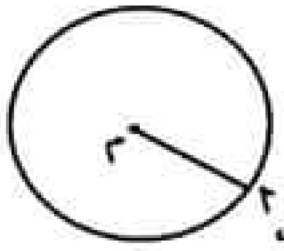
تعاريف ومفاهيم أساسية

الدائرة :

الدائرة هي مجموعه نقط المستوى التى تبعد بعداً ثابتاً عن نقطة ثابتة فى المستوى .

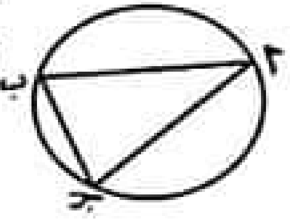
نصف قطر الدائرة

هو القطعة المستقيمة التى طرفاها (أو نهايتها) مركز الدائرة وأى نقطة على الدائرة.



وتر الدائرة

هو القطعة المستقيمة التى طرفها أى نقطتين على الدائرة .

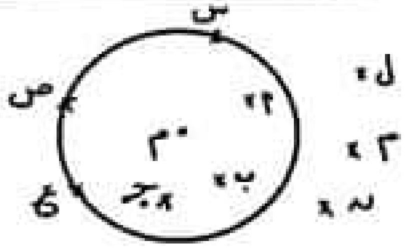


قطر الدائرة

هو الوتر المار بمركز الدائرة .

الدائرة : تقسم المستوى إلى ثلاث مجموعات من النقاط

- مجموعة النقط داخل الدائرة مثل : أ ، ب ، جـ
- مجموعة النقط على الدائرة مثل : س ، ص ، ع
- مجموعة النقط خارج الدائرة مثل : ل ، م ، ن



ملاحظات

(١) للدائرة الواحدة عدد لانهائى من أنصاف الأقطار وجميعها متساوية فى الطول .

(٢) إذا تساوى طولا نصفى قطرين فى دائرتين تكونان متطابقتين ، والعكس صحيح .

(٣) للدائرة الواحدة عدد لانهائى من الأقطار وجميعها متساوية فى الطول .

(٤) أكبر الأوتار طولاً فى الدائرة هو القطر وطوله = ٢ نق .

تذكر أن :

- مساحة الدائرة = π نق^{٢} .
- محيط الدائرة = ٢ π نق .

التماثل فى الدائرة

- محور تماثل الدائرة هو المستقيم الذى يحمل قطراً فى الدائرة
- للدائرة عدد لانهائى من محاور التماثل .

أ/ أكرم محمد يونس
مدرس رياضيات
٠١١٤٢٧٤٧٥٧٨

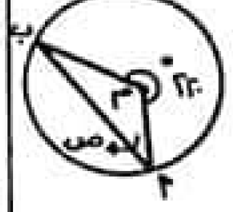
أوجد الرمز المستخدم في القياس في الأشكال الآتيـة

(أ)

الحل

∵ م أ = م ب = نق
∴ ق(أ̂) = ق(ب̂) = ٤٠°
∵ مجموع قياسات زوايا △ = ١٨٠°
∴ س = ١٨٠° − [٤٠° + ٤٠°] = ١٠٠°

(ب)



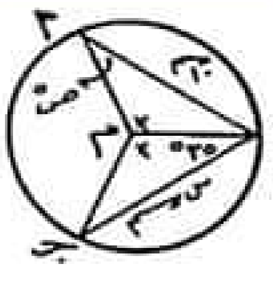
∵ مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة = ٣٦٠°
∴ ق(∠أ م ب) = ٣٦٠° − ٢٢٠° = ١٤٠°
∵ م أ = م ب = نق
∴ ص = ق(أ̂) = (١٨٠° − ١٤٠°) / ٢ = ٢٠°

(جـ)

الحل

∵ أ ء = ء م
∴ ق(أ̂) = ق(∠ء م أ) = ٢٧°
∵ ∠هـ ء م خارجية عن △ أ ء م
∴ س = ٢٧° + ٢٧° = ٥٤°
∵ م ء = م هـ = نق
∴ ق(هـ̂) = ق(∠هـ ء م) = ٥٤°
∴ ق(∠ء م هـ) = ص = ١٨٠° − [٢ × ٥٤°]
= ١٨٠° − ١٠٨° = ٧٢°

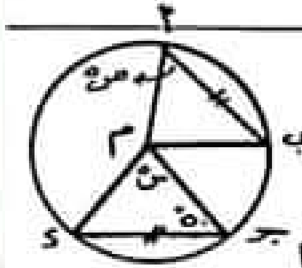
(د)



الحل

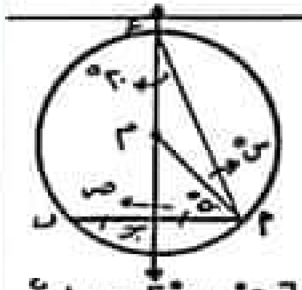
△ أ ب م ≡ △ جـ ب م
ضلعان وزاوية
محصورة بينهما
∴ س = ٣٠   ∵ م ب = م جـ = نق
∴ ق(جـ̂) = ق(∠جـ ب م) = ٣٥°
∴ ق(أ̂) = ق(جـ̂) = ٣٥°

(هـ)



∵ م أ = م ب = م جـ
= م ء ، أ ب = جـ ء
∴ △ أ ب م ≡ △ ء جـ م
ثلاثة أضلاع   ∴ ق(أ̂) = ق(جـ̂) = ٥٠°
∵ م جـ = م ء = نق   ∴ ق(ء̂) = ق(جـ̂) = ٥٠°
∴ ق(∠جـ م ء) = س = ١٨٠° − [٢ × ٥٠°] = ٨٠°

(و)



∵ جـ منتصف $\overline{أب}$
∴ $\overline{مجـ}$ ⊥ $\overline{أب}$
∴ ص = ٩٠°
∴ ق(أ̂) = ١٨٠° − [٩٠° + ٢٠°] = ٧٠°
∴ س = ٧٠° − ٥٠° = ٢٠°

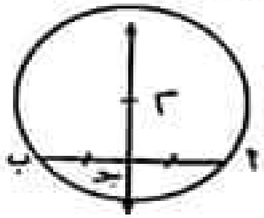
نتائج هامة :

(١) المستقيم المار بمركز الدائرة ومنتصف أى وتر فيها يكون عمودياً على هذا الوتر.

ففى الشكل المقابل :

إذا كان : أب وتراً فى الدائرة م

، جـ منتصف أب فإن : م جـ ⊥ أب

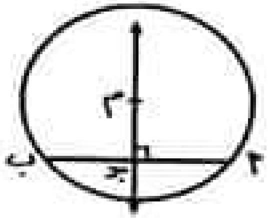


(٢) المستقيم المار بمركز الدائرة عمودياً على أى وتر فيها ينصف هذا الوتر.

ففى الشكل المقابل :

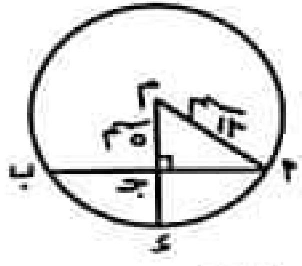
إذا كان : أب وتراً فى الدائرة م

، م جـ ⊥ أب فإن : جـ منتصف أب



(٣) المستقيم العمودى على أى وتر فى الدائرة من منتصفه يمر بمركز هذه الدائرة .

مثال : فى كل من الأشكال الآتية ، م دائرة : أكمل ما يأتى



أب = ...

جـ د = ...

(الحل)

∵ م جـ ⊥ أب

∴ جـ منتصف أب

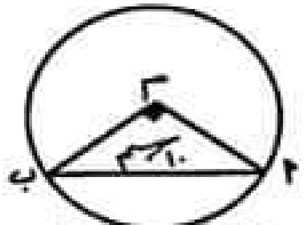
، أ جـ = $\sqrt{(١٣)^٢ - (٥)^٢}$

∴ أ جـ = ١٢ سم فيثاغورث

∴ أ ب = ١٢ + ١٢ = ٢٤ سم

، ∵ م د = ١٣ (نق)

∴ جـ د = ١٣ - ٥ = ٨ سم



ق(أ) = ... °

أم = ...

(الحل)

∵ م أ = م ب = نق

∴ ق (أ) = $\frac{١٨٠ - ٩٠}{٢}$ = ٤٥°

نفرض م أ = م ب = س

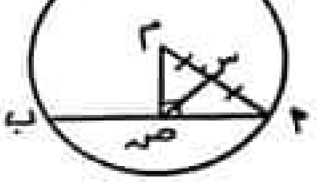
∴ س² + س² = (١٠)²

٢ س² = ١٠٠

س² = $\frac{١٠٠}{٢}$ = ٥٠

س = $\sqrt{٥٠}$ = ٥ $\sqrt{٢}$ سم

فكر فى حل آخر



س ص = ٧ سم

ط = $\frac{٢٢}{٧}$

مساحة الدائرة = ... سم²

(الحل)

∵ س ص متوسط

فى △ أ ص م القائم الزاوية فى ص

∴ أ م = ٢ س ص

أ م = نق = ٢ × ٧ = ١٤ سم

مساحة الدائرة

= ط نق² = $\frac{٢٢}{٧}$ × (١٤)²

= ٦١٦ سم²

◯ فى كل من الأشكال الآتيـة م دائـرة .

(أ) أوجد ق(∠ أ م هـ)

(الحل)

∵ هـ منتصف أب

∴ م هـ ⊥ أب

∴ ق(∠ م هـ أ) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

∴ ق(∠ أ م هـ) = ١٨٠° - (٩٠° + ٥٠°) = ٤٠°

(ب) أوجد

ق(∠ ء م هـ)

(الحل)

∵ ء منتصف أب

∴ م ء ⊥ أب

∴ ق(∠ م ء أ) = ٩٠°

، ∵ هـ منتصف أجـ ∴ م هـ ⊥ أجـ

∴ ق(∠ م هـ أ) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى الداخلة = ٣٦٠°

∴ ق(∠ ء م هـ) = ٣٦٠° - (٩٠° + ٩٠° + ٦٠°)

= ٣٦٠ - ٢٤٠ = ١٢٠°

(جـ) أب = ٨ سم

أوجد طول م ب

(الحل)

∵ م جـ ⊥ أب ∴ جـ منتصف أب

∴ جـ ب = $\frac{١}{٢}$ أ ب = ٤ سم

∵ △ م جـ ب قائم الزاوية

∴ (م ب)² = (م جـ)² + (جـ ب)²

(م ب)² = (٣)² + (٤)² = ٩ + ١٦ = ٢٥

م ب = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم

(ء) أوجد طول أب

(الحل)

∵ م س ⊥ أب

∴ س منتصف أب

(أ س)² = (أ م)² - (م س)²

(أ س)² = (١٠)² - (٦)² = ١٠٠ - ٣٦ = ٦٤

∴ أ س = ٨ سم ∴ أ ب = ٨ + ٨ = ١٦ سم

(هـ) أب = ١٠ سم أوجد طول

هـ ء

الحل

∵ م هـ ⊥ أب ∴ هـ منتصف أب

∴ أ هـ = ٥ سم ، ق(∠ أ م هـ) = ٣٠°

∴ أ م = ٢ × ٥ = ١٠ سم ∴ هـ ء (قطر) = ٢٠ سم

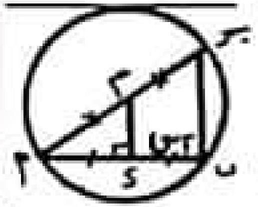
(و) أوجد قيمة س

الحل ∵ م منتصف أجـ

، م ء ⊥ أب ∴ ء منتصف أب

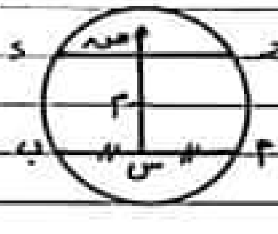
∴ م ء // جـ ب ∴ ٢ س = ٩٠ بالتناظر

س = $\frac{٩٠}{٢}$ = ٤٥



مثال

في الشكل المقابل:



م دائرة ، أب // حـ ء

، س منتصف أب ، رسم م س فقطع حـ ء في ص أثبت أن ص منتصف حـ ء

المعطيات: أب // حـ ء ، أ س = ب س

المطلوب: إثبات أن حـ ص = ص ء

البرهان: ∵ س منتصف أب ∴ م س ⊥ أب

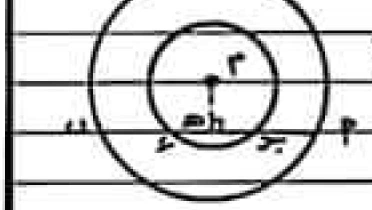
∵ أب // حـ ء ، س ص قاطع لهما

∴ ق(∠ء ص س) = ق(∠أ س ص) = ٩٠° بالتبادل

∴ م ص ⊥ حـ ء ∴ ص منتصف حـ ء

مثال

في الشكل المقابل:



دائرتان متحدتا المركز م ، أب وتر في الدائرة الكبرى يقطع الصغرى في حـ ، ء أثبت أن أ حـ = ب ء

المعطيات: أب ∩ الدائرة الصغرى = {حـ ، ء}

المطلوب: اثبات أن أ حـ = ب ء **العمل:** نرسم م هـ ⊥ أب

البرهان:

في الدائرة الكبرى ∵ م هـ ⊥ أب ∴ هـ أ = هـ ب ....(١)

في الدائرة الصغرى ∵ م هـ ⊥ حـ ء ∴ هـ حـ = هـ ء ....(٢)

بطرح (٢) من (١) ينتج أن

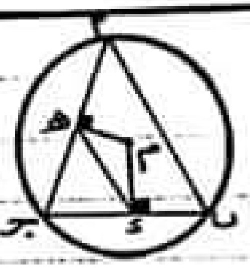
هـ أ − هـ حـ = هـ ب − هـ ء

∴ أ حـ = ب ء (وهو المطلوب)

○ في الشكل المقابل: أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة مركزها م ، م ء ⊥ ب جـ ، م هـ ⊥ أ جـ أثبت أن

أولاً: هـ ء // أ ب

ثانياً: محيط △ جـ ء هـ = ½ محيط △ أ ب جـ



البرهان

∵ م ء ⊥ ب جـ ∴ ء منتصف ب جـ ....(١)

∵ م هـ ⊥ أ جـ ∴ هـ منتصف أ جـ ....(٢)

في △ أ ب جـ ء منتصف ب جـ ، هـ منتصف أ جـ

∴ ء هـ // أ ب (القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وتساوي نصفه) "نظرية"

، ء هـ = ½ أ ب ....(٣)

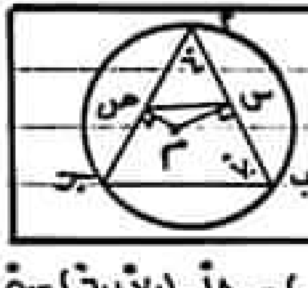
من (١) ، (٢) ، (٣) بالجمع

جـ ء + جـ هـ + ء هـ = ½ ب جـ + ½ أ جـ + ½ أ ب

محيط △ جـ ء هـ = ½ (ب جـ + أ جـ + أ ب)

محيط △ جـ ء هـ = ½ محيط △ أ ب جـ

○ في الشكل المقابل: في الدائرة م ، م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ جـ ، ق(∠أ) = ٦٠° ، ق(∠ب) = ٧٠° أوجد قياسات زوايا المثلث م س ص



الحل:

∵ مجموع قياسات زوايا △ = ١٨٠° ∴ ق(∠جـ) = ١٨٠° − (٧٠° + ٦٠°) = ٥٠°

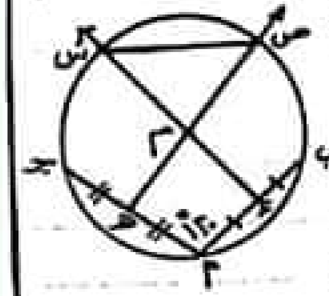
∵ م س ⊥ أ ب ∴ س منتصف أ ب
∵ م ص ⊥ أ جـ ∴ ص منتصف أ جـ
} ∴ س ص // ب جـ

∴ ق(∠ص س م) = ١٨٠° − (٧٠° + ٩٠°) = ٢٠° داخلتان وفي جهة واحدة من القاطع

، ق(∠س ص م) = ١٨٠° − (٥٠° + ٩٠°) = ٤٠°

ق(∠س م ص) = ١٨٠° − (٤٠° + ٢٠°) = ١٢٠°

○ في الشكل المقابل: أب ، أجـ وتران في الدائرة م يحصران زاوية قياسها ١٢٠° ، ء ، هـ منتصفا أب ، أجـ على الترتيب. رسم ءم ، هـم فقطعا الدائرة في س ، ص على الترتيب أثبت أن المثلث س ص م متساوي الأضلاع.



البرهان

∵ ء منتصف أب ∴ م ء ⊥ أب ∴ ق(∠أءم) = ٩٠°

∵ هـ منتصف أجـ ∴ م هـ ⊥ أجـ ∴ ق(∠أهـم) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق(∠ءمهـ) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ١٢٠°) = ٦٠°

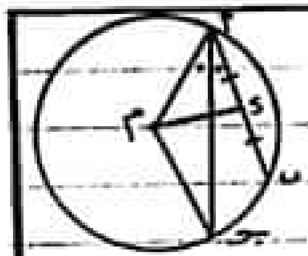
∴ ق(∠صمس) = ق(∠ءمهـ) = ٦٠° (بالتقابل بالرأس)

∵ م ص = م س (انصاف اقطار)

∴ ق(∠س) = ق(∠ص) = $\frac{١٨٠ - ٦٠}{٢}$° = ٦٠°

∴ ∆ م ص س متساوي الأضلاع.

○ في الشكل المقابل: أب وتر في الدائرة م أجـ ينصف ∠ب أ م ويقطع الدائرة م في جـ إذا كان ء منتصف أب أثبت أن ءم ⊥ جـ م



البرهان

∵ ء منتصف أب ∴ م ء ⊥ أب ∴ ق(∠أءم) = ٩٠°

∵ م أ = م جـ (انصاف اقطار)

∴ ق(∠جـ) = ق(∠م أ جـ) ← (١)

∵ أجـ ينصف ∠ب أ م

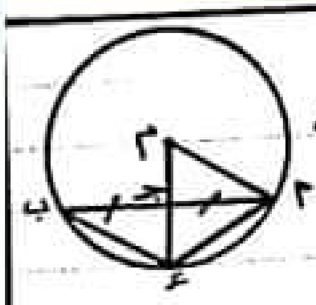
∴ ق(∠ب أ جـ) = ق(∠م أ جـ) ← (٢) من (١) ، (٢)

∴ ق(∠جـ) = ق(∠ب أ جـ) وهما في وضع تبادل ∴ أب // جـ م

∵ أب // جـ م ∴ ق(∠جـ م ء) = ق(∠أءم) = ٩٠° بالتبادل

∴ ءم ⊥ جـ م

○ في الشكل المقابل: م دائرة طول نصف قطرها ١٣ سم ، أب وتر فيها طوله ٢٤ سم ، جـ منتصف أب ، م جـ ∩ الدائرة م = {ء} أوجد مساحة ∆ أ ء ب



البرهان

∵ جـ منتصف أب ∴ م جـ ⊥ أب ∴ ق(∠أجـم) = ٩٠°

، أجـ = ½ أب = ½ × ٢٤ = ١٢ سم

∴ في ∆ أجـم القائم الزاوية في جـ

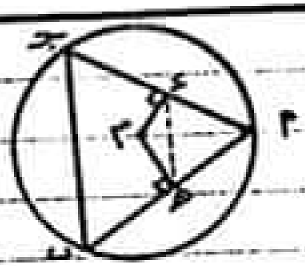
(م جـ)² = (م أ)² − (أجـ)² = (١٣)² − (١٢)² = ١٦٩ − ١٤٤ = ٢٥

∴ م جـ = √٢٥ = ٥ سم.

∵ م ء = ١٣ سم (نصف قطر) ∴ جـ ء = ١٣ − ٥ = ٨ سم

∴ مساحة ∆ أ ب ء = ½ القاعدة × الارتفاع = ½ × ٢٤ × ٨ = ٩٦ سم²

○ في الشكل المقابل: أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة مركزها م ، م ء ⊥ أجـ ، م هـ ⊥ أب أثبت أن: ء هـ // ب جـ وإذا كان ب جـ = ٨ سم فأوجد طول ء هـ.



البرهان العمل: نرسم ء هـ

∵ م هـ ⊥ أب ∴ هـ منتصف أب

، ∵ م ء ⊥ أجـ ∴ ء منتصف أجـ

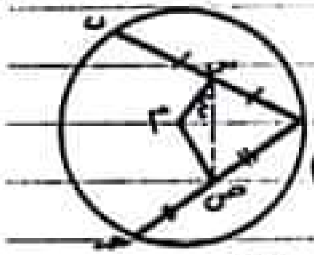
∴ ء هـ // ب جـ (لأن القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وتساوي نصفه . نظرية)

∵ ب جـ = ٨ سم

∴ ء هـ = ½ ب جـ

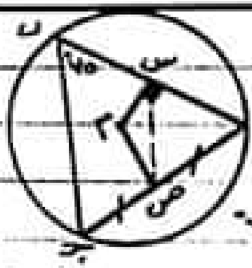
= ½ × ٨ = ٤ سم.

○ أب ، أجـ وتران متساويان في الطول في الدائرة م ، س ، ص منتصفا أب ، أجـ ، ق(م س̂ ص) = ٣٠° أثبت أن
أولاً المثلث م س ص متساوي الساقين.
ثانياً المثلث أ س ص متساوي الأضلاع



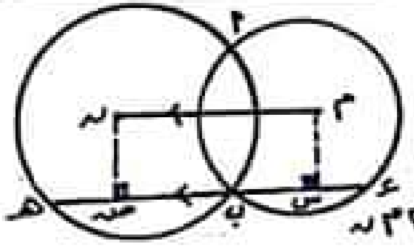
البرهان ∵ س منتصف أب
∴ م س ⊥ أب
∵ ص منتصف أجـ ∴ م ص ⊥ أجـ
∴ م س ⊥ أب ، م ص ⊥ أجـ ، أب = أجـ (أوتار متساوية)
∴ م ص = م س (أبعاد متساوية)
∴ △ م ص س متساوي الساقين (المطلوب أولاً)
∵ م س ⊥ أب ∴ ق(أ س̂ م) = ٩٠° ، ∵ ق(م س̂ ص) = ٣٠°
∴ ق(أ س̂ ص) = ٩٠° − ٣٠° = ٦٠°
∵ أب = أجـ ، س منتصف أب ، ص منتصف أجـ
∴ أ س = أ ص ∴ ق(أ ص̂ س) = ق(أ س̂ ص) = ٦٠°
∴ ق(أ̂) = ١٨٠ − (٦٠° + ٦٠°) = ٦٠°
∴ △ أ س ص متساوي الأضلاع.

