنا هو اي متغير قيمته قابلة للعد مثلاً

أ) عدد الحوادث خلال شهر

ب) عدد الاسهم لشخص

ج) عدد المكالمات للاسرة

د) عدد الطلاب خلال صفا معينا

مدى المتغير العشوائي المتقطع

← هو قيم المتغير (قيم س) بس بشرط دون تكرار

مثال توضيحي على مدى المتغير العشوائي :-

← في تجربة القاء قطعة نقود ٣ مرات فان مدى المتغير العشوائي الذي يعبر عن (عدد الكتابات - عدد الصور)

ص ← ٠ - ٣ = -٣

ك ← ١ - ٢ = -١

ص ← ١ - ٢ = -١

ك ← ٢ - ١ = ١

ص ← ١ - ٢ = -١

ك ← ٢ - ١ = ١

ص ← ٢ - ١ = ١

ك ← ٣ - ٠ = ٣

مدى هو {-٣ ، -١ ، ١ ، ٣}

هااام ماهى دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى المتقطع ؟

← هى عبارة عن دالة جبرية د(سر) ويتم التعبير عنها بجدول يحتوى على قيم س (مدى المتغير) مع احتمالاتها (د(سر)) ويسمى بجدول التوزيع الاحتمالى ويكون شكله كده ياصحبي :-

سر	س١	س٢	س٣	----
د(سر)	د(س١)	د(س٢)	د(س٣)	----

شروط جدول التوزيع الاحتمالى (هااام فى الامتحان)

١ د(سر) ≥ ٠ (كمية موجبة)
← لكل ر = ١، ٢، ٣، ....، ن

٢ Σ د(سر) = ١
← لازم مجموع اللى تحت فى الجدول = ١

قوانين هامة جداً

١ المتوسط (التوقع) أو الوسط الحسابى (μ)

← أحد مقاييس النزعة المركزية
← هو قيمة تتمركز حولها معظم قيم المتغير العشوائى

$$\mu = \sum \text{سر} \times \text{د(سر)}$$

← μ = مجموع العمود الثالث

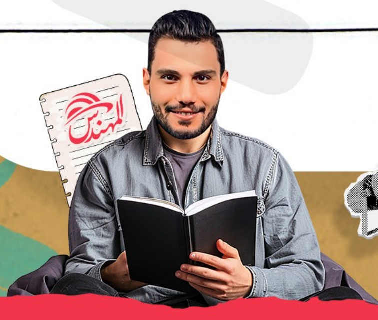
٢ التباين (σ^2)

← هو أحد مقاييس التشتت
← يبين انتشار أو تشتت قيم المتغير العشوائى عن متوسطه

$$\sigma^2 = \sum \text{سر}^2 \times \text{د(سر)} - \mu^2$$

← σ^2 = مجموع العمود الرابع − مربع العمود الثالث

← قيمة σ^2 ← لازم تكون عدد موجب



٣ الانحراف المعياري (σ)

← هو الجذر التربيعي للتباين

← هو أحد مقاييس التشتت

$$\sigma = \sqrt{\text{التباين}} = \sqrt{\sigma^2}$$

← فيه σ ← لازم تكون موجبة

٤ معامل الاختلاف (---%)

← هو مقياس نسبي للتشتت ولا يتأثر باختلاف وحدات القياس بين المجموعات أو الاختلاف المتوسطات

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\sigma}{\mu} \times 100$$

هااام توجد علاقة عكسية بين معامل الاختلاف والتجانس

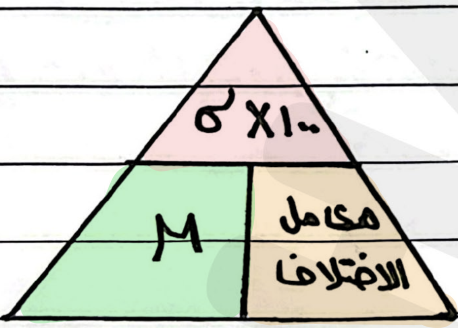
يعني: كلما كان معامل الاختلاف نسبته قليلة كلما كان أفضل وأكثر تجانساً

ملاحظات هامة

١ لإيجاد القوانين السابقة في المسائل نكون جدول من ٤ أعمدة كالآتي :-

$س_ر$	$د(س_ر)$	$س_ر \times د(س_ر)$	$س_ر^2 \times د(س_ر)$
المدى	الاحتمال	الأول × الثاني	مربع الأول × الثاني
Σ	1	μ (المتوسط)	مجموع العمود الرابع

٢



٣ $$\sigma^2 + \mu^2 = \Sigma\, س_ر^2 \cdot د(س_ر)$$

← جبناه من قانون التباين

[2] المتغير العشوائي المتصل (المستمر)

← هو متغير عشوائي مداه فترة (مغلقة أو مفتوحة) أي غير قابل للعد أو الحصر (غير منتهي)

زي (أ) طول أحد المرشحين لكرة سلة

(ب) العمر الافتراضي لأحد الهواتف

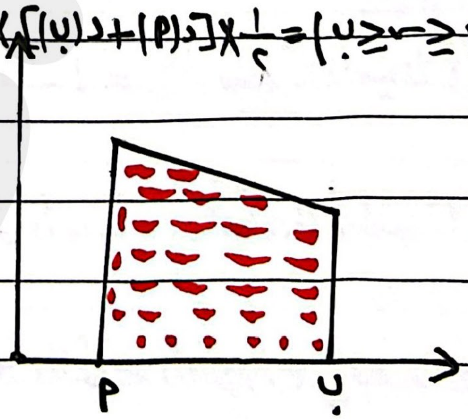
(جـ) الوقت الذي يستغرقه المعلم في شرح أحد دروس الاحصاء.

دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل.

← هي دالة جبرية مداه غير سالب

د(س) = { د(س) ، أ ≤ س ≤ ب
صفر ، فيما عدا ذلك

ل(أ ≤ س ≤ ب) = $\frac{1}{2}$ × [د(أ) + د(ب)] × (ب − أ)



شروط دالة الكثافة الاحتمالية :-

[1] مداه غير سالب (تقع فوق محور السينات)

[2] المساحة أسفل المنحنى وفوق محور السينات = 1

[3] ل(أ ≤ س ≤ ب) = 1

ل (المدى) = 1

ملاحظات على المتغير العشوائي المتصل

[1] للتأكد أن دالة الكثافة احتمالية لازم ل(أ ≤ س ≤ ب) = 1

[2] ازاي احسب الاحتمال للمتغير العشوائي المتصل

ل(أ ≤ س ≤ ب) = $\frac{1}{2}$ × [د(أ) + د(ب)] × (ب − أ)

= $\frac{1}{2}$ × [د(الأولى) + د(الثانية)] × (الثاني − الأول)

[3] ل(س = أ) = ل(س = ب) = صفر

تجربة بيرنولي

← هي تجربة عشوائية لها ناتجين فقط احداهما نجاح (ح) والاخر فشل (١-ح) .

ملاحظة ل(ح) + ل(١-ح) = ١ = ١٠٠٪

احتمال النجاح + احتمال الفشل = ١ = ١٠٠٪

مثال في تجربة القاء قطعة نقود إذا كان النجاح هو ظهور الصورة فانا:

(أ) ل(ح) = $\frac{١}{٢}$

(ب) ل(١-ح) = ١ - $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

ملاحظة مهمة

[١] لايجاد النجاح = ١ - ل(الفشل)

[٢] لايجاد الفشل = ١ - ل(النجاح)

والنجاح والفشل حدثان متنافيان

التوزيع الهندسي

تكرار تجربة بيرنولي حتى الوصول إلى أول مرة نجاح وتوقف التجربة (يمكن تكرار التجربة عدد لانهائي من المرات حتى نصل إلى أول نجاح ياصحبي)

الرمز ← س ~ هندسي(ح)

القانون المستخدم

← $\boxed{ل(س = ر) = ح \times (١-ح)^{ر-١}}$

حيث ر ← ١، ٢، ٣، ٤، ......، ∞

التوقع أو المتوسط (م) = $\boxed{\frac{١}{ح}}$

التباين ($ع^٢$) = $\boxed{\frac{١-ح}{ح^٢} = م(م-١)}$

الانحراف المعياري (ع) = $\boxed{\sqrt{التباين}}$

حلوة ← $\boxed{م \times ح = ١ = ١٠٠٪}$

التوزيع ذات الحدين

تكرار تجربة بيرنولي عدد محدد من المرات (ن مرات) وهنا يا صديقي ممكن يتحقق نجاح أو أكثر أو لا يتحقق

الرمز ← س ~ ذات حدين (ن، ح)

القانون المستخدم

$$\boxed{ل(س = ر) = {}^{ن}ق_{ر} \times ح^{ر} \times (1-ح)^{ن-ر}}$$

حيث ← ن = عدد المحاولات

ر ← عدد مرات النجاح

ر ← ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ....، ن

ح ← احتمال النجاح

١-ح ← احتمال الفشل

التوقع أو المتوسط أو عدد المحاولات المتوقعة $(\mu) = \boxed{ن \times ح}$

التباين $(\sigma^2) = \boxed{ن \times ح \times (1-ح) = \mu \times (1-ح)}$

الانحراف المعياري $(\sigma) = \boxed{\sqrt{التباين}}$

ملاحظات هامة جداً على التوزيعات الهندسية وذات الحدين

[1] قوانين الحل المباشر ولكن للتوزيع الهندسي فقط

← $ل(س = ن) = ح \times (1-ح)^{ن-1}$

← $ل(س > ن) = (1-ح)^{ن}$

← $ل(س \geq ن) = (1-ح)^{ن-1}$

← $ل(س \leq ن) = 1 - (1-ح)^{ن}$

← $ل(س < ن) = 1 - (1-ح)^{ن-1}$

هندسي بس يا صحبي أوعى :)

٢ هام جداً في التوزيع الهندسي وذات الحدين

(أ) ل(س ≥ ر) = ١ − ل(س < ر)

مثلاً ل(س ≥ ٣) = ١ − ل(س < ٣)

(ب) ل(س > ر) = ١ − ل(س ≤ ر)

مثلاً ل(س > ٣) = ١ − ل(س ≤ ٣)

(جـ) ل(س ≠ ر) = ١ − ل(س = ر)

مثلاً ل(س ≠ ٣) = ١ − ل(س = ٣)

٣ كلمات هامة في المسائل

على الأكثر ← يعني أقل ← ل(س ≤ ر)

على الأقل ← يعني أكثر ← ل(س ≥ ر)

أكبر من ← ل(س > ر)

أصغر من ← ل(س < ر)

