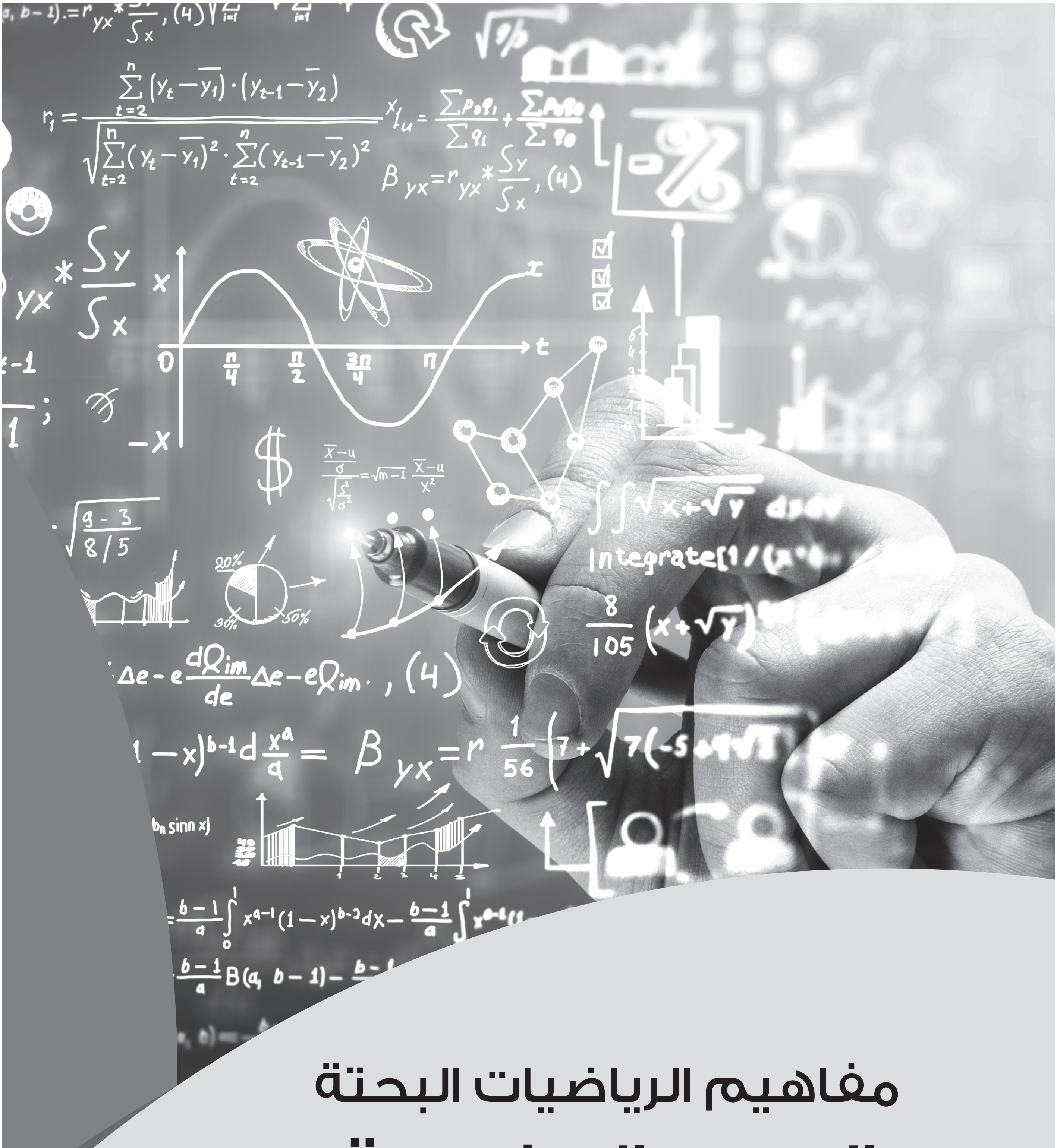


مفاهيم الرياضيات البحتة

الجبر والهندسة التحليلية الفراغية

الصف الثالث الثانوى

أولا : الجبـــــــــر

الوحدة الاولي : التباديل و التوافيق ونظرية ذات الحدين

(١) ${}^{ن}ل_{ر} = ن\,(ن-١)\,(ن-٢)\ldots\ldots(ن-ر+١)$ لكل $ر \leqslant ن$ ، ر ، ن $\in ص_{+}$

(٢) ${}^{ن}ل_{ر} = \dfrac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}}$

(٣) $\underline{|١} = \underline{|٠} = ١$

(٤) ${}^{ن}ق_{ر} = \dfrac{{}^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}} = \dfrac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\;\underline{|ن-ر}}$

(٥) ${}^{ن}ق_{ن} = {}^{ن}ق_{٠} = ١$

(٦) ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$

(٧) إذا كان ${}^{ن}ق_{س} = {}^{ن}ق_{ص}$ فإن س = ص أ، س + ص = ن

(٨) $\dfrac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \dfrac{ن-ر+١}{ر}$

(٩) ${}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١} = {}^{ن+١}ق_{ر}$

(١٠) $(س+أ)^{ن} = س^{ن} + {}^{ن}ق_{١}\,س^{ن-١}\,أ + {}^{ن}ق_{٢}\,س^{ن-٢}\,أ^{٢} + \ldots\ldots + أ^{ن}$