○ أب ، أجـ وتران في الدائرة م ، م س ⊥ أب ، ص منتصف أجـ
، ق(أ ب̂ ص) = ٧٥° ، م س = م ص
(أ) أوجد ق(ب أ̂ جـ) (ب) أثبت أن: محيط △ أ س ص = ½ محيط △ أ ب جـ



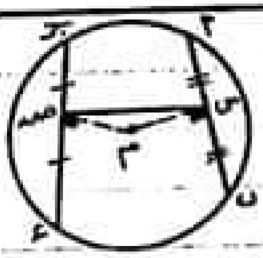
البرهان ∵ ص منتصف أجـ ∴ م ص ⊥ أجـ
∵ م س ⊥ أب ، م س = م ص
∴ أب = أجـ ∴ ق(ب̂) = ق(جـ̂) = ٧٥°
∴ ق(ب أ̂ جـ) = ١٨٠° − (٧٥° + ٧٥°) = ١٨٠° − ١٥٠ = ٣٠°
∵ م س ⊥ أب ∴ س منتصف أب ∴ أ س = ½ أب ← ①
∵ ص منتصف أجـ ∴ أ ص = ½ أجـ ← ② س ص = ½ ب جـ ← ③ بالجمع ①، ②، ③
∴ محيط △ أ س ص = ½ محيط △ أ ب جـ

○ في الشكل المقابل:
م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب
رسم ب ء // م ن ويقطع الدائرتين
في ء ، هـ على الترتيب. أثبت أن ء هـ = ٢ م ن

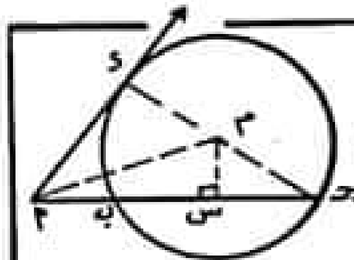


البرهان العمل: نرسم م س ⊥ ء ب ، ن ص ⊥ ب هـ
∵ م س ⊥ ء هـ ∴ ق(م س̂ ب) = ٩٠°
∵ ن ص ⊥ ء هـ ∴ ق(ن ص̂ س) = ٩٠°
، ∵ م ن // ء هـ ∴ الشكل م س ص ن مستطيل.
∴ س ص = م ن ← ①
∵ م س ⊥ ء ب ∴ س ب = ½ ب ء
∵ ن ص ⊥ ب هـ ∴ ب ص = ½ ب هـ } بالجمع
∴ س ص = ½ ء هـ ∴ ء هـ = ٢ س ص ← ②
من ①، ② ∴ ء هـ = ٢ م ن

○ في الشكل المقابل: أب ، جـ ء وتران متساويان
في الطول في الدائرة م ، س ، ص منتصفا
أب ، جـ ء بحيث يكون ب ، ء في جهة واحدة
من س ص أثبت أن: ق(ب س̂ ص) = ق(ء ص̂ س)



البرهان العمل: نرسم م س ⊥ أب ، م ص ⊥ جـ ء
∴ م س ⊥ أب ∴ ق(م س̂ ب) = ٩٠°
∵ م ص ⊥ جـ ء ∴ ق(م ص̂ ء) = ٩٠°
، ∵ أب = جـ ء (أوتار متساوية)
∴ م س = م ص ابعاد متساوية
∴ ق(م س̂ ص) = ق(م ص̂ س) ← ② بالجمع
∴ ق(م س̂ ب) = ق(م ص̂ ء) = ٩٠° ← ① ∴ ق(ب س̂ ص) = ق(ء ص̂ س)



○ في الشكل المقابل: م دائرة طول نصف قطرها ٥سم ، أ نقطة خارج الدائرة
$\overleftrightarrow{أء}$ مماس للدائرة م عند ء ، $\overrightarrow{أب}$ يقطع الدائرة في ب ، جـ على الترتيب حيث
أب = ٤ سم ، أجـ = ١٢ سم (أ) أوجد بعد الوتر بجـ عن مركز الدائرة
(ب) احسب طول $\overline{أء}$

البرهان: العمل: نرسم $\overline{مس}$ ⊥ $\overline{جـب}$ ، $\overline{مء}$ ، $\overline{مأ}$ ، $\overline{مجـ}$

∵ $\overline{مس}$ ⊥ $\overline{جـب}$ ∴ س منتصف $\overline{جـب}$ ∴ س ب = ½ ب جـ

∵ أجـ = ١٢ سم ، أب = ٤ سم ∴ جـ ب = ١٢ − ٤ = ٨ سم

∴ س ب = ½ × ٨ = ٤ سم

∵ نق = ٥ سم ∴ م جـ = م ء = ٥ سم .

في △ م س جـ ∵ م جـ = ٥ سم ، جـ س = ٤ سم

∴ (م س)^2 = (م جـ)^2 − (جـ س)^2 = (٥)^2 − (٤)^2 = ٢٥ − ١٦ = ٩

∴ م س = √٩ = ٣ سم . أولاً

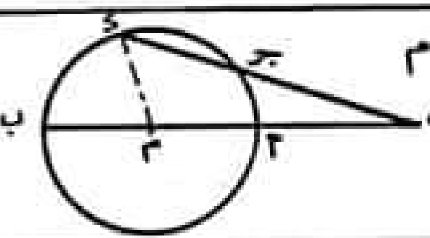
في △ م س أ ∴ (أم)^2 = (م س)^2 + (س أ)^2 = (٣)^2 + (٨)^2 = ٩ + ٦٤

∴ (أم)^2 = ٧٣ أم = √٧٣

في △ أ م ء ∵ $\overline{أء}$ مماس ∴ $\overline{مء}$ ⊥ $\overline{أء}$ ∴ ق($\hat{ء}$) = ٩٠°

∴ (أء)^2 = (أم)^2 − (م ء)^2 = (√٧٣)^2 − (٥)^2 = ٧٣ − ٢٥ = ٤٨

∴ أء = √٤٨ = ٤√٣ سم .

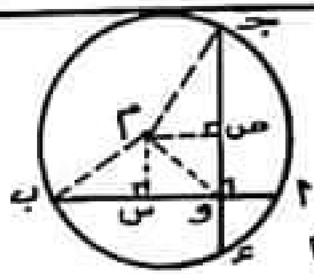


○ في الشكل المقابل: $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م
$\overrightarrow{بأ} \cap \overrightarrow{ءجـ}$ = {ن}
أثبت أن: ن ب > ن ء

البرهان: نرسم نصف القطر $\overline{مء}$ ، في △ ن م ء ∵ م ن + م ء > ن ء

∵ م ب = م ء ∴ م ن + م ب > ن ء متباينة المثلث

∴ ن ب > ن ء ⇐ ※



○ في الشكل المقابل:
دائرة طول نصف قطرها ٧ سم ،
$\overline{أب}$ ، $\overline{جـء}$ وتران متعامدان ومتقاطعان في النقطة و. فإذا كان أب = ١٢ سم ، جـء = ١٠ سم
أوجد: طول $\overline{مو}$

البرهان العمل: نرسم $\overline{مس}$ ⊥ $\overline{أب}$ ، $\overline{مص}$ ⊥ $\overline{ءجـ}$ ، نصل $\overline{مجـ}$ ، $\overline{مب}$

∴ م جـ = ٧ سم (نصف قطر)

∵ $\overline{مص}$ ⊥ $\overline{جـء}$ ∴ ص منتصف $\overline{جـء}$ ∴ جـ ص = ½ جـ ء

∴ جـ ص = ½ × ١٠ = ٥ سم

في △ م جـ ص قائم الزاوية في ص

∴ (م ص)^2 = (م جـ)^2 − (جـ ص)^2 = (٧)^2 − (٥)^2 = ٤٩ − ٢٥

(م ص)^2 = ٢٤ م ص = √٢٤

∵ م ب = ٧ سم (نصف قطر) ، $\overline{مس}$ ⊥ $\overline{أب}$ ∴ س منتصف $\overline{أب}$

∴ ب س = ½ أب = ½ × ١٢ = ٦ سم

في △ م س ب ∴ (م س)^2 = (م ب)^2 − (س ب)^2 = (٧)^2 − (٦)^2

(م س)^2 = ٤٩ − ٣٦ = ١٣ ∴ م س = √١٣

∵ الشكل م ص و س مستطيل ∴ س و = م ص = √٢٤

في △ م س و (م و)^2 = (م س)^2 + (و س)^2 = (√١٣)^2 + (√٢٤)^2

∴ (م و)^2 = ١٢ + ٢٤ = ٣٧ ∴ م و = √٣٧ سم .

موضع نقطة ومستقيم ودائرة بالنسبة لدائرة أخرى

موضع نقطة بالنسبة لدائرة :

لمعرفة موضع نقطة بالنسبة لدائرة طول نصف قطرها نق نعين البعد بين النقطة ومركز الدائرة وليكن م ن فإذا كانت

١) م ن < نق كانت النقطة خارج الدائرة.
٢) م ن = نق كانت النقطة هي احدى نقاط الدائرة ، تقع على الدائرة.
٣) م ن > نق كانت النقطة داخل الدائرة.

موضع مستقيم بالنسبة لدائرة :

لمعرفة موضع مستقيم بالنسبة لدائرة طول نصف قطرها نق نعين بعد مركز الدائرة عن المستقيم وليكن م ن فإذا كان

١) م ن < نق كان المستقيم يقع خارج الدائرة.
٢) م ن = نق كان المستقيم مماس للدائرة.
٣) م ن > نق كان المستقيم قاطع للدائرة.

العكس صحيح ...

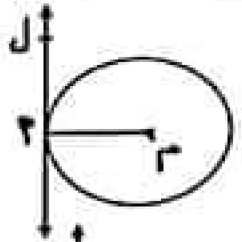
موضع دائرة بالنسبة لدائرة أخرى :

ليكن نق١ ، نق٢ طولا نصفي قطري دائرتين ، م ن هو البعد بين مركزي الدائرتين تكون

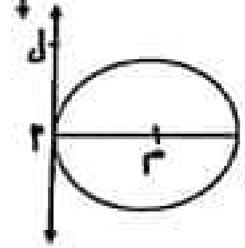
١) الدائرتان متحدتا المركز إذا كان م ن = صفر
٢) الدائرتان متباعدتان إذا كان م ن < نق١ + نق٢
٣) الدائرتان متداخلتان إذا كان م ن > نق١ − نق٢ (حيث نق١ < نق٢)
٤) الدائرتان متماستان من الخارج إذا كان م ن = نق١ + نق٢ (مماس مشترك)
٥) الدائرتان متماستان من الداخل إذا كان م ن = نق١ − نق٢ (حيث نق١ < نق٢)

لدائرتان متقاطعتان إذا كان نق١ − نق٢ > م ن > نق١ + نق٢ **الدائرة الخارجة لمثلث**

حقائق هامة :



① المماس للدائرة يكون عموديا على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس.
إذا كان: المستقيم ل مماساً للدائرة م عند النقطة أ
فإن: $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ المستقيم ل .