٤ ملاحظات عامة

(أ) عدد ورق الكوتشينة ← ٥٢ ورقة

عدد صور الكوتشينة ← ١٢ ورقة

(ب) كلمة عدم حدوث أي نجاح لا تظهر إلا في التوزيع ذات الحدين بس يا برنس

(جـ) في تجربة إلقاء قطعة النقود المنتظمة دائماً

ل(ح) = $\frac{١}{٢}$ ، ل(١−ح) = $\frac{١}{٢}$

(د) في سؤال الاختيار من متعدد دائماً

ل(النجاح) = $\frac{١}{\text{عدد البدائل}}$

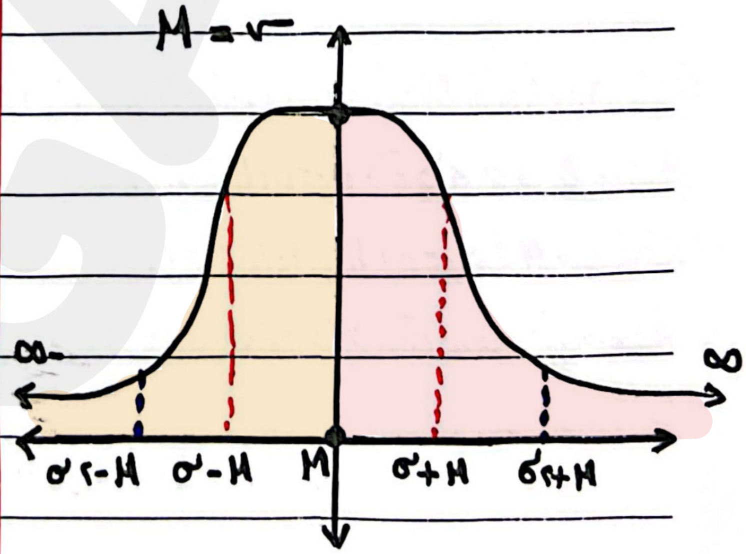
ملخص قوانين الباب الخامس التوزيع الطبيعى وفترات الثقة

ماهو المتغير العشوائى الطبيعى

← هو متغير عشوائى متصل مداه الفترة $]-\infty ، \infty[$

← منحنى دالة كثافته دائماً يأخذ شكل الجرس (منحنى جاوس)

← تعتمد دالة كثافته على قيمتين (متوسطه μ ، الانحراف σ فقط)



خواص المنحنى الطبيعى :-

(أ) المنحنى يقع بأكمله فوق محور السينات

(ب) طرفا المنحنى يقتربا من محور السينات ولكنهما لا يلتقيان به أبداً كما بالشكل السابق

(ج) المنحنى متماثل حول المستقيم ($س = \mu$) والذى يقسم المساحة تحت المنحنى وفوق محور السينات إلى منطقتين كل منهما = ٠,٥

يعنى المساحة

← $]\mu ، \infty[=]-\infty ، \mu[= ٠,٥$

ومجموع المساحتين = ١

(د) المساحة أسفل المنحنى وفوق محور السينات $]-\infty ، \infty[$ يسمى الواحد الصحيح.

التوزيع الطبيعي المعياري

← هو توزيع طبيعي ولكن متوسطه (μ) = صفر

انحرافه المعياري (σ) = ١

يرمز له بالرمز ص وهو مجموعة غير منتهية.

خواص منحنى التوزيع الطبيعي المعياري :-

(أ) المنحنى متماثل حول محور الصادات الرأسي (حول المستقيم س = ٠)

(ب) مساحة المنطقة تحت المنحنى الطبيعي وفوق محور السينات = ١ ويقسمها محور الصادات إلى قسمين مساحة كل منهما = ٠,٥

كيف يتم حساب الاحتمال للمتغير الطبيعي المعياري ؟

← ل(٠ ≤ ص ≤ ى) سوف نقوم بحسابها من خلال جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعي المعياري (يكون معطى في الامتحان)

بس خلي بالك !!

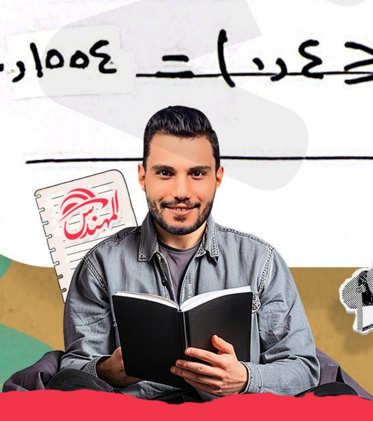
لازم الاحتمال يكون على الصورة دي عشان نكشف في الجدول ← ل(٠ ≤ ص ≤ ى)

أمثلة

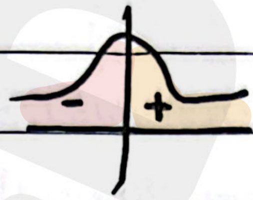
← ل(٠ ≤ ص ≤ ٢,٥٧) = ٠,٤٩٤٩

← ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٦٣) = ٠,٢٣٥٧

← ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٤) = ٠,١٥٥٤



الزتونة وادعيلي



1 هنرسم الجبل

ى ← ⊕ يمينا

ى ← ⊖ شمال

2 هنظلل ناحية ما تشاور علامة التباين

3 في احتمالينا قدامنا

حتة كبيرة ← → حتة صغيرة

٠٫٥ + ل(٠ ≤ ص ≤ ى) ٠٫٥ − ل(٠ ≤ ص ≤ ى)

أمثلة للتوضيح

أ) ل(ص ≥ ١٫٨٣)