$(س-أ)^{ن} = س^{ن} - {}^{ن}ق_{١}\,س^{ن-١}\,أ + {}^{ن}ق_{٢}\,س^{ن-٢}\,أ^{٢} - \ldots\ldots + (-أ)^{ن}$

(١١) $(س+أ)^{ن} + (س-أ)^{ن} = ٢$ [مجموع الحدود الفردية الرتبة من حدود $(س+أ)^{ن}$]

(١٢) $(س+أ)^{ن} - (س-أ)^{ن} = ٢$ [مجموع الحدود الزوجية الرتبة من حدود $(س+أ)^{ن}$]

(١٣) $(١\pm س)^{ن} = ١ \pm {}^{ن}ق_{١}\,س + {}^{ن}ق_{٢}\,س^{٢} \pm {}^{ن}ق_{٣}\,س^{٣} + \ldots\ldots (\pm س)^{ن}$

(١٤) الحد العام في مفكوك $(س+أ)^{ن}$ هو $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\,س^{ن-ر}\,أ^{ر}$

الحد الأوسط في مفكوك $(س+أ)^{ن}$

- إذا كانت ن فردية يوجد حدان أوسطان رتبتاهما : $\dfrac{ن+١}{٢}$ ، $\dfrac{ن+٣}{٢}$
- إذا كانت ن زوجية يوجد حد أوسط وحيد رتبته : $\dfrac{ن+٢}{٢}$

(١٥) النسبة بين حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين $(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}} = \frac{\text{ع}_{\text{ر}+1}}{\text{ع}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن} - \text{ر} + 1}{\text{ر}} \times \frac{\text{أ}}{\text{س}}$

(١٦) النسبة بين معاملي حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين $(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}}$

$$= \frac{\text{ن} - \text{ر} + 1}{\text{ر}} \times \frac{\text{معامل الثاني}}{\text{معامل الاول}}$$

الوحدة الثانية : الأعداد المركبة

العدد المركب : لكل س ، ص $\in$ ح فإن العدد ع = س + ص ت يسمي عدداً مركباً الجزء الحقيقي له هو س ، و الجزء التخيلي له هو ص حيث $\text{ت}^2 = -1$

مرافق العدد المركب : إذا كان ع = س + ص ت عدداً مركباً فإن مرافقه هو $\overline{\text{ع}}$ = س − ص ت

و يكون $\text{ع} + \overline{\text{ع}}$ = عدداً حقيقيا ، $\text{ع} \, \overline{\text{ع}}$ = عدداً حقيقيا

خواص المرافق : (١) $\overline{(\text{ع}_1 + \text{ع}_2)} = \overline{\text{ع}_1} + \overline{\text{ع}_2}$

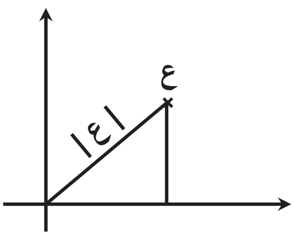
(٢) $\overline{(\text{ع}_1 \, \text{ع}_2)} = (\overline{\text{ع}_1})(\overline{\text{ع}_2})$

(٣) $\overline{\left(\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2}\right)} = \left(\frac{\overline{\text{ع}_1}}{\overline{\text{ع}_2}}\right)$

التمثيل الهندسي للعدد المركب : العدد المركب ع = س + ص ت تمثله النقطة (س ، ص) في المستوي الاحداثي لأرجاند

المقياس و السعة للعدد المركب : إذا كانت النقطة (س ، ص) تمثل العدد المركب ع على مستوي أرجاند فإن $|\text{ع}| = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$ ، سعة ع تتعين من العلاقتين جتا $\theta = \frac{\text{س}}{\text{ل}}$ ، جا $\theta = \frac{\text{ص}}{\text{ل}}$

خواص المقياس و السعة للعدد المركب :



(١) $|\text{ع}| = |\overline{\text{ع}}|$ (٢) $\text{ع} \, \overline{\text{ع}} = |\text{ع}|^2 = |\overline{\text{ع}}|^2$

(٣) $|\text{ع}_1 \, \text{ع}_2| = |\text{ع}_1| \, |\text{ع}_2|$

(٤) $\left|\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2}\right| = \frac{|\text{ع}_1|}{|\text{ع}_2|}$

(٥) $|\text{ع}_1 + \text{ع}_2| \leqslant |\text{ع}_1| + |\text{ع}_2|$

(٦) سعة العدد المركب يمكن أن تأخذ عددا غير منته من القيم التي تختلف كل منها عن الأخرى بعدد صحيح من مضاعفات ٢ π

(٧) السعة التي تنتمي للفترة] $-\pi$ ، π [تسمى السعة الأساسية للعدد المركب

(٨) سعة $\overline{ع}$ = − سعة ع

(٩) سعة (− ع) = $-\pi$ + سعة ع

(١٠) سعة $\frac{١}{ع}$ = − سعة ع

الصورة المثلثية للعدد المركب : ع = ل (جتا θ + ت جا θ) حيث ع = | ل | ، θ السعة الأساسية

ضرب و قسمة الاعداد المركبة بالصورة المثلثية :