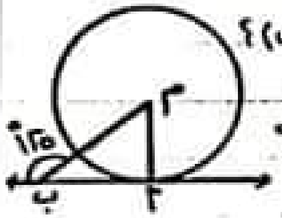
② المستقيم العمودي على قطر الدائرة من إحدى نهايته يكون مماساً لها .
إذا كان: $\overline{\text{أ ب}}$ قطراً في الدائرة م ، المستقيم ل ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ من النقطة أ فإن المستقيم ل يكون مماس للدائرة عند أ

③ المماسان لدائرة المرسومان من نهايتي قطر فيها يكونان متوازيين .

---

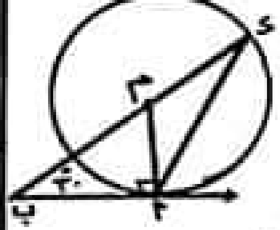
① في كل من الأشكال الآتية
م دائرة ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس

(أ) أوجد ق(∠أ م ب) ؟



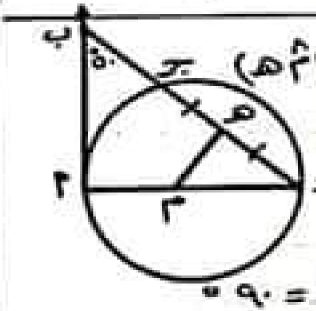
∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس
∴ ق(∠م أ ب) = ٩٠°
∴ ق(∠أ م ب) = ١٢٥° − ٩٠° = ٣٥°

(ب) أوجد ق(∠أ د ب)



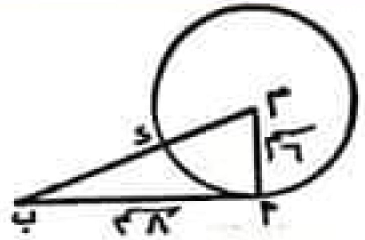
الحل
∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس
∴ ق(∠م أ ب) = ٩٠°
∴ ق(∠أ م د) = ٣٠° + ٩٠° = ١٢٠°
∵ م أ = م د = نق
∴ ق(∠أ د ب) = $\frac{١٨٠° - ١٢٠°}{٢}$ = ٣٠°

(جـ) أوجد ق(∠أ م هـ)



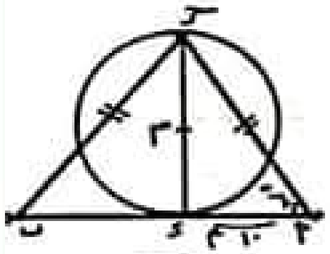
الحل
∵ هـ منتصف $\overline{\text{جـ د}}$
∴ ق(∠م هـ جـ) = ٩٠°
∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس ∴ $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$
∴ ق(∠أ) = ٩٠°
∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°
∴ ق(∠أ م هـ) = ٣٦٠° − [٩٠° + ٩٠° + ٥٠°]
= ٣٦٠° − ٢٣٠° = ١٣٠°

(د) أوجد طول $\overline{\text{د ب}}$



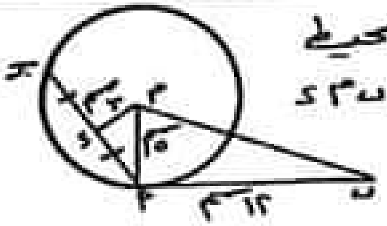
الحل
∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس ∴ $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$
∴ ق(∠أ) = ٩٠°
∴ (م ب)² = (م أ)² + (أ ب)²
(م ب)² = (٦)² + (٨)² = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠
م ب = ١٠ سم ∵ م د = م أ = ٦ سم
∴ د ب = ١٠ − ٦ = ٤ سم

(هـ) أوجد محيط △أ ب جـ



الحل
∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس
∴ $\overline{\text{جـ د}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$
، د منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ أ ب = ٢٠ سم
∵ ق(∠أ) = ٦٠° ∴ △أ جـ ب
متساوي الأضلاع محيطه = ٢٠ × ٣ = ٦٠ سم

(و) أوجد محيط الشكل أ ب م د



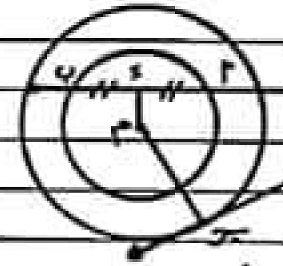
الحل
∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس ∴ $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ ق(∠م أ ب) = ٩٠°
∴ م ب = $\sqrt{(١٢)^2 + (٥)^2}$ = ١٣ سم
∵ د منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ∴ $\overline{\text{م د}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$
∴ أ د = $\sqrt{(٥)^2 - (٣)^2}$ = ٤ سم
∴ محيط الشكل أ ب م د = ١٢ + ١٣ + ٣ + ٤ = ٣٢ سم

مثال (١)

في الشكل المقابل:

دائرتان متحدتا المركز م ، هـ جـ مماس للدائرة الكبرى ، هـ ب يقطع الدائرة الصغرى في أ ، ب ، ء منتصف أ ب

ق(∠جـ هـ ء) = ٤٠° أوجد بالبرهان ق(∠ء م جـ)



المعطيات: هـ جـ مماس ، ء منتصف أ ب

المطلوب: إيجاد ق(∠ء م جـ)

البرهان: ∵ هـ جـ مماس ∴ م جـ ⊥ هـ جـ ∴ ق(∠جـ) = ٩٠°

∵ ء منتصف أ ب ∴ م ء ⊥ أ ب ∴ ق(∠هـ ء م) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعى = ٣٦٠°

∴ ق(∠ء م جـ) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٤٠°) = ٣٦٠° − ٢٢٠° = ١٤٠°

مثال

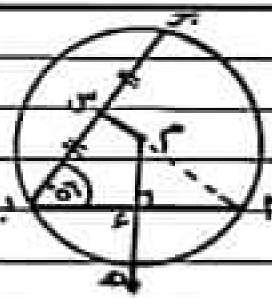
في الشكل المقابل:

أ ب ، ب جـ وتران في الدائرة م التي طول نصف قطرها ٥ سم ، م ء ⊥ أ ب يقطع أ ب في ء ويقطع الدائرة م في هـ

س منتصف ب جـ ، أ ب = ٨ سم

، ق(∠أ ب جـ) = ٥٦° أوجد:

① ق(∠ء م س) ② طول ء هـ



البرهان: ∵ س منتصف ب جـ ∴ م س ⊥ ب جـ ∴ ق(∠م س ب) = ٩٠°

∵ م ء ⊥ أ ب ∴ ق(∠م ء ب) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعى = ٣٦٠°

∴ ق(∠ء م س) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٥٦°) = ٣٦٠° − ٢٣٦° = ١٢٤

الحل: نرسم م أ ∴ م أ = نق = ٥ سم ، ∵ م ء ⊥ أ ب ∴ ء منتصف أ ب

∴ أ ء = ٤ سم في △ م أ ء (م ء)² = (م أ)² − (أ ء)² = (٥)² − (٤)²

∴ (م ء)² = ٢٥ − ١٦ = ٩ ∴ م ء = ٣ سم ∴ ء هـ = ٥ − ٣ = ٢ سم

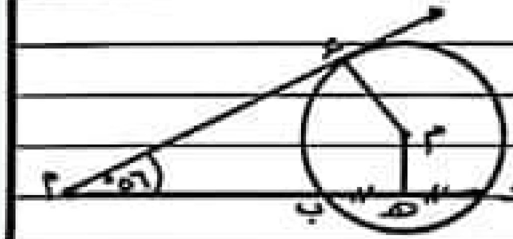
مثال

في الشكل المقابل:

أ ء مماس للدائرة م ، أ جـ يقطع الدائرة م في ب ، جـ

هـ منتصف ب جـ ،

ق(∠أ) = ٥٦° أوجد ق(∠ء م هـ)



المعطيات: أ ء مماس للدائرة م ، هـ منتصف ب جـ

المطلوب: إيجاد ق(∠ء م هـ)

البرهان: ∵ هـ منتصف جـ ب ∴ م هـ ⊥ جـ هـ

∴ ق(∠م هـ أ) = ٩٠°

، ∵ أ ء مماس ∴ م ء ⊥ أ ء ∴ ق(∠ء) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعى = ٣٦٠°

∴ ق(∠ء م هـ) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٥٦°) = ٣٦٠° − ٢٣٦°

∴ ق(∠ء م هـ) = ١٢٤°

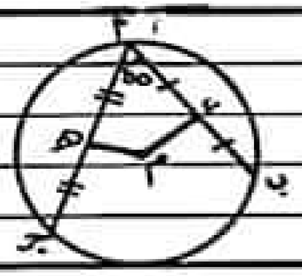
مثال

في الشكل المقابل:

أ ب ، أ جـ وتران في الدائرة م

ء منتصف أ ب ، هـ منتصف أ جـ

ق(∠ب أ جـ) = ٥٥° أوجد ق(∠ء م هـ)



الإجابة

المعطيات: ء منتصف أ ب ، هـ منتصف أ جـ

المطلوب: ق(∠ء م هـ)

البرهان: ∵ ء منتصف أ ب ∴ م ء ⊥ أ ب

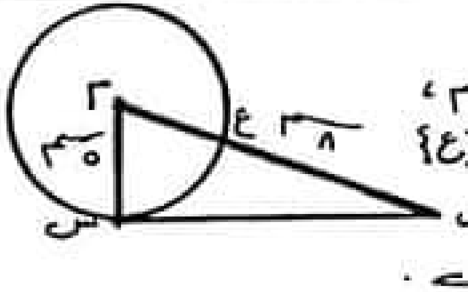
∴ ق(∠أ ء م) = ٩٠°

∵ هـ منتصف أ جـ ∴ م هـ ⊥ أ جـ ∴ ق(∠أ هـ م) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعى ٣٦٠°

∴ ق(∠ء م هـ) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٥٥°) = ٣٦٠° − ٢٣٥°

= ١٢٥°



○ في الشكل المقابل :-
م دائرة طول نصف قطرها ٥ سم ،
س ص = ١٢ سم ، $\overrightarrow{\text{م ص}}$ ∩ الدائرة م = {ع}
، ع ص = ٨ سم أثبت أن :-
$\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماس للدائرة م عند س .

الحل ∵ $\overrightarrow{\text{م ص}}$ ∩ الدائرة م = {ع} ∴ م ص = ص ع + ع م

∴ م ص = ٨ + ٥ = ١٣ سم .

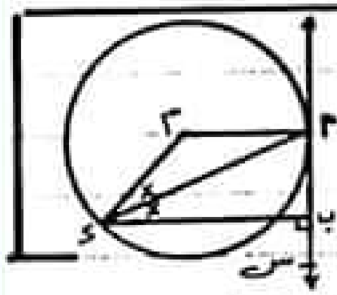
∴ (م ص)^2 = (١٣)^2 = ١٦٩

، ∵ (م س)^2 + (س ص)^2 = (٥)^2 + (١٢)^2 = ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩

∴ (م ص)^2 = (م س)^2 + (س ص)^2 (عكس نظرية فيثاغورث)

∴ ق(∠م س ص) = ٩٠° ∴ $\overline{\text{م س}}$ ⊥ $\overline{\text{س ص}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماس للدائرة عند س .