له حتة صغيرة

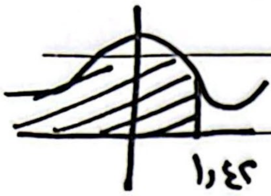
الإجابة ٠٫٥ − ل(٠ ≤ ص ≤ ١٫٨٣)

٠٫٥ − الكشف من الجدول

٠٫٥ − ٠٫٤٦٦٤ = ٠٫٠٣٣٦

ب) ل(ص ≤ ١٫٤٢)

له حتة كبيرة

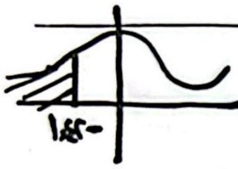


٠٫٥ + ل(٠ ≤ ص ≤ ١٫٤٢)

٠٫٥ + ٠٫٤٢٢٢ = ٠٫٩٢٢٢

ج) ل(ص ≤ −١٫٤٢)

له حتة صغيرة



٠٫٥ − ل(٠ ≤ ص ≤ ١٫٤٢)

٠٫٥ − ٠٫٤٢٢٢ = ٠٫٠٧٧٨

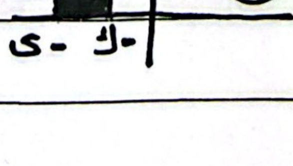
4 لو عندي ص تقع بين عددين ك، ى مثلاً :-

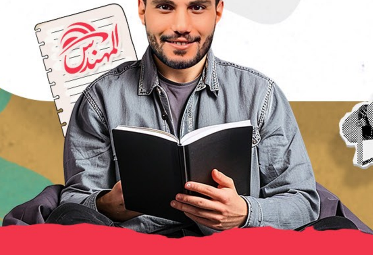
أ) لو كانا لهما نفس الإشارة (يعني في نفس الجهة)

ل(−ى ≤ ص ≤ −ك) = ل(ك ≤ ص ≤ ى)

= ل(٠ ≤ ص ≤ ى) − ل(٠ ≤ ص ≤ ك)

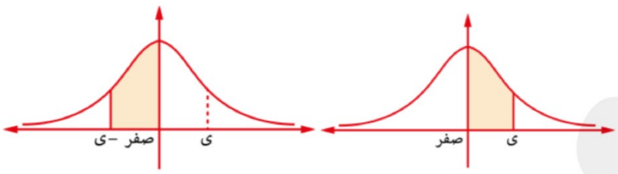
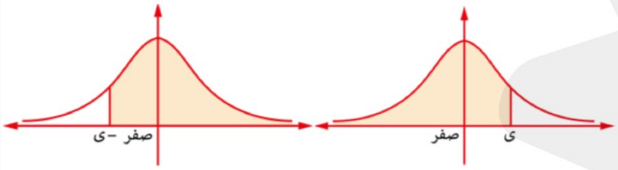
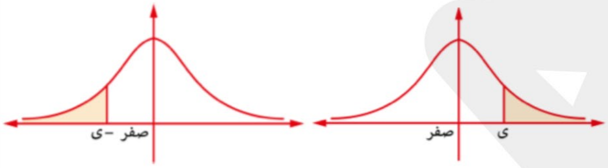
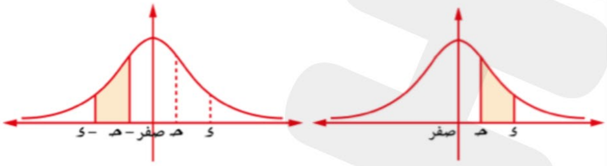
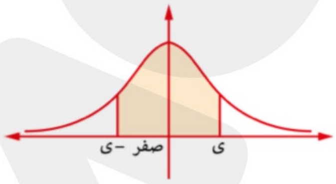
الكبير − الصغير





أهم قواعد استخدام جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعي المعياري :

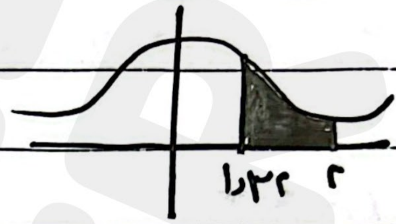
حيث ى ، هـ ، ك أعداد موجبة ، هـ < ك

الاحتمال المطلوب	وضعه بالصورة المستخدمة في الجدول	المساحة التي تمثل الاحتمال المطلوب
ل (٠ ≤ ص ≤ ى) أو ل (−ى ≤ ص ≤ ٠)	يُكشف في الجدول مباشرة على الصورة ل (٠ ≤ ص ≤ ى)	
ل (ص ≤ ى) أو ل (ص ≥ −ى)	٠,٥ + ل (٠ ≤ ص ≤ ى)	
ل (ص ≥ ى) أو ل (ص ≤ −ى)	٠,٥ − ل (٠ ≤ ص ≤ ى)	
ل (هـ ≤ ص ≤ ك) أو ل (−ك ≤ ص ≤ −هـ)	ل (٠ ≤ ص ≤ ك) − ل (٠ ≤ ص ≤ هـ)	
ل (−هـ ≤ ص ≤ ك)	ل (٠ ≤ ص ≤ ك) + ل (٠ ≤ ص ≤ هـ)	
ل (−ى ≤ ص ≤ ى)	٢ ل (٠ ≤ ص ≤ ى)	

مثال توضيحي على الحالة دي

(أ) ل (١,٣٢ ≤ ص ≤ ٢)

← هنا العددين لهما نفس الإشارة الموجبة (يعني في الجنب الموجب)