إذا كان : $ع_١$ = $ل_١$ (جتا $\theta_١$ + ت جا $\theta_١$) ، $ع_٢$ = $ل_٢$ (جتا $\theta_٢$ + ت جا $\theta_٢$)

فإن : $ع_١ ع_٢$ = $ل_١ ل_٢$ (جتا ($\theta_١ + \theta_٢$) + ت جا ($\theta_١ + \theta_٢$))

، $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢}$ (جتا ($\theta_١ - \theta_٢$) + ت جا ($\theta_١ - \theta_٢$))

الصورة الاسية للعدد المركب : (صورة أويلر) إذا كان ع عددا مركبا مقياسه ل ، و سعته الأساسية θ فإن :

ع = ل $هـ^{\theta ت}$ حيث θ بالتقدير الدائري

$هـ^{\theta ت}$ = جتا θ + ت جا θ ، $هـ^{-\theta ت}$ = جتا θ − ت جا θ = جتا($-\theta$) + ت جا ($-\theta$)

نظرية ديموافر : إذا كان ن عدداً صحيحا فإن :

(١) (جتا θ + ت جا θ)^{ن} = (جتا ن θ + ت جا ن θ)

(٢) إذا كان ك عددا موجبا فإن (جتا θ + ت جا θ)$^{\frac{١}{ك}}$ = (جتا $\frac{\theta + ٢ ر \pi}{ك}$ + ت جا $\frac{\theta + ٢ ر \pi}{ك}$)

أي أن مقدار (جتا θ + ت جا θ)$^{\frac{١}{ك}}$ يأخذ قيما متعددة تبعا لقيم ر و يكون عدد هذه القيم المختلفة يساوي ك

من القيم التي نحصل عليها بوضع ر = ... ، −٢ ، −١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ..... التي تجعل السعة $\frac{\theta + ٢ ر \pi}{ك}$

محصورة بين $-\pi$ ، π

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح : إذا كان $ع^٣$ = ١ فإن ع ∈ { ١ ، $-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، $-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت }

و يرمز لهذه الجذور بالرموز ١ ، ω ، $\omega^٢$

حيث $\omega = -\frac{١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، $\omega^٢ = -\frac{١}{٢} \mp \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :

(١) $\omega^٣$ = ١ (٢) ١ + ω + $\omega^٢$ = صفر (٣) $\omega^٢ - \omega = \pm \sqrt{٣}$ ت

الجذور النونية للواحد الصحيح : إذا كان $ع^ن = ١$

فإن $ع = (جتا \, ٠ ^\circ + ت \, جا \, ٠ ^\circ)^{\frac{١}{ن}} = جتا \, \frac{٢ \pi ك}{ن} + ت \, جا \, \frac{٢ \pi ك}{ن}$ حيث $ك \in ص$ ، $\frac{٢ \pi ك}{ن} \in [- \pi ، \pi]$

و تمثل الجذور النونية للواحد الصحيح على المستوي أرجاند بروؤس مضلع عدد رؤوسه ن ، و تقع على دائرة مركزها نقطة الأصل و طول نصف قطرها ١

الوحدة الثالثة : المحددات و المصفوفات

المحدد : المحدد من الرتبة ىہ يتكون من ىہ من الصفوف ، ىہ من الأعمدة و ينشأ من حذف (ىہ – ١) من المتغيرات في ىہ من المعادلات الخطية .

خواص المحددات :

- لا تتغير قيمة المحدد إذا تبدلت الصفوف بالأعمدة و الأعمدة بالصفوف بنفس ترتيبها
- قيمة المحدد لا تتغير بفكه عن طريق عناصر أي صف (عمود)
- إذا وجد عامل مشترك في جميع عناصر صف (عمود) في محدد فإن هذا العامل يمكن أخذه خارج المحدد
- قيمة المحدد تساوي صفر في الحالات الأتية :
  - إذا كانت جميع عناصر أي صف أو (أي عمود) في محدد تساوي صفر فإن قيمة المحدد = صفر
  - إذا تساوت العناصر المتناظرة في أي صفين (أو عمودين) في محدد فإن قيمة المحدد = صفر
- إذا بدلنا موضعي صفين (عمودين) فإن قيمة المحدد الناتج = – ١ × قيمة المحدد الأصلي
- إذا كتبت جميع عناصر أي صف (عمود) كمجموع عنصرين فإنه يمكن كتابة المحدد الأصلي على صورة مجموع محددين
- إذا أضفنا لعناصر أي صف (عمود) العناصر المناظرة لها من صف (عمود) أخر مضروبة في عدد مثل م فإن قيمة المحدد لا تتغير
- قيمة المحدد على الصورة المثلثة تساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي
- في أي محدد إذا ضربنا عناصر أي صف (عمود) في العوامل المرافقة للعناصر المناظرة في أي صف (عمود) أخر ثم جمعنا نواتج الضرب فإن الناتج يكون مساوياً صفرا

لإيجاد معكوس المصفوفة المربعة : من النظم ٣ × ٣ باستخدام مصفوفة العوامل المرافقة نتبع الخطوات التالية :