○ في الشكل المقابل : $\overrightarrow{\text{د أ}}$ ينصف ∠م د ب
، $\overline{\text{د ب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة م

البرهان ∵ م أ = م د (أنصاف أقطار)

∴ ق(∠م أ د) = ق(∠م د أ) ← (١)

، ∵ $\overrightarrow{\text{د أ}}$ ينصف ∠م د ب

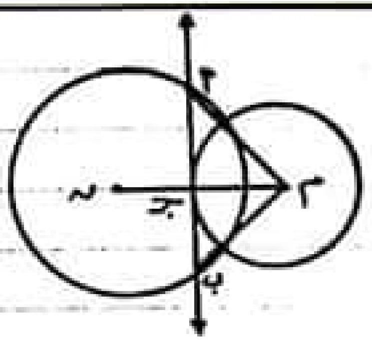
∴ ق(∠أ د ب) = ق(∠م د أ) ← (٢)

من (١)، (٢) ∴ ق(∠م أ د) = ق(∠أ د ب) (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overleftrightarrow{\text{م أ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$

∴ ق(∠م أ ب) = ق(∠د ب س) = ٩٠° بالتناظر

∴ $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة م.



○ في الشكل المقابل :-
م ، ن دائرتان متقاطعتان ،
$\overline{\text{م ن}}$ يقطع الدائرة م في جـ ،
رسم $\overleftrightarrow{\text{جـ أ}}$ مماساً للدائرة م عند جـ
يقطع الدائرة ن في أ ، ب أثبت أن :-
(أ) جـ أ = جـ ب (ب) م أ = م ب

البرهان ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ مماس للدائرة م

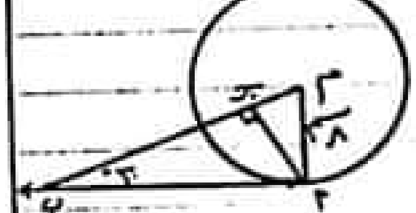
∴ $\overline{\text{م جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

في الدائرة ن . ∵ $\overline{\text{ن جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$ ∴ جـ منتصف الوتر $\overline{\text{أ ب}}$

∴ جـ أ = جـ ب (المطلوب أولاً)

∵ ΔΔ م أ جـ ، م ب جـ فيهما
① $\overline{\text{م جـ}}$ ضلع مشترك
② جـ أ = جـ ب
③ ق(∠م جـ أ) = ق(∠م جـ ب) = ٩٠°

∴ Δ م جـ أ ≡ Δ م جـ ب وينتج أن م أ = م ب



○ في الشكل المقابل :-
$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس مشترك للدائرة م عند أ
، م أ = ٨ سم ، ق(∠أ ب م) = ٣٠°
اوجد طول كل من : $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$

البرهان ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس ∴ $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ ق(∠م أ ب) = ٩٠°

∵ ق(∠ب) = ٣٠° ∴ م ب = ٢ × م أ = ٢ × ٨ = ١٦ سم

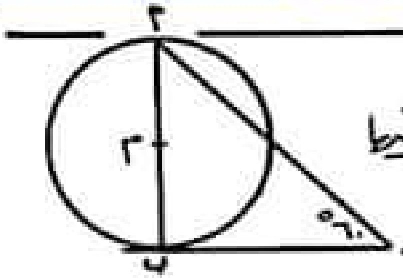
في Δ أ ب م (أ ب)^2 = (م ب)^2 − (م أ)^2 = (١٦)^2 − (٨)^2 = ٢٥٦ − ٦٤

(أ ب)^2 = ١٩٢ ∴ أ ب = $\sqrt{١٩٢}$ = ٨$\sqrt{٣}$ سم

∵ $\overline{\text{أ جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{م ب}}$ ∴ أ جـ = $\frac{\text{م أ} \times \text{أ ب}}{\text{م ب}}$ = $\frac{٨ \times ٨\sqrt{٣}}{١٦}$ (إقليدس)

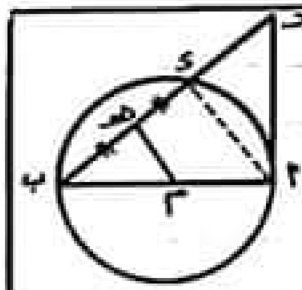
أ جـ = ٤$\sqrt{٣}$

فكر في طريقة أخرى لإيجاد كل ؟؟



○ في الشكل المقابل :-
دائرة م محيطها ٤٤ سم ، أب قطر فيها
ب جـ مماس للدائرة عند ب ،
ق(∠جـ) = ٦٠° اوجد طول ب جـ
(ط = ٢٢/٧)

الجواب
∵ الدائرة م محيطها = ٤٤ سم
∴ ٢ ط نق = ٤٤
∴ ٢ × ٢٢/٧ × نق = ٤٤ ⟸ ٤٤/٧ نق = ٤٤
∴ نق = ٤٤ × ٧/٤٤ ⟸ ∴ نق = ٧ سم
∴ أب (قطر الدائرة) = ٢ نق = ٢ × ٧ = ١٤ سم
∵ جـ ب مماس ∴ أب ⊥ ب جـ ∴ ق(∠أ ب جـ) = ٩٠°
∵ ظا جـ = أب/ب جـ ⟸ ∴ ظا ٦٠° = ١٠/ب جـ
∴ ب جـ = ١٠/ظا ٦٠°



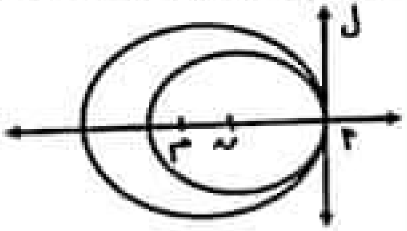
○ في الشكل المقابل :-
أب قطر في الدائرة م ، أ جـ مماس لها عند أ
فإذا كان أ جـ = ٩ سم ، ب م = ٦ سم
أوجد طول كل من ب جـ ، أ ء

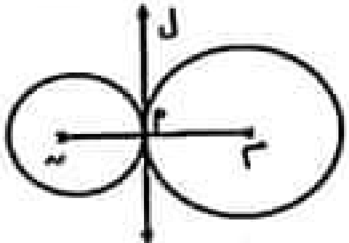
الجواب
الحل :- نرسم أ ء
∵ أ جـ مماس ∴ م أ ⊥ أ جـ ∴ ق(∠أ) = ٩٠°
∵ أب قطر ∴ ق(∠أ ء ب) = ٩٠° (محيطية مرسومة في نصف دائرة)
∵ ب م = ٦ سم ∴ أب = ٢ × ٦ = ١٢ سم
في Δ أ ب جـ القائم الزاوية في أ (ب جـ)² = (أب)² + (أ جـ)²
∴ (ب جـ)² = (١٢)² + (٩)² = ١٤٤ + ٨١ = ٢٢٥ ∴ ب جـ = √٢٢٥ = ١٥ سم
∵ أ ء ⊥ ب جـ ∴ أ ء = (أ جـ × أ ب)/ب جـ = (٩ × ١٢)/١٥ = ٧,٢ سم
∵ هـ منتصف ء ب ، م منتصف أب ∴ م هـ = ½ أ ء = ½ × ٧,٢ = ٣,٦ سم.

نتائج هامة على علاقة دائرة بدائرة أخرى :

نتيجة : ①

خط المركزين لدائرتين متماستين يمر بنقطة التماس . ويكون عمودياً على المماس المشترك عند هذه النقطة

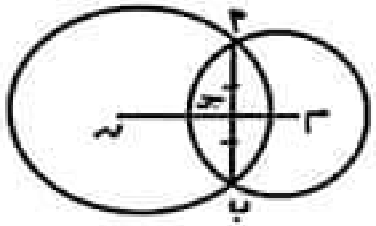




- إذا كانت الدائرتان م ، ن متماستين عند نقطة أ «نقطة التماس»
، المستقيم ل مماساً مشتركاً لهما عند أ فإن م ن ⊥ ل

نتيجة ②

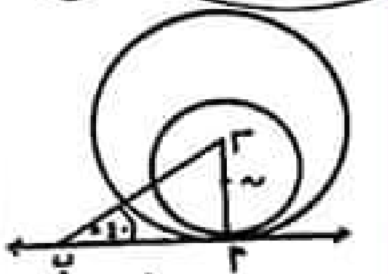
خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عمودياً علي الوتر المشترك وينصفه.



- إذا كانت الدائرتان م ، ن متقاطعتين
في أ ، ب فإن: م ن ⊥ أب ، م ن ينصف أب
أي أن : أ جـ = ب جـ
وهذا يعني أن : م ن محور تماثل أب

أمثلة

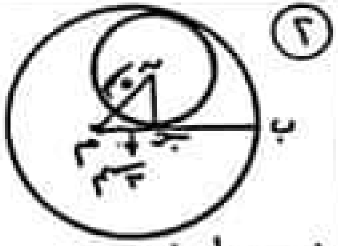
①



أوجد ق(∠ب م ن)

الحل
∵ أب مماس ، م ن خط المركزين
∴ م ن ⊥ أب
∴ ق(∠أ) = ٩٠°
∴ ق(∠ب م ن)
= ١٨٠ − [٩٠° + ٤٠°] = ٥٠°

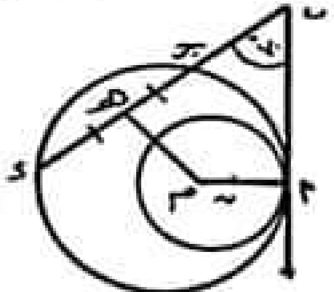
②



أوجد طول ن جـ

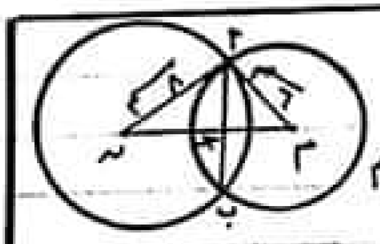
الحل
∵ ن م مماس للدائرة ن
∴ ن جـ ⊥ ن م
∴ ق(∠ن جـ م) = ٩٠°
∴ ن جـ = √((٥)² − (٣)²)
ن جـ = ٤ سم
فيثاغورث

③



أوجد ق(∠هـ م ن)

الحل
∵ أب مماس مشترك
∴ م ن ⊥ أب ∴ ق(∠أ) = ٩٠°
∵ هـ منتصف جـ ء
∴ م هـ ⊥ جـ ء
∴ ق(∠م هـ ب) = ٩٠°
∴ ق(∠أ م هـ)
= ٣٦٠° − [٩٠° + ٩٠° + ٧٠°] = ١١٠°



في الشكل المقابل: م، ن دائرتان متقاطعتان في أ، ب،
$\overline{\text{م ن}} \cap \overline{\text{أ ب}}$ = {جـ}، م أ = ٦ سم، أ ن = ٨ سم
$\overline{\text{م أ}} \perp \overline{\text{أ ن}}$ أوجد طول $\overline{\text{أ ب}}$

البرهان

∵ $\overline{\text{م أ}} \perp \overline{\text{أ ن}}$ ∴ ق($\hat{\text{أ}}$) = ٩٠°

، ∵ $\overline{\text{م ن}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ (خط المركزين عمودياً على الوتر المشترك)

∴ جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ وينصفه

في △ م أ ن ⇐ (م ن)^{٢} = (م أ)^{٢} + (أ ن)^{٢} = (٦)^{٢} + (٨)^{٢} = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠

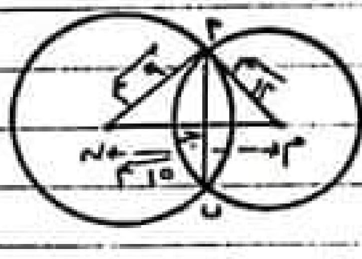
∴ م ن = ١٠ سم (فيثاغورث)

، أ جـ = $\frac{\text{م أ} \times \text{أ ن}}{\text{م ن}}$ = $\frac{٦ \times ٨}{١٠}$ = ٤,٨ سم (إقليدس)

∴ أ ب = ٢ × ٤,٨ = ٩,٦ سم

م، ن دائرتان متقاطعتان في أ، ب، م أ = ١٢ سم، ن أ = ٩ سم
، م ن = ١٥ سم أوجد طول $\overline{\text{أ ب}}$

البرهان



∵ (م ن)^{٢} = (١٥)^{٢} = ٢٢٥

∵ (م أ)^{٢} + (أ ن)^{٢} = (١٢)^{٢} + (٩)^{٢}

١٤٤ + ٨١ = ٢٢٥

∴ (م ن)^{٢} = (م أ)^{٢} + (أ ن)^{٢}

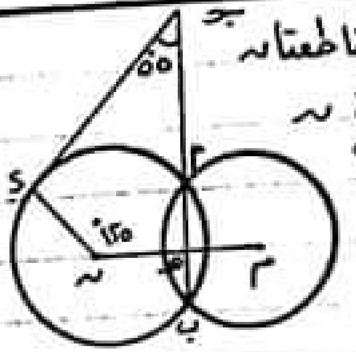
∴ ق($\hat{\text{أ}}$) = ٩٠° (عكس نظرية فيثاغورث)

∵ $\overline{\text{م ن}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ (خط المركزين عمودياً على الوتر المشترك وينصفه)

، جـ منتصف أ ب

∴ أ جـ = $\frac{\text{م أ} \times \text{أ ن}}{\text{م ن}}$ = $\frac{١٢ \times ٩}{١٥}$ = ٧,٢ (إقليدس)

∴ أ ب = ٢ × ٧,٢ = ١٤,٤ سم.



في الشكل المقابل: م، ن دائرتان متقاطعتان في أ، ب، جـ ∈ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$، د ∈ للدائرة ن
، ق(م $\hat{\text{ن}}$ د) = ١٢٥°، ق(ب $\hat{\text{جـ}}$ د) = ٥٥°
أثبت أن: $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ مماس للدائرة ن عند د

البرهان

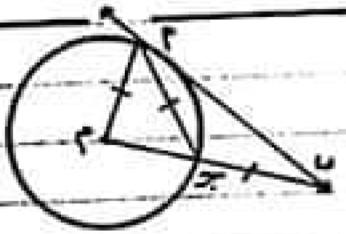
∵ $\overline{\text{م ن}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ (خط المركزين عمودياً على الوتر المشترك)

∴ ق(ن $\hat{\text{هـ}}$ أ) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق($\hat{\text{د}}$) = ٣٦٠° − (٩٠° + ١٢٥° + ٥٥°) = ٣٦٠° − ٢٧٠° = ٩٠°

∴ $\overline{\text{ن د}} \perp \overline{\text{د جـ}}$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ مماس للدائرة عند د.



في الشكل المقابل:
أ م = أ جـ = جـ ب
أثبت أن: $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماساً للدائرة م.

الحل

∵ م جـ = م أ = نق (انصاف أقطار)

، ∵ أ جـ = م أ (معطى)

∴ △ م أ جـ متساوي الأضلاع

∴ ق(م $\hat{\text{أ}}$ جـ) = ٦٠° ← (١)

∵ (ب $\hat{\text{جـ}}$ أ) خارجة عن △ م أ جـ المتساوي الأضلاع

∴ ق(ب $\hat{\text{جـ}}$ أ) = ١٢٠°

∴ △ أ جـ ب متساوي الساقين

∴ ق(جـ $\hat{\text{أ}}$ ب) = $\frac{١٨٠ - ١٢٠°}{٢}$ = ٣٠° ← (٢)

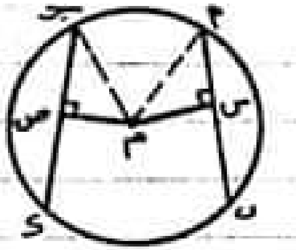
من (١)، (٢) نستنتج أن ق(م $\hat{\text{أ}}$ ب) = ٩٠°

∴ $\overline{\text{م أ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس.

علاقة أوتار الدائرة بمركزها

نظرية

الأوتار المتساوية في الطول في دائرة على أبعاد متساوية من مركزها.



المعطيات: أب ، جـ د وتران في دائرة م .
حيث أ ب = جـ د
، م س ⊥ أب ، م ص ⊥ جـ د

المطلوب: إثبات أن: م س = م ص .

البرهان **العمل** نرسم م أ ، م جـ

∵ م س ⊥ أ ب ∴ س منتصف أ ب

∴ أ س = $\frac{1}{2}$ أ ب

، ∵ م ص ⊥ جـ د ∴ ص منتصف جـ د ∴ جـ ص = $\frac{1}{2}$ جـ د

∴ أ س = جـ ص

∴ ∆∆ أ س م ، جـ ص م فيهما
① أ س = جـ ص
② م أ = م جـ = نق
③ ق (∠ أ س م) = ق (∠ جـ ص م) = ٩٠°

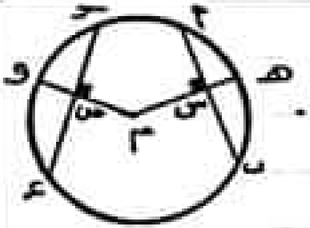
∴ يتطابق المثلثان وينتج أن م س = م ص .

نتيجة الأوتار المتساوية في الطول في الدوائر المتطابقة على أبعاد متساوية من المركز .

عكس النظرية

في الدائرة الواحدة (أو في الدوائر المتطابقة)
إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من المركز فإنها تكون متساوية في الطول .

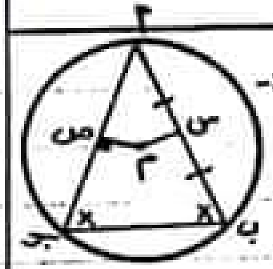
مثال



في الشكل المقابل :-
أ ب = جـ د
، م هـ ⊥ أ ب
، م و ⊥ جـ د اثبت أن هـ س = و ص

البرهان ∵ م س ⊥ أ ب
، م ص ⊥ جـ د
، أ ب = جـ د
∴ م س = م ص ← (١)
، ∵ م هـ = م و ← (٢)
بطرح (١) من (٢)
∴ هـ س = و ص ⇐ **

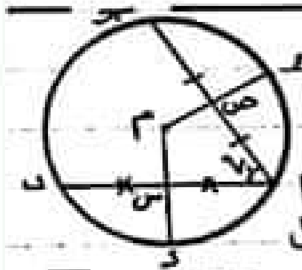
مثال



في الشكل المقابل :-
أ ب جـ مثلث مرسوم داخل الدائرة م
فيه :-
ق (∠ب) = ق (∠جـ) ، س منتصف أ ب
، م ص ⊥ أ جـ اثبت أن : م س = م ص

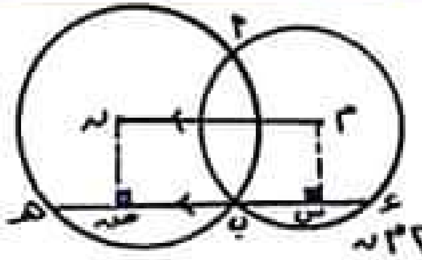
البرهان ∵ س منتصف أ ب
∴ م س ⊥ أ ب
، ∵ ق (∠ب) = ق (∠جـ) ∴ أ ب = أ جـ
∴ م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ جـ
، أ ب = أ جـ
∴ م س = م ص ⇐ **

مثال



في الشكل المقابل :-
أ ب ، أ جـ وتران م متساويان في الطول في الدائرة م ، س منتصف أ ب
، ص منتصف أ جـ ، ق (∠ جـ أ ب) = ٧٠°
(أ) احسب ق (∠ د م هـ)
(ب) اثبت أن : س د = ص هـ

البرهان ∵ س منتصف أ ب
∴ م س ⊥ أ ب
∴ ق (∠ أ س م) = ٩٠°
، ∵ ص منتصف أ جـ
∴ م ص ⊥ أ جـ
∴ ق (∠ أ ص م) = ٩٠°
∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلية للشكل الرباعي = ٣٦٠°
∴ ق (∠ ص م س) =
= ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٧٠°)
= ٣٦٠° − ٢٥٠° = ١١٠°
، ∵ م ص ⊥ أ جـ ، م س ⊥ أ ب
، أ ب = أ جـ
∴ م س = م ص ← (١)
، ∵ م د = م هـ ← (٢)
بطرح (١) من (٢)
∴ س د = ص هـ .



○ في الشكل المقابل :
م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب
رسم $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ ∥ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ ويقطع الدائرتين
في ء ، هـ على الترتيب . أثبت أن : ء هـ = ٢ م ن

البرهان العمل : نرسم $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{ء ب}}$ ، $\overline{\text{ن ص}} \perp \overline{\text{ب هـ}}$

∵ $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{ء هـ}}$ ∴ ق(م $\hat{\text{س}}$ ب) = ٩٠°

∵ $\overline{\text{ن ص}} \perp \overline{\text{ء هـ}}$ ∴ ق(ن $\hat{\text{ص}}$ س) = ٩٠°

، ∵ $\overline{\text{م ن}}$ ∥ $\overline{\text{ء هـ}}$ ∴ الشكل م س ص ن مستطيل .

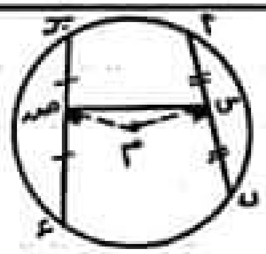
∴ س ص = م ن ← ①

∵ $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{ء ب}}$ ∴ س ب = ½ ب ء

∵ $\overline{\text{ن ص}} \perp \overline{\text{ب هـ}}$ ∴ ب ص = ½ ب هـ } بالجمع

∴ س ص = ½ ء هـ ∴ ء هـ = ٢ س ص ← (٢)

من (١) ، (٢) ∴ ء هـ = ٢ م ن



○ في الشكل المقابل : $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ وتران متساويان
في الطول في الدائرة م ، س ، ص منتصفا
$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ بحيث يكون ب ، ء في جهة واحدة
من $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ أثبت أن : ق(ب $\hat{\text{س}}$ ص) = ق(ء $\hat{\text{ص}}$ س)

البرهان العمل : نرسم $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{جـ ء}}$

∵ $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ∴ ق(م $\hat{\text{س}}$ ب) = ٩٠°

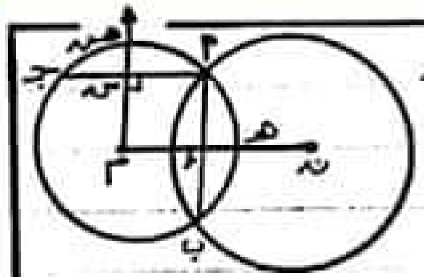
∵ $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{جـ ء}}$ ∴ ق(م $\hat{\text{ص}}$ ء) = ٩٠°

، ∵ أ ب = جـ ء (أوتار متساوية)

∴ م س = م ص ابعاد متساوية

∴ ق(م $\hat{\text{س}}$ ص) = ق(م $\hat{\text{ص}}$ س) ← (٢) بالجمع

∴ ق(م $\hat{\text{س}}$ ب) = ق(م $\hat{\text{ص}}$ ء) = ٩٠° ← ① ∴ ق(ب $\hat{\text{س}}$ ص) = ق(ء $\hat{\text{ص}}$ س)



○ في الشكل المقابل : م ، ن دائرتان متقاطعتان
في أ ، ب ، رسم $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$ يقطع $\overline{\text{أ جـ}}$
في س ويقطع الدائرة م في ص .
ورسم $\overline{\text{م ن}}$ يقطع $\overline{\text{أ ب}}$ في ء والدائرة م
في هـ إذا كان أ جـ = أ ب أثبت أن : س ص = ء هـ .