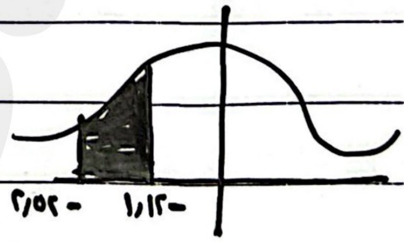
الاجابة الكبير - الصغير

ل (٠ ≤ ص ≤ ٢) - ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٣٢)

٠,٤٧٧٢ - ٠,٤٠٦٦ = ٠,٠٧٠٦

(ب) ل (-٢,٥٢ ≤ ص ≤ -١,١٢)

← هنا العددين لهما نفس الإشارة السالبة (يعني في الجنب السالب الايسر)



الكبير - الصغير

الاجابة ← ل (٠ ≤ ص ≤ ٢,٥٢) - ل (٠ ≤ ص ≤ ١,١٢)

= ٠,٤٩٤١ - ٠,٣٦٨٦ = ٠,١٢٥٥

(ب) لو كان عكس بعض في الاشارة (يعني يقعوا في جهتين مختلفين)

ل (-ك ≤ ص ≤ ى) = ل (ك ≤ ص ≤ -ى)

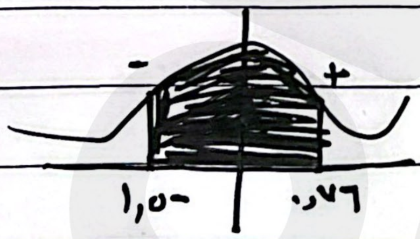
← ل (٠ ≤ ص ≤ ى) + ل (٠ ≤ ص ≤ ك)

← في الحالة دي بنجمع

مثال توضيحي على الحالة دي

(أ) ل (-١,٥ ≤ ص ≤ ٠,٧٦)

← هنا العددين عكس بعض في الاشارة (يعني في جهتين مختلفين) يبقى لازم نجمع يا برنسنا



الاجابة ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٧٦) + ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٥)

= ٠,٢٧٦٤ + ٠,٤٣٣٢ = ٠,٧٠٩٦

٣ قانون مهم جداً :-

$$ل(|ص| \le ك) = ل(-ك \le ص \le ك)$$

$$= ٢ \times ل(٠ \le ص \le ك)$$

٢ × الكشف في الجدول

مثال توضيحي

أ) $ل(|ص| \le ٢٫٦٩) = ٢ \times ل(٠ \le ص \le ٢٫٦٩)$

$= ٢ \times ٠٫٤٥٤٥ = ٠٫٩٠٩$

ب) $ل(-٢ \le ص \le ٢) = ل(|ص| \le ٢)$

$= ٢ \times ل(٠ \le ص \le ٢)$

$= ٢ \times ٠٫٤٧٧٢ = ٠٫٩٥٤٤$

جـ) $ل(-ك \le ص \le ك) = ٠٫٨٦٦٤$

$ل(|ص| \le ك) = ٠٫٨٦٦٤$

$ل(٠ \le ص \le ك) = \frac{٠٫٨٦٦٤}{٢} = ٠٫٤٣٣٢$

بعد الكشف عن ٠٫٤٣٣٢

$\therefore ك = ١٫٥$

التوزيع الطبيعي الغير معياري س

س ← هو متغير طبيعي غير معياري

$\mu \ne$ صفر ، $\sigma \ne ١$ لذلك

لابد من تحويله إلى معياري

من قبل حل السؤال عن طريق

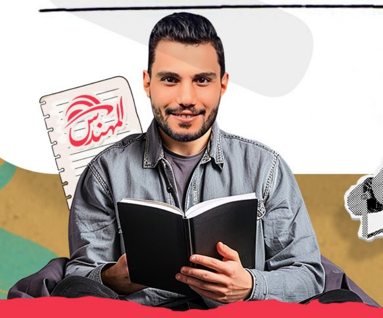
القانون د ٥

$$\boxed{ص = \frac{س - \mu}{\sigma}}$$

$ل(أ \le س \le ب)$

$$= ل\left(\frac{أ - \mu}{\sigma} \le ص \le \frac{ب - \mu}{\sigma}\right)$$

وبعد كده استخدام جدول المساحات



تطبيقات على التوزيع الطبيعي

← إذا كانت درجات الطلاب في إحدى المدارس تتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه (μ) وانحرافه المعياري (σ) وكان لدينا قيمة مثلاً احتمال أن تكون درجة الطالب أكبر منها قيمة معينة م فإن :-

① النسبة المئوية = (الاحتمال × ١٠٠) %

← ومنها : الاحتمال = $\frac{\text{النسبة المئوية}}{١٠٠}$

② عدد الطلاب = الاحتمال × العدد الكلي

← ومنها : العدد الكلي = $\frac{\text{عدد الطلاب}}{\text{الاحتمال}}$

③ الدرجة المعيارية = $\frac{\text{درجة الطالب} - \mu}{\sigma}$

ومنها : درجة الطالب (الدرجة الحقيقية) = الدرجة المعيارية × $\sigma + \mu$

فترات الثقة

في البداية لازم تكون عارف المفاهيم دي :-

① المجتمع ← هو مجموعة من العناصر لها صفة مشتركة زي حقل النباتات والقمح مثلاً

② المعلمة ← هي قيمة عددية ثابتة تميز المجتمع وغالباً تكون غير معلومة مثل المتوسط μ ويقدر بمتوسط العينة $\bar{س}$

③ العينة ← هي جزء من المجتمع تمثله تمثيلاً جيداً زي فصل دراسي - زي طالب بداخله

④ الإحصاءة ← قيمة عددية تتميز بها العينة مثل المتوسط

٥) التقدير ← هو احصاءة تعتمد وتعكس قيمة قريبة لمعلمة المجتمع ككل ومتوزيعه وله اسلوبين:

أ) التقدير بنقطة:

← هي قيمة وحيدة محسوبة من العينة تستخدم لتقدير معلمة مجهولة من معالم المجتمع مثل الوسط الحسابي لعينة عشوائية $\bar{x}$ ويستخدم لتقدير متوسط المجتمع μ

ب) التقدير بفترة ثقة:

← هو ايجاد فترة معينة يتوقع أن تقع معلمة المجتمع بداخلها بنسبة معينة أو احتمال معين وهذه الفترة تسمى فترة الثقة.