- نوجد محدد المصفوفة أ مع ملاحظة أن $| أ | \neq$ صفر
- نكون مصفوفة العوامل المرافقة لكل عنصر من عناصر المصفوفة أ
- نوجد المصفوفة الملحقة $أ^{مل}$ لمصفوفة العوامل المرافقة
- نوجد المعكوس الضربي للمصفوفة أ من العلاقة : $أ^{-١} = \frac{١}{| أ |} \times أ^{مل}$

حل أنظمة المعادلات الخطية :

باعتبار أن أ هي مصفوفة المعاملات ، س هي مصفوفة المتغيرات

ب هي مصفوفة الثوابت . فإن :

- المعادلة المصفوفية تكتب بالصورة : أ س = ب
- وحل هذه المعادلة هو : $س = أ^{-١} \times ب$

مرتبة المصفوفة :

مرتبة المصفوفة غير الصفرية هي أعلى درجة لمحدد أو محدد أصغر للمصفوفة قيمته لا تساوي الصفر ، فإذا كانت المصفوفة أ غير الصفرية على النظم م × ن فإن مرتبة المصفوفة (أ) نرمز لها بالرمز ر (أ) حيث :

١ ⩽ ر (أ) ⩽ أصغر (م ، ن)

المصفوفة الموسعة : هي مصفوفة ممتدة للنظام الخطي و يرمز لها بالرمز أ* حيث :

أ* = (أ | ب) و هي على النظم م × (ن + ١)

المعادلات غير المتجانسة :

تسمى مجموعة المعادلات التي على صورة معادلة المصفوفة : أ س = ب غير متجانسة حيث ب ≠ $\boxed{}$

- يكون للمجموعة المكونة من ن معادلة غير متجانسة في ن مجهولا حل وحيد إذا كانت ر (أ) = ر (أ*) = ن (عدد المجاهيل) حيث | أ | ≠ صفر
- يكون لمجموعة المعادلات عدد غير محدود من الحلول " عدد لا نهائي " إذا كان ر (أ) = ر (أ*) = ك حيث ك < ن
- و لا يكون لها حل على الاطلاق إذا كان ر (أ) ≠ ر (أ*)

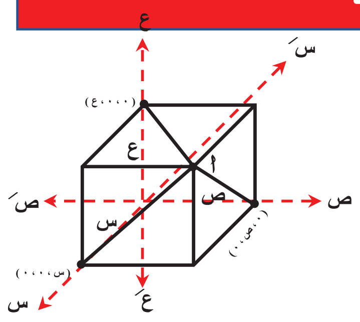
المعادلات المتجانسة :

تسمى مجموعة المعادلات التي على الصورة : أ س = $\boxed{}$ بالمعادلات المتجانسة فإذا كان :

- ر (أ) = ر (أ*) = ن (عدد المجاهيل) يكون للنظام حل وحيد هو الحل الصفري (و يسمى بالحل البديهي لكونه شديد الوضوح)
- ر (أ) < ن (حيث ن عدد المجاهيل) ، | أ | = صفر فإنه يوجد حل للمجموعة عدد لانهائي من الحلول بخلاف الحل الصفري

ثانيا : الهندسة الفراغية

الوحدة الاولي : الهندسة و القياس في ثلاثة أبعاد

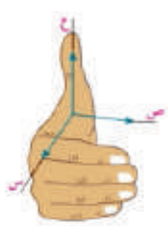


النظام الاحداثى المتعامد فى ثلاثة أبعاد :

تتعين إحداثيات النقطة أ في الفراغ بمعرفة مسقطها على كل محور من محاور الإحداثيات

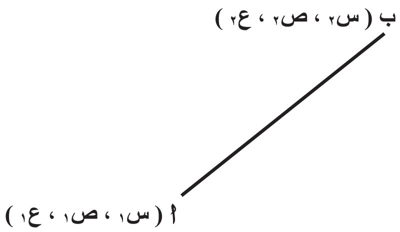
قاعدة اليد اليمنى :

و فيها تشير الأصابع المنحنية من الاتجاه الموجب لمحور س إلي الاتجاه الموجب لمحور ص و يشير اتجاه الإبهام إلي الاتجاه الموجب لمحور ع



مستويات الاحداثيات :

- المستوي س ص و معادلته ع = صفر
- المستوي س ع و معادلته ص = صفر
- المستوي ص ع و معادلته س = صفر



البعد بين نقطتين فى الفراغ :

إذا كانت أ ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$ ، $ع_٢$)

نقطتين في الفراغ فإن طول القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ يعطى بالعلاقة :

$$أب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢ + (ع_٢ - ع_١)^٢}$$

إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة :

إذا كانت أ ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$ ، $ع_٢$)

نقطتين في الفراغ ، جـ نقطة منتصف $\overline{أب}$ فإن احداثيات النقطة جـ هي :

فإن جـ $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} ، \frac{ع_١ + ع_٢}{٢} \right)$

معادلة الكرة فى الفراغ :

- معادلة الكرة التي مركزها (ل ، ك ، ن) ، و طول نصف قطرها نق تكون :

$$(س - ل)^٢ + (ص - ك)^٢ + (ع - ن)^٢ = نق^٢$$

- معادلة الكرة التي مركزها نقطة الأصل ، و طول نصف قطرها نق تكون : $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = نق^٢$
- معادلة الكرة : $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص + ٢ ن ع + ء = ٠$