البرهان ∵ $\overleftrightarrow{\text{ن م}}$ خط المركزين ، $\overline{\text{أ ب}}$ وتر مشترك للدائرتين م ، ن .

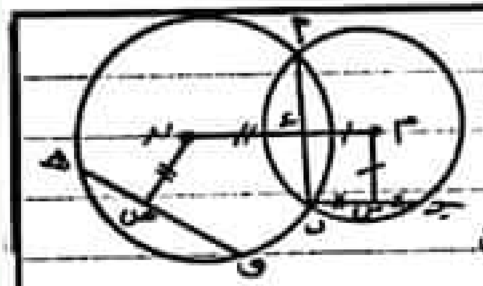
∴ $\overleftrightarrow{\text{م ن}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$ ، أ ب = أ جـ (أوتار متساوية)

∴ م ء = م س ← (١)

∴ م هـ = م ص (أنصاف أقطار) ← (٢)

بطرح (١) من (٢) ∴ م هـ − م ء = م ص − م س

∴ ء هـ = س ص .



○ في الشكل المقابل : م ، ن دائرتان
متقاطعتان في أ ، ب ، $\overleftrightarrow{\text{م ن}} \cap \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = {ء}
، س منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ن ص}} \perp \overline{\text{هـ و}}$
م س = م ء ، ن ص = ن ء أثبت أن
ب جـ = هـ و

البرهان ∵ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ خط المركزين ، $\overline{\text{أ ب}}$ وتر مشترك للدائرتين م ، ن

∴ $\overleftrightarrow{\text{م ن}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

في الدائرة م : ∵ س منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

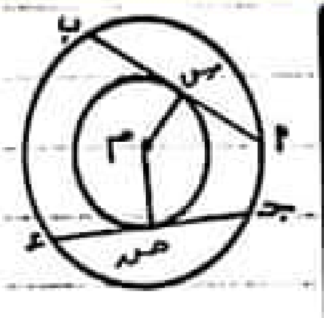
∵ $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{م ء}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، م س = م ء

∴ ب جـ = أ ب ← (١)

في الدائرة ن : ∵ $\overline{\text{ن ص}} \perp \overline{\text{هـ و}}$ ، $\overline{\text{ن ء}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، ن ص = ن ء

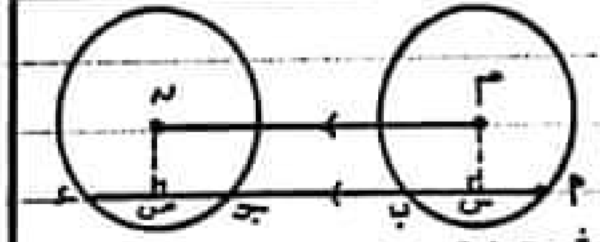
∴ هـ و = أ ب ← (٢) من (١) ، (٢) ∴ ب جـ = هـ و .

○ دائرتان متحدتا المركز م ، أب ، جـ ء وتران في الدائرة الكبرى يمسان الدائرة الصغرى في س ، ص على الترتيب
أثبت أن: أب = أجـ .



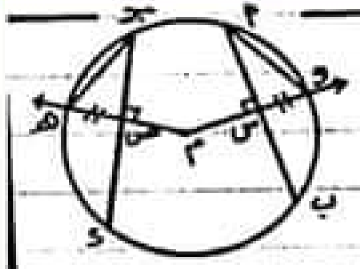
البرهان ∵ أب مماس للدائرة الصغرى ∴ م س ⊥ أب
، جـ ء مماس للدائرة الصغرى م ص ⊥ جـ ء
∵ م س ⊥ أب ، م ص ⊥ جـ ء ، م ص = م س (انصاف أقطار)
∴ أب = جـ ء ⟸ * ، أبعاد متساوية .

○ في الشكل المقابل:
م ، ن دائرتان متطابقتان ،
رسم أب // م ن فقطع الدائرة م في أ ، ب وقطع الدائرة ن في جـ ، ء
أثبت أن: أجـ = ب ء



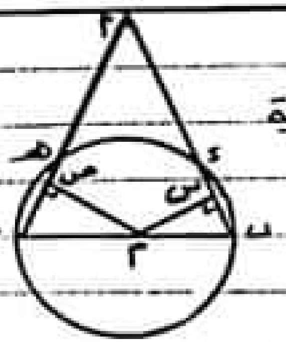
البرهان العمل: نرسم م س ⊥ أب ، ن ص ⊥ جـ ء
∵ م س ⊥ أب ، ن ص ⊥ جـ ء ، م ن // أب
∴ الشكل م س ص ن مستطيل
∴ م س = ن ص (أبعاد متساوية)
∴ أب = جـ ء بإضافة ب جـ للطرفين
∴ أب + ب جـ = جـ ء + ب جـ
∴ أجـ = ب ء ⟸ *

○ أب ، جـ ء وتران في الدائرة م
، م س ⊥ أب ويقطع الدائرة في و
، م ص ⊥ جـ ء ويقطع الدائرة في هـ ،
و س = هـ ص . أثبت أن:
أولاً: أب = جـ ء   ثانياً: أو = جـ هـ

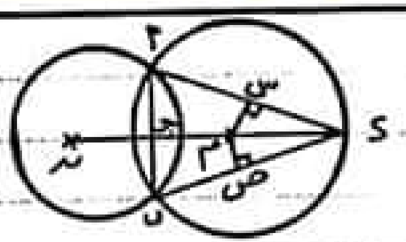


البرهان ∵ م و = م هـ (انصاف أقطار) ← (1)
، س و = ص هـ (معطى) ← (2)
بطرح (2) من (1) ∴ م س = م ص
∵ م س ⊥ أب ، م ص ⊥ جـ ء ، م س = م ص
∴ أب = جـ ء (أوتار متساوية) ← المطلوب أولاً
∵ س منتصف أب ∴ أس = ½ أب
ص منتصف جـ ء ∴ جـ ص = ½ جـ ء
∴ أس = جـ ص
∴ △△ أس و ، جـ ص هـ فيهما
① س و = ص هـ
② أس = جـ ص
③ ق(∠أس و) = ق(∠جـ ص هـ) = ٩٠°
∴ △ أس و ≡ △ جـ ص هـ وينتج أن أو = جـ هـ

○ في الشكل المقابل:
أ ب جـ مثلث فيه أب = أجـ ، رسمت دائرة م قطرها ب جـ قطعت أب في ء ،
أجـ في هـ ، م س ⊥ ب ء ، م ص ⊥ جـ هـ
اثبت أن: ب ء = جـ هـ .



البرهان ∵ أب = أجـ ∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ) ،
وينتج ق(∠س م ب) = ق(∠ص م هـ)
∴ △△ ب م س ، جـ م ص فيهما
① ق(∠ب) = ق(∠جـ)
② ق(∠ب م س) = ق(∠جـ م ص)
③ م ب = م جـ = نق
∴ △ ب م س ≡ △ جـ م ص وينتج أن م س = م ص
∴ ب ء = جـ هـ



○ في الشكل المقابل :-

الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ ، ب}

، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{من}}$ = {جـ} ، د ∈ $\overrightarrow{\text{من}}$

، $\overline{\text{مس}}$ ⊥ $\overline{\text{أد}}$ ، $\overline{\text{مص}}$ ⊥ $\overline{\text{بد}}$

أثبت أن :- م س = م ص.

الحل البرهان ∵ $\overleftrightarrow{\text{من}}$ ⊥ $\overline{\text{أب}}$ ، جـ منتصف $\overline{\text{أب}}$

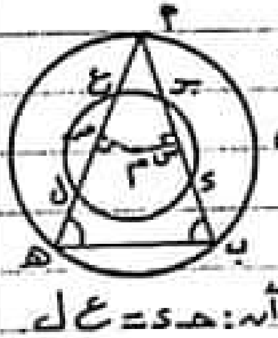
(خط المركزين عمودياً على الوتر المشترك وينصفه)

∴ △△ د ب جـ ، د أ جـ

فيهما
① ق(د جـ ب) = ق(د جـ أ) = ٩٠°
② ب جـ = جـ أ
③ $\overline{\text{دجـ}}$ ضلع مشترك

∴ △ د ب جـ ≡ △ د أ جـ وينتج أن د ب = د أ (أوتار متساوية)

، ∵ $\overline{\text{مص}}$ ⊥ $\overline{\text{دب}}$ ، $\overline{\text{مس}}$ ⊥ $\overline{\text{أد}}$ ∴ م ص = م س (أبعاد متساوية)



○ في الشكل المقابل :-

دائرتان متحدتا المركز م ، رسم $\overline{\text{أب}}$ وتراً في الدائرة الكبرى فقطع الدائرة الصغرى في جـ ، د ، ورسم $\overline{\text{أهـ}}$ وتراً في الدائرة الكبرى أيضاً فقطع الدائرة الصغرى في ع ، ل ، إذا كان ق(أ ب هـ) = ق(أ هـ ب) فأثبتوا أن: جـ د = ع ل

البرهان العمل :- نرسم $\overline{\text{مس}}$ ⊥ $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{مص}}$ ⊥ $\overline{\text{أهـ}}$

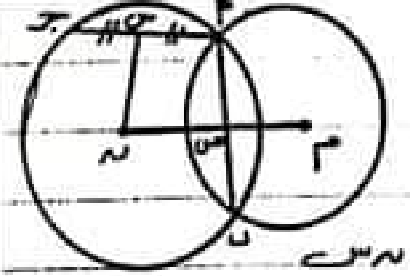
في △ أ ب جـ ∵ ق(أ ب هـ) = ق(أ هـ ب) ∴ أب = أهـ

في الدائرة الكبرى ∵ أب = أهـ ، $\overline{\text{مس}}$ ⊥ $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{مص}}$ ⊥ $\overline{\text{أهـ}}$

∴ م س = م ص (أبعاد متساوية)

في الدائرة الصغرى :- ∵ م س = م ص ، $\overline{\text{مس}}$ ⊥ $\overline{\text{جـد}}$ ، $\overline{\text{مص}}$ ⊥ $\overline{\text{عل}}$

∴ جـ د = ل ع ⇐ ※



○ في الشكل المقابل :- الدائرتان م ، ن متقاطعتان في أ ، ب ، $\overleftrightarrow{\text{من}}$ ∩ $\overline{\text{أب}}$ = {ص} ، أب = أجـ

، س منتصف $\overline{\text{أجـ}}$. أثبت أن: ن ص = ن س

البرهان ∵ $\overleftrightarrow{\text{من}}$ خط المركزين ، $\overline{\text{أب}}$ وتر مشترك

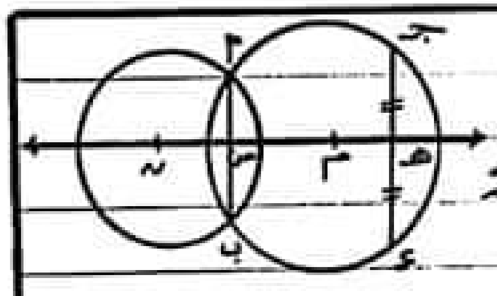
∴ $\overline{\text{نص}}$ ⊥ $\overline{\text{أب}}$

، ∵ س منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ ∴ $\overline{\text{نس}}$ ⊥ $\overline{\text{أجـ}}$

في الدائرة ن :-

∵ $\overline{\text{نص}}$ ⊥ $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{نس}}$ ⊥ $\overline{\text{أجـ}}$ ، أب = أجـ (أوتار متساوية)

∴ ن ص = ن س (أبعاد متساوية)



○ في الشكل المقابل :-

م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب

، $\overline{\text{جـد}}$ وتر في الدائرة م ، يقطع $\overleftrightarrow{\text{من}}$ في هـ ، فإذا كان هـ منتصف $\overline{\text{جـد}}$.