٦) فترة الثقة ← هي فترة تستخدم في الاحصاء لتقدير قيمة معلمة غير معروفة للمجتمع

٧) تفسير فترة الثقة

← فترة الثقة بمستوى ٩٥٪ تعني أن تكرار تجربة بنفس الحجم ١٠٠ مرة فاننا نثق أن ٩٥ فترة من الفترات المائة يقع تقدير المعلمة بداخلها.

٨) مستوى الثقة

← هو احتمال أن تكون فترة الثقة تحتوي القيمة الحقيقة لمعلمة المجتمع قيد الدراسة:

قيمة مستوى الثقة $(1-\alpha)$

هام: α + مستوى الثقة $= 1$

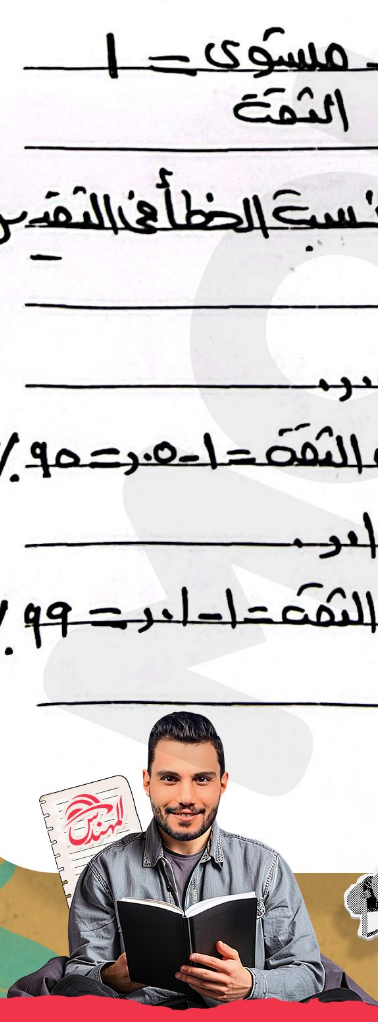
حيث α ← نسبة الخطأ في التقدير

إذا كانت $\alpha = 0.05$

← فان مستوى الثقة $= 1 - 0.05 = 95\%$

إذا كانت $\alpha = 0.01$

← فان مستوى الثقة $= 1 - 0.01 = 99\%$

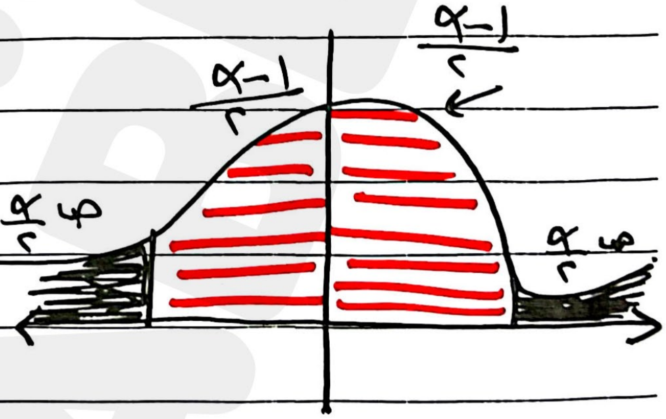


٩ القيمة الحرجة $ص_{\frac{\alpha}{2}}$

← لإيجاد القيمة الحرجة $ص_{\frac{\alpha}{2}}$

نحسب المساحة $\frac{1-\alpha}{2}$

ومن جدول المساحات أسفل المنحنى الطبيعي المعياري نحصل على القيمة $ص_{\frac{\alpha}{2}}$



القيم الحرجة المشهورة لبحث فترات الثقة

- مستوى ٩٥٪ ← $ص_{\frac{\alpha}{2}} = ١,٩٦$
- مستوى ٩٧٪ ← $ص_{\frac{\alpha}{2}} = ٢,١٧$
- مستوى ٩٩٪ ← $ص_{\frac{\alpha}{2}} = ٢,٥٧$
- مستوى ٩٨٪ ← $ص_{\frac{\alpha}{2}} = ٢,٣٣$

هام جداً زيتونة
قوانين فترات الثقة

← في البداية لازم تكون عارف الرموز دى:

- هـ ← الخطأ في التقدير
- $\bar{س}$ ← الوسط الحسابي للعينة
- σ ← الانحراف المعياري للمجتمع
- ن ← حجم العينة