حيث مركزها (− ل ، − ك ، − ن) ، و طول نصف قطرها (نق) = $\sqrt{ل^٢ + ك^٢ + ن^٢ - ء}$

حيث $ل^٢ + ك^٢ + ن^٢ > ء$

متجه الموضع فى الفراغ :

إذا كانت أ ($أ_س$ ، $أ_ص$ ، $أ_ع$) نقطة في الفراغ فإن متجه الموضع

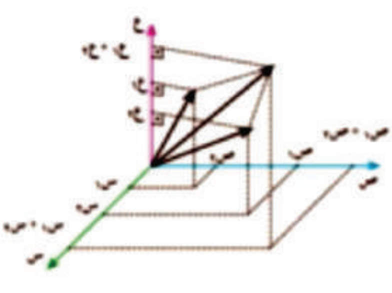
للنقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل يكون $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$

- $أ_س$ تسمي مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه محور س
- $أ_ص$ تسمي مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه محور ص
- $أ_ع$ تسمي مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه محور ع

معيار المتجه :

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ فإن $\| \overrightarrow{أ} \| = \sqrt{أ_س^٢ + أ_ص^٢ + أ_ع^٢}$

جمع و طرح المتجهات فى الفراغ :



إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $\overrightarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$ فإن :

- $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = (أ_س + ب_س ، أ_ص + ب_ص ، أ_ع + ب_ع)$
- $\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} = (أ_س - ب_س ، أ_ص - ب_ص ، أ_ع - ب_ع)$

خواص عملية الجمع :

(١) $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} \in \text{ح}^{3}$ خاصية الانغلاق (٢) $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{أ}}$ خاصية الابدال

(٣) $(\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}) + \overrightarrow{\text{جـ}} = \overrightarrow{\text{أ}} + (\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{جـ}})$ خاصية التجميع

(٤) $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{و}} = \overrightarrow{\text{و}} + \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{أ}}$ العنصر المحايد الجمعي

(٥) $\overrightarrow{\text{أ}} + (-\overrightarrow{\text{أ}}) = (-\overrightarrow{\text{أ}}) + \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{و}}$ المعكوس الجمعي

ضرب المتجه فى عدد حقيقى :

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}})$ ، ك $\in$ ح فإن ك $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{ك أ}_{\text{س}} ، \text{ك أ}_{\text{ص}} ، \text{ك أ}_{\text{ع}})$

تساوى المتجهات فى الفراغ :

إذا كان $(\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}}) = (\text{ب}_{\text{س}} ، \text{ب}_{\text{ص}} ، \text{ب}_{\text{ع}})$

فإن : $\text{أ}_{\text{س}} = \text{ب}_{\text{س}}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}} = \text{ب}_{\text{ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{ع}} = \text{ب}_{\text{ع}}$

متجه الوحدة :

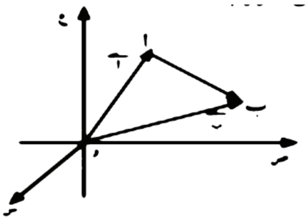
هو متجه معياره يساوى وحدة الأطوال

متجهات الوحدة الاساسية :

- $\overrightarrow{\text{سَ}} = (١ ، ٠ ، ٠)$ متجه وحدة في الاتجاه الموجب لمحور س
- $\overrightarrow{\text{صَ}} = (٠ ، ١ ، ٠)$ متجه وحدة في الاتجاه الموجب لمحور ص
- $\overrightarrow{\text{عَ}} = (٠ ، ٠ ، ١)$ متجه وحدة في الاتجاه الموجب لمحور ع

التعبير عن متجه بدلالة متجهات الوحدة الاساسية :

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}})$ فإنه يمكن كتابة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ على الصورة : $\overrightarrow{\text{أ}} = \text{أ}_{\text{س}} \overrightarrow{\text{سَ}} + \text{أ}_{\text{ص}} \overrightarrow{\text{صَ}} + \text{أ}_{\text{ع}} \overrightarrow{\text{عَ}}$



التعبير عن قطعة مستقيمة فى الفراغ بدلالة إحداثيات طرفيها :

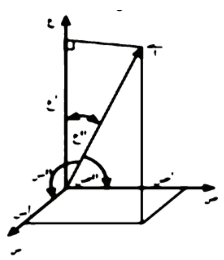
إذا كان أ ، ب نقطتين في الفراغ متجه موضعهما $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$

على الترتيب فإن $\overrightarrow{\text{أ ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$

متجه الوحدة فى اتجاه معلوم :

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}})$ فإن متجه $\overrightarrow{\text{ى}_{\text{أ}}}$ يسمى متجه وحدة في اتجاه $\overrightarrow{\text{أ}}$ و يعطى بالعلاقة :

$$\overrightarrow{\text{ى}_{\text{أ}}} = \frac{\overrightarrow{\text{أ}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|}$$



زوايا الاتجاه و جيوب تمام الاتجاه المتجه فى الفراغ :

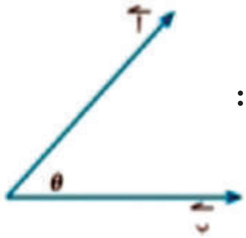
إذا كانت $(\theta_{\text{س}} ، \theta_{\text{ص}} ، \theta_{\text{ع}})$ قياسات الزوايا التي يصنعها المتجه $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}})$