أثبت أن: $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{جـد}}$

البرهان ∵ هـ منتصف $\overline{\text{جـد}}$ ∴ $\overline{\text{مهـ}}$ ⊥ $\overline{\text{جـد}}$

∴ ق(جـ هـ ص) = ٩٠°

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{من}}$ خط المركزين ، $\overline{\text{أب}}$ وتر مشترك

∴ $\overline{\text{مص}}$ ⊥ $\overline{\text{أب}}$ ∴ ق(م ص ب) = ٩٠°

∴ ق(جـ هـ ص) = ق(م ص ب) = ٩٠° وهما في وضع تبادل

∴ $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{جـد}}$

الشكل الرباعي الدائري

الشكل الرباعي الدائري : هو شكل رباعي تنتمي رءوسه الأربعة إلى دائرة واحدة

خواصه :

عكس النظرية (٢)

إذا تساوى قياسا زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة منها فإنه تمر برأسيهما دائرة واحدة تكون هذه القاعدة وترا فيها.

فإذا كان: ق (∠ ج) = ق (∠ د) وهما مرسومتان على قاعدة واحدة $\overline{أب}$

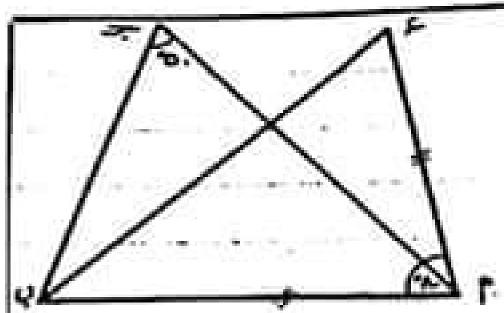
فإن: النقط أ ، ب ، ج ، د تمر بها دائرة واحدة يكون $\overline{أب}$ وترا فيها.

ملاحظات

① إذا وجدت زاويتان مرسومتان على ضلع من أضلاع شكل رباعي وفي جهة واحدة من هذا الضلع وكانتا غير متساويتين في القياس فإن الشكل لا يكون رباعياً دائرياً.

② المستطيل والمربع وشبه المنحرف المتساوي الساقين أشكال رباعية دائرية بينما متوازي الأضلاع والمعين وشبه المنحرف غير المتساوي الساقين ليست أشكال رباعية دائرية

○ في الشكل المقابل: أب = أد ، ق (∠أ) = ٨٠° ، ق (∠ج) = ٥٠°
أثبت أن النقط أ ، ب ، ج ، د تمر بها دائرة واحدة



البرهان في △ أ ب د ∵ أب = أد ، ق (∠أ) = ٨٠°

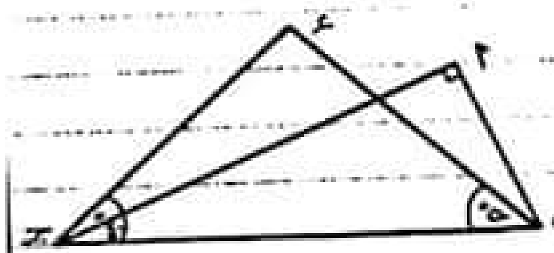
∴ ق (∠د) = ق (∠أ ب د) = $\frac{١٨٠° - ٨٠°}{٢}$ = ٥٠°

∴ ق (∠د) = ق (∠ج) = ٥٠°

وهما مرسومتان على القاعدة $\overline{أب}$ وفي جهة واحدة منها

∴ النقط أ ، ب ، ج ، د تمر بها دائرة واحدة.

○ في الشكل المقابل ق (∠أ) = ٩٠°
، ق (∠د ب ج) = ٥٠°
، ق (∠د ج ب) = ٤٠°
أثبت أن الشكل أ ب ج د رباعي دائري



البرهان في △ د ب ج ∵ ق (∠ج) = ٤٠° ، ق (∠د ب ج) = ٥٠°

∴ ق (∠د) = ١٨٠° − [٥٠° + ٤٠°] = ٩٠°

∴ ق (∠أ) = ق (∠د) = ٩٠°

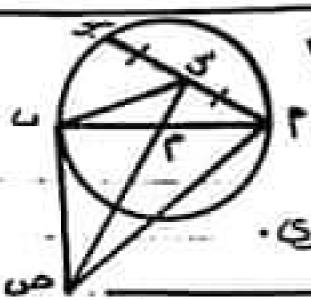
وهما مرسومتان على القاعدة $\overline{ب ج}$ وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل أ ب ج د رباعي دائري.

الحمد لله ، ولا حول ولا قوة

إلا بالله .

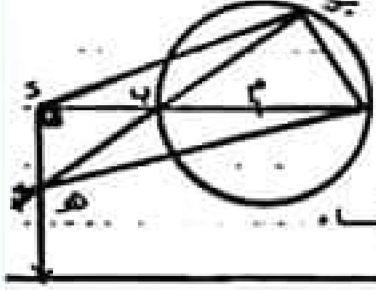
○ في الشكل المقابل: أب قطر في الدائرة م ، س منتصف أحـ ، س م يقطع مماس الدائرة عند ب في ص.
أثبت أن الشكل أ س ب ص رباعي دائري.



البرهان

∵ س منتصف أحـ ∴ م س ⊥ أحـ ∴ ق(∠أ س ص) = ٩٠°
∵ أب قطر ، ب ص مماس ∴ ب ص ⊥ أب ∴ ق(∠أ ب ص) = ٩٠°
∴ ق(∠أ س ص) = ق(∠أ ب ص) = ٩٠°
وهما مرسومتان على القاعدة أ ص وفي جهة واحدة منها
∴ الشكل أ س ب ص رباعي دائري.

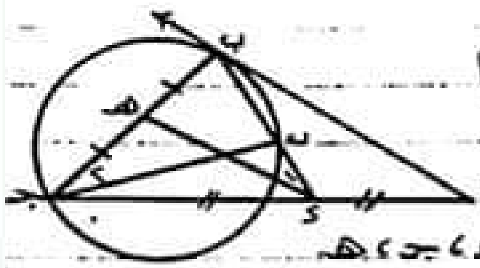
○ في الشكل المقابل: أب قطر في الدائرة م
، ء ∈ أب ، ء ∉ أب ، رسم ء هـ ⊥ أب
، جـ ∈ أب ، جـ ب ∩ ء هـ = {هـ}
أثبت أن: الشكل أ جـ ء هـ رباعي دائري.



البرهان

∵ ء هـ ⊥ أب ∴ ق(∠أ ء هـ) = ٩٠°
، ∵ أب قطر ∴ ق(∠أ جـ ب) = ٩٠° (محيطية مرسومة في نصف دائرة)
∴ ق(∠أ جـ هـ) = ق(∠أ ء هـ) = ٩٠°
وهما مرسومتان على القاعدة أ هـ وفي جهة واحدة منها
∴ الشكل أ جـ ء هـ رباعي دائري.

○ في الشكل المقابل:
أب مماس للدائرة م ، أ ء جـ قاطع لها
ء منتصف أجـ ، هـ منتصف ب جـ ،
ب ء ∩ الدائرة م = {و} ، اثبت أن
أولاً: أب // ء هـ ثانياً: النقط ب ، ء ، جـ ، هـ
يمر بها دائرة واحدة.



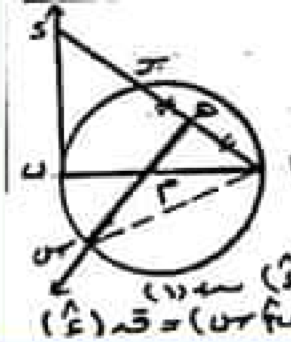
البرهان

∵ ء منتصف أجـ ، هـ منتصف ب جـ
∴ ء هـ // أب "أولاً"
"القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث"
∵ أب // ء هـ ∴ ق(∠١) = ق(∠أ ب ء) بالتبادل ← (١)
∵ أب مماس ∴ ق(∠٢) = ق(∠أ ب ء) مماسية ومحيطية ← (٢)
من (١)، (٢) ∴ ق(∠١) = ق(∠٢) وهما مرسومتان على القاعدة
ء هـ وفي جهة واحدة منها
∴ النقط ب ، ء ، جـ ، هـ يمر بها دائرة واحدة.

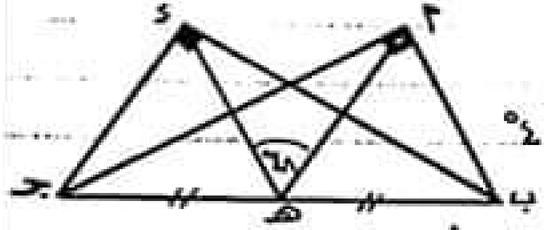
○ أب قطر في الدائرة م ، أجـ وتر فيها ، هـ منتصف أجـ ، رسم
ب ء مماساً للدائرة يقطع أجـ في ء ، رسم هـ م يقطع الدائرة
في س. اثبت أن
أولاً: الشكل م هـ ء ب رباعي دائري. ثانياً: ق(∠أ م س) = ق(∠ء)

البرهان

∵ هـ منتصف أجـ ∴ م هـ ⊥ أجـ
∴ ق(∠م هـ جـ) = ٩٠°
∵ ب ء مماس ∴ م ب ⊥ ب ء ∴ ق(∠ب) = ٩٠°
∴ ق(∠م هـ ء) + ق(∠ب) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°
∴ الشكل م هـ ء ب رباعي دائري ∴ ق(∠س م ب) = ق(∠ء) ← (١)
، ق(∠س م ب) = ٢ ق(∠ب أ س) ∴ ق(∠أ م س) = ق(∠ء)



○ في الشكل المقابل:



ق(∠ب أ جـ) = ق(∠ب د جـ) = ٩٠°

هـ منتصف ب جـ ، ق(∠أ هـ د) = ٤٨°

أولاً: أوجد ق(∠أ ب د)

ثانياً: أثبت أن (١) ق(∠أ ب د) = ق(∠أ جـ