هام المطلوب حسابه

١ القيمة الحرجة لمستوى الثقة ٩٥٪ هي $ص_{\frac{\alpha}{2}} = ١,٩٦$

٢ الخطأ في التقدير

$$\boxed{هـ = 1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{ن}}}$$

تابع ←

٣ ازاى تجيب حجم العينة في خطوة

$$\text{ن} = \left(\frac{1.96 \times \sigma}{\text{هـ}}\right)^2$$

٤ ازاى تجيب الانحراف المعيارى (σ) في خطوة

$$\sigma = \frac{\text{هـ} \times \sqrt{\text{ن}}}{1.96}$$

٥ لو معاك التباين (σ^2) وعايز الانحراف (σ) ← خد $\sqrt{\text{التباين}}$

٦ فترات الثقة لمتوسط المجتمع μ

هي $\mu \in [\underbrace{\bar{\text{س}} - \text{هـ}}_{\text{الحد الادنى}} \text{ ، } \underbrace{\bar{\text{س}} + \text{هـ}}_{\text{الحد الاعلى}}]$

يمكن كتابة فترة الثقة كالاتى

$$\bar{\text{س}} - \text{هـ} < \mu < \bar{\text{س}} + \text{هـ}$$

أو

$$\left[\bar{\text{س}} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}} \text{ ، } \bar{\text{س}} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}}\right]$$

* ملاحظات على فترة الثقة (هاااام)

أ) لو عايز الوسط الحسابى للعينة ($\bar{\text{س}}$)

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{الحد الاعلى} + \text{الحد الادنى}}{2}$$

ب) لو عايز الخطأ في التقدير اللى هو (هـ)