مع الاتجاهات الموجبة لمحاور س ، ص ، ع على الترتيب فإن :

- $أ_س = \|\overrightarrow{أ}\|$ جتا $\theta_س$ ، $أ_ص = \|\overrightarrow{أ}\|$ جتا $\theta_ص$ ، $أ_ع = \|\overrightarrow{أ}\|$ جتا $\theta_ع$

($\theta_س$ ، $\theta_ص$ ، $\theta_ع$) تسمي بزوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$

- جتا $\theta_س$ ، جتا $\theta_ص$ ، جتا $\theta_ع$ تسمي جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$
- جتا $\theta_س$ $\widehat{س}$ + جتا $\theta_ص$ $\widehat{ص}$ + جتا $\theta_ع$ $\widehat{ع}$ تمثل متجه الوحدة في اتجاه المتجه $\overrightarrow{أ}$
- و يكون : جتا^2 $\theta_س$ + جتا^2 $\theta_ص$ + جتا^2 $\theta_ع$ = ١



الضرب القياسى لمتجهين :

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين في $ع^3$ قياس الزاوية بينهما θ حيث $٠ \leqslant \theta \leqslant ١٨٠^\circ$ فإن :

$$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\| \text{ جتا } \theta$$

خواص الضرب القياسى لمتجهين :

(١) $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{أ}$ خاصية الابدال

(٢) $\overrightarrow{أ} \cdot (\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ}) = \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{جـ}$ خاصية التوزيع

(٣) إذا كان ك عدد حقيقي فإن $(ك\,\overrightarrow{أ}) \cdot \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{أ} \cdot (ك\,\overrightarrow{ب}) = ك\,(\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب})$

(٤) $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{أ} = \|\overrightarrow{أ}\|^2$

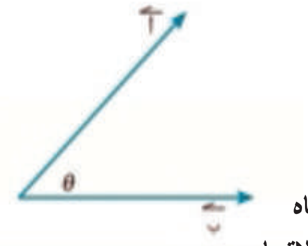
(٥) إذا كان $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ = صفر فإن $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ حيث $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين غير صفريين

الضرب القياسى لمتجهين فى نظام احداثى متعامد :

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $\overrightarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$

فإن : $\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب} = أ_س ب_س + أ_ص ب_ص + أ_ع ب_ع$

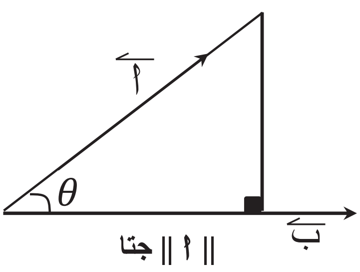
الزاوية بين متجهين :



$$\therefore \text{جتا } \theta = \frac{\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\|} \quad ، \quad \text{صفر}^\circ \leq \theta \leq ١٨٠^\circ$$

- إذا كانت جتا θ = ١ فإن $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ و نفس الاتجاه
- إذا كانت جتا θ = − ١ فإن $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ و في عكس الاتجاه
- إذا كانت جتا θ = صفر فإن $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$

مركبة متجه فى اتجاه متجه أخر :



$\therefore$ مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه $\overrightarrow{ب}$

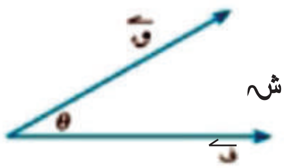
$$أ_ب = \|\overrightarrow{أ}\| \text{ جتا } \theta$$

$$أ_ب = \frac{\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{ب}\|}$$

المركبة الاتجاهية للمتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ في اتجاه $\overleftarrow{\text{ب}}$:

$$= \left(\frac{\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}}}{\|\overleftarrow{\text{ب}}\|^2} \right) \overleftarrow{\text{ب}}$$

الشغل المبذول من قوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ لإحداث إزاحة $\overleftarrow{\text{ف}}$:



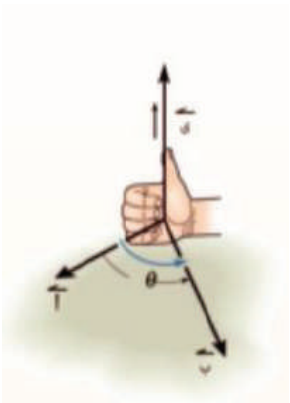
إذا أثرت قوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ على جسم ما فحركته إزاحة $\overleftarrow{\text{ف}}$ فإننا نقول أن القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ قد بذلت شغلا ش

الشغل $= \overleftarrow{\text{ق}} \,.\, \overleftarrow{\text{ف}}$

$= \|\overleftarrow{\text{ق}}\| \, \|\overleftarrow{\text{ف}}\|$ جتا θ

- إذا كانت القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ في نفس اتجاه الازاحة ($\theta =$ صفر°) ش $= \|\overleftarrow{\text{ق}}\| \, \|\overleftarrow{\text{ف}}\|$
- إذا كانت القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ في عكس اتجاه الازاحة ($\theta = ١٨٠°$) ش $= - \|\overleftarrow{\text{ق}}\| \, \|\overleftarrow{\text{ف}}\|$
- إذا كانت القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ عمودية على اتجاه الازاحة ($\theta = ٩٠°$) ش $=$ صفر

الضرب الاتجاهي لمتجهين:



إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ متجهين في ع^3 ، قياس الزاوية بينهما يساوي θ

فإن $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = (\|\overleftarrow{\text{أ}}\| \, \|\overleftarrow{\text{ب}}\|$ جا $\theta) \, \overleftarrow{\text{ى}}$ حيث $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة عمودي

على مستوى $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ ، ويتحدد اتجاه متجه الوحدة $\overleftarrow{\text{ى}}$ (لأعلى أم لأسفل)

طبقا لقاعدة اليد اليمنى حيث يشير الأصابع المنحنية لليد اليمنى إلي اتجاه

الدوران من $\overleftarrow{\text{أ}}$ إلي المتجه $\overleftarrow{\text{ب}}$ فيشير الابهام إلي المتجه $\overleftarrow{\text{ى}}$

خواص الضرب الاتجاهي لمتجهين :

(١) $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = - \overleftarrow{\text{ب}} \times \overleftarrow{\text{أ}}$

(٢) $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{أ}} = \overleftarrow{\text{و}}$

(٣) $\overleftarrow{\text{أ}} \times (\overleftarrow{\text{ب}} + \overleftarrow{\text{ج}}) = \overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} + \overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ج}}$ خاصية التوزيع

(٤) إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{و}}$ فإما $\overleftarrow{\text{أ}} \,//\, \overleftarrow{\text{ب}}$ أو أحد المتجهين أو كليهما يساوي $\overleftarrow{\text{و}}$

(٥) $\overleftarrow{\text{س}} \times \overleftarrow{\text{ص}} = \overleftarrow{\text{ع}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}} \times \overleftarrow{\text{ع}} = \overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع}} \times \overleftarrow{\text{س}} = \overleftarrow{\text{ص}}$

$\overleftarrow{\text{س}} \times \overleftarrow{\text{ع}} = - \overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع}} \times \overleftarrow{\text{ص}} = - \overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}} \times \overleftarrow{\text{س}} = - \overleftarrow{\text{ع}}$

الضرب الاتجاهى لمتجهين فى نظام احداثى متعامد :

إذا كان $\overleftarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $\overleftarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$

فإن : $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ أ_س & أ_ص & أ_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \end{vmatrix}$

حالة خاصة : الضرب الاتجاهى فى مستوى الاحداثيات س ص :

إذا كان $\overleftarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص)$ ، $\overleftarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص)$

فإن : $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \begin{vmatrix} أ_س & أ_ص \\ ب_س & ب_ص \end{vmatrix} \overleftarrow{ع} = (أ_س ب_ص - أ_ص ب_س) \overleftarrow{ع}$

متجه الوحدة العمودي على مستوى المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$:

$$\overleftarrow{ى} = \frac{\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}}{\|\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}\|}$$

توازى متجهين :

المتجهان $\overleftarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $\overleftarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$ يكونان متوازيين إذا تحقق أحد الشروط الاتية :

(١) $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{و}$

(٢) $\frac{أ_س}{ب_س} = \frac{أ_ص}{ب_ص} = \frac{أ_ع}{ب_ع}$

(٣) $\overleftarrow{أ} = ك \overleftarrow{ب}$ إذا كانت ك > ٠ فإن المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متوازيان و في نفس الاتجاه

، إذا كانت ك < ٠ فإن المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متوازيان و في عكس الاتجاه

المعنى الهندسى للضرب الاتجاهى :

$\|\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}\|$ = مساحة متوازي الاضلاع الذي فيه $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ضلعان متجاوران

= ضعف مساحة المثلث الذي فيه $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ضلعان متجاوران

الضرب الثلاثى القياسى :

$\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{جـ} = \begin{vmatrix} أ_س & أ_ص & أ_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \\ جـ_س & جـ_ص & جـ_ع \end{vmatrix}$

المعنى الهندسى للضرب الثلاثى القياسى :

حجم متوازي السطوح الذي فيه $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{جـ}$ ثلاثة متجهات تمثل أحرف غير متوازية

يساوي القيمة المطلقة للمقدار : $\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{جـ}$

الوحدة الثانية : الخطوط المستقيمة و المستويات في الفراغ

متجه الاتجاه :

- إذا كانت ل ، م ، ن هي جيوب تمام الاتجاه لمستقيم فإن المتجه $\overrightarrow{ه}$ = ك (ل ، م ، ن) يمثل متجه اتجاه للمستقيم
  و يرمز له بالرمز $\overrightarrow{ه}$ = (أ ، ب ، جـ) و تسمى الأعداد أ ، ب ، جـ بنسب الاتجاه للمستقيم
- متجه الاتجاه للمستقيم يأخذ عدة صور متكافئة فمثلا :

$\overrightarrow{ه}$ = ٢ (ل ، م ، ن) = ٣ (ل ، م ، ن) = – ٤ (ل ، م ، ن) =..............