$$\text{هـ} = \frac{\text{الحد الاعلى} - \text{الحد الادنى}}{2}$$

جدول المساحات أسفل المنحنى الطبيعى المعيارى

ى	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٠٠٠٠	٠,٠٠٤٠	٠,٠٠٨٠	٠,٠١٢٠	٠,٠١٦٠	٠,٠١٩٩	٠,٠٢٣٩	٠,٠٢٧٩	٠,٠٣١٩	٠,٠٣٥٩
٠,١	٠,٠٣٩٨	٠,٠٤٣٨	٠,٠٤٧٨	٠,٠٥١٧	٠,٠٥٥٧	٠,٠٥٩٦	٠,٠٦٣٦	٠,٠٦٧٥	٠,٠٧١٤	٠,٠٧٥٣
٠,٢	٠,٠٧٩٣	٠,٠٨٣٢	٠,٠٨٧١	٠,٠٩١٠	٠,٠٩٤٨	٠,٠٩٨٧	٠,١٠٢٦	٠,١٠٦٤	٠,١١٠٣	٠,١١٤١
٠,٣	٠,١١٧٩	٠,١٢١٧	٠,١٢٥٥	٠,١٢٩٣	٠,١٣٣١	٠,١٣٦٨	٠,١٤٠٦	٠,١٤٤٣	٠,١٤٨٠	٠,١٥١٧
٠,٤	٠,١٥٥٤	٠,١٥٩١	٠,١٦٢٨	٠,١٦٦٤	٠,١٧٠٠	٠,١٧٣٦	٠,١٧٧٢	٠,١٨٠٨	٠,١٨٤٤	٠,١٨٧٩
٠,٥	٠,١٩١٥	٠,١٩٥٠	١٩٨٥.٠	٠,٢٠١٩	٠,٢٠٥٤	٠,٢٠٨٨	٠,٢١٢٣	٠,٢١٥٧	٠,٢١٦٠	٠,٢٢٢٤
٠,٦	٠,٢٢٥٩	٠,٢٢٩١	٠,٢٣٢٤	٠,٢٣٥٧	٠,٢٣٨٩	٠,٢٤٢٢	٠,٢٤٥٤	٠,٢٤٨٦	٠,٢٥١٧	٠,٢٥٤٩
٠,٧	٠,٢٥٨٠	٠,٢٦١١	٠,٢٦٤٢	٠,٢٦٧٣	٠,٢٧٠٤	٠,٢٧٣٤	٠,٢٧٦٤	٠,٢٧٩٤	٠,٢٨٢٣	٠,٢٨٥٢
٠,٨	٢٨٨١	٠,٢٩١٠	٠,٢٩٣٩	٠,٢٩٦٧	٠,٢٩٩٥	٠,٣٠٢٣	٠,٣٠٥١	٠,٣٠٧٨	٠,٣١٠٦	٠,٣١٣٣
٠,٩	٠,٣١٥٩	٠,٣١٨٦	٠,٣٢١٢	٠,٣٢٣٨	٠,٣٢٦٤	٠,٣٢٨٩	٠,٣٣١٥	٠,٣٣٤٠	٠,٣٣٦٥	٠,٣٣٨٩
١,٠	٠,٣٤١٣	٠,٣٤٣٨	٠,٣٤٦١	٠,٣٤٨٥	٠,٣٥٠٨	٠,٣٥٣١	٠,٣٥٥٤	٠,٣٥٧٧	٠,٣٥٩٩	٠,٣٦٢١
١,١	٠,٣٦٤٣	٠,٣٦٦٥	٠,٣٦٨٦	٠,٣٧٠٨	٠,٣٧٢٩	٠,٣٧٤٩	٠,٣٧٧٠	٠,٣٧٩٠	٠,٣٨١٥	٠,٣٨٣٠
١,٢	٠,٣٨٤٩	٠,٣٨٦٩	٠,٣٨٨٨	٠,٣٩٠٧	٠,٣٩٢٥	٠,٣٩٤٤	٠,٣٩٦٢	٠,٣٩٨٠	٠,٣٩٩٧	٠,٤٠١٥
١,٣	٠,٤٠٣٢	٠,٤٠٤٩	٠,٤٠٦٦	٠,٤٠٨٢	٠,٤٠٩٩	٠,٤١١٥	٠,٤١٣١	٠,٤١٤٧	٠,٤١٦٢	٠,٤١٧٧
١,٤	٠,٤١٩٢	٠,٤٢٠٧	٠,٤٢٢٢	٠,٤٢٣٦	٠,٤٢٥١	٠,٤٢٦٥	٠,٤٢٧٩	٠,٤٢٩٢	٠,٤٣٠٦	٠,٤٣١٩
١,٥	٠,٤٣٣٢	٠,٤٣٤٥	٠,٤٣٥٧	٠,٤٣٧٠	٠,٤٣٨٢	٠,٤٣٩٤	٠,٤٤٠٦	٠,٤٤١٨	٠,٤٤٢٩	٠,٤٤٤١
١,٦	٠,٤٤٥٢	٠,٤٤٦٣	٠,٤٤٧٤	٠,٤٤٨٤	٠,٤٤٩٥	٠,٤٥٠٥	٠,٤٥١٥	٠,٤٥٢٥	٠,٤٥٣٥	٠,٤٥٤٥
١,٧	٠,٤٥٥٤	٠,٤٥٦٤	٠,٤٥٧٣	٠,٤٥٨٢	٠,٤٥٩١	٠,٤٥٩٩	٠,٤٦٠٨	٠,٤٦١٦	٠,٤٦٢٥	٠,٤٦٣٣
١,٨	٠,٤٦٤١	٠,٤٦٤٩	٠,٤٦٥٦	٠,٤٦٦٤	٠,٤٦٧١	٠,٤٦٧٨	٠,٤٦٨٦	٠,٤٦٩٣	٠,٤٦٩٩	٠,٤٧٠٦
١,٩	٠,٤٧١٣	٠,٤٧١٩	٠,٤٧٢٦	٠,٤٧٣٢	٠,٤٧٣٨	٠,٤٧٤٤	٠,٤٧٥٠	٠,٤٧٥٦	٠,٤٧٦١	٠,٤٧٦٧
٢,٠	٠,٤٧٧٢	٠,٤٧٧٨	٠,٤٧٨٣	٠,٤٧٨٨	٠,٤٧٩٣	٠,٤٧٩٨	٠,٤٨٠٣	٠,٤٨٠٨	٠,٤٨١٢	٠,٤٨١٧
٢,١	٠,٤٨٢١	٠,٤٨٢٦	٠,٤٨٣٠	٠,٤٨٣٤	٠,٤٨٣٨	٠,٤٨٤٢	٠,٤٨٤٦	٠,٤٨٥٠	٠,٤٨٥٤	٠,٤٨٥٧
٢,٢	٠,٤٨٦١	٠,٤٨٦٤	٠,٤٨٦٨	٠,٤٨٧١	٠,٤٨٧٥	٠,٤٨٧٨	٠,٤٨٨١	٠,٤٨٨٤	٠,٤٨٨٧	٠,٤٨٩٠
٢,٣	٠,٤٨٩٣	٠,٤٨٩٦	٠,٤٨٩٨	٠,٤٩٠١	٠,٤٩٠٤	٠,٤٩٠٦	٠,٤٩٠٩	٠,٤٩١١	٠,٤٩١٣	٠,٤٩١٦
٢,٤	٠,٤٩١٨	٠,٤٩٢٠	٠,٤٩٢٢	٠,٤٩٢٥	٠,٤٩٢٧	٠,٤٩٢٩	٠,٤٩٣١	٠,٤٩٣٢	٠,٤٩٣٤	٠,٤٩٣٦
٢,٥	٠,٤٩٣٨	٠,٤٩٤٠	٠,٤٩٤١	٠,٤٩٤٣	٠,٤٩٤٥	٠,٤٩٤٦	٠,٤٩٤٨	٠,٤٩٤٩	٠,٤٩٥١	٠,٤٩٥٢
٢,٦	٠,٤٩٥٣	٠,٤٩٥٥	٠,٤٩٥٦	٠,٤٩٥٧	٠,٤٩٥٩	٠,٤٩٦٠	٠,٤٩٦١	٠,٤٩٦٢	٠,٤٩٦٣	٠,٤٩٦٤
٢,٧	٠,٤٩٦٥	٠,٤٩٦٦	٠,٤٩٦٧	٠,٤٩٦٨	٠,٤٩٦٩	٠,٤٩٧٠	٠,٤٩٧١	٠,٤٩٧٢	٠,٤٩٧٣	٠,٤٩٧٤
٢,٨	٠,٤٩٧٤	٠,٤٩٧٥	٠,٤٩٧٦	٠,٤٩٧٧	٠,٤٩٧٧	٠,٤٩٧٨	٠,٤٩٧٩	٠,٤٩٧٩	٠,٤٩٨٠	٠,٤٩٨١
٢,٩	٠,٤٩٨١	٠,٤٩٨٢	٠,٤٩٨٢	٠,٤٩٨٣	٠,٤٩٨٤	٠,٤٩٨٤	٠,٤٩٨٥	٠,٤٩٨٥	٠,٤٩٨٦	٠,٤٩٨٦
٣,٠	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٨	٠,٤٩٨٨	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٩٠	٠,٤٩٩٠
٣,١	٠,٤٩٩٠	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٣
٣,٢	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥
٣,٣	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٧
٣,٤	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٨
٣,٥	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨

يعطي للطالب في الامتحان

تابعنا ع السوشيل ميديا

خلي السما سقفك

Gado

011500 95628