معادلة الخط المستقيم :

- معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$) و المتجه $\overrightarrow{ه}$ = (أ ، ب ، جـ) متجه اتجاه له هي
  الصورة المتجهة : $\overrightarrow{ر}$ = ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$) + ك (أ ، ب ، جـ)
- المعادلات البارمترية : س = $س_١$ + ك أ ، ص = $ص_١$ + ك ب ، ع = $ع_١$ + ك جـ
- المعادلة الاحداثية : $\frac{س - س_١}{أ} = \frac{ص - ص_١}{ب} = \frac{ع - ع_١}{جـ}$

الزاوية بين مستقيمين :

إذا كان $\overrightarrow{ه_١}$ ، $\overrightarrow{ه_٢}$ متجهي اتجاه مستقيمين فإن قياس الزاوية الصغرى بين المستقيمين يعطي بالعلاقة :

$$جتا\theta = \frac{|\overrightarrow{ه_١} . \overrightarrow{ه_٢}|}{\|\overrightarrow{ه_١}\| \, \|\overrightarrow{ه_٢}\|}$$

و إذا كان ($ل_١$ ، $م_١$ ، $ن_١$) ، ($ل_٢$ ، $م_٢$ ، $ن_٢$) هي جيوب تمام الاتجاه للمستقيمين فإن :

$$جتا\theta = | ل_١ ل_٢ + م_١ م_٢ + ن_١ ن_٢ |$$

شرط توازي و شرط تعامد مستقيمين :

إذا كان $\overrightarrow{ه_١}$ = ($أ_١$ ، $ب_١$ ، $جـ_١$) ، $\overrightarrow{ه_٢}$ = ($أ_٢$ ، $ب_٢$ ، $جـ_٢$) متجهي اتجاه مستقيمين فإن :

- المستقيمين متوازيان إذا كان :

$\overrightarrow{ه_١}$ = ك $\overrightarrow{ه_٢}$ أ، $\overrightarrow{ه_١} \times \overrightarrow{ه_٢} = \overrightarrow{و}$ أ، $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{جـ_١}{جـ_٢}$

- المستقيمين متعامدان إذا كان :

$أ_١ أ_٢ + ب_١ ب_٢ + جـ_١ جـ_٢$ = صفر

معادلة المستوى :

معادلة المستوي المار بالنقطة ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$) و المتجه $\overrightarrow{ن}$ = (أ ، ب ، جـ) عموديا على المستوي هي :

- الصورة المتجهة : $\overrightarrow{ن} . \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن}$. ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$)
- الصورة القياسية : أ (س – $س_١$) + ب (ص – $ص_١$) + جـ (ع – $ع_١$) = صفر
- الصورة العامة : أ س + ب ص + جـ ع + ء = صفر ، حيث ء = -أ $س_١$ - ب $ص_١$ - جـ $ع_١$

الزاوية بين مستويين :

إذا كان $\overleftarrow{ن_١} = ($ أ$_١$ ، ب$_١$ ، جـ$_١)$ ، $\overleftarrow{ن_٢} = ($ أ$_٢$ ، ب$_٢$ ، جـ$_٢)$ متجهي العمودين على المستويين فإن قياس

الزاوية بين المستويين تعطي بالعلاقة :

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{|\overleftarrow{ن_١} \cdot \overleftarrow{ن_٢}|}{\|\overleftarrow{ن_١}\|\,\|\overleftarrow{ن_٢}\|} \qquad \text{حيث } ٠^\circ \leqslant \theta \leqslant ٩٠^\circ$$

المستويان المتوازيان و المستويان المتعامدان :

إذا كان $\overleftarrow{ن_١}$ ، $\overleftarrow{ن_٢}$ هما المتجهان العموديان على المستويين فإن :

- شرط توازي المستويين هو : $\overleftarrow{ن_١} \parallel \overleftarrow{ن_٢}$ أ، $\frac{\text{أ}_١}{\text{أ}_٢} = \frac{\text{ب}_١}{\text{ب}_٢} = \frac{\text{جـ}_١}{\text{جـ}_٢}$
- شرط تعامد المستويين هو : $\overleftarrow{ن_١} \cdot \overleftarrow{ن_٢} = ٠$ أ، أ$_١$ أ$_٢$ + ب$_١$ ب$_٢$ + جـ$_١$ جـ$_٢$ = صفر

طول العمود المرسوم من نقطة على المستوي :

طول العمود المرسوم من النقطة أ (س$_١$ ، ص$_١$ ، ع$_١$) على المستوي المار بالنقطة ب (س$_٢$ ، ص$_٢$ ، ع$_٢$)

و المتجه $\overleftarrow{ن} = ($ أ ، ب ، جـ $)$ عمودي على المستوي هو ل حيث:

$$ل = \frac{|\overleftarrow{ب\,أ} \cdot \overleftarrow{ن}|}{\|\overleftarrow{ن}\|}$$

طول العمود المرسوم من النقطة أ (س$_١$ ، ص$_١$ ، ع$_١$) على المستوي الذي معادلته:

أ س + ب ص + جـ ع + ء = صفر هو ل حيث:

$$ل = \frac{|\text{أ س}_١ + \text{ب ص}_١ + \text{جـ ع}_١ + \text{ء}|}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ + \text{جـ}^٢}}$$

معادلة المستوي باستخدام الأجزاء المقطوعة من محاور الاحداثيات :

إذا قطع المستوي محاور الاحداثيات في النقط : (س$_١$ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ص$_١$ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ع$_١$)

فإن معادلة المستوي تكون على الصورة :

$$\frac{س}{س_١} + \frac{ص}{ص_١} + \frac{ع}{ع_١} = ١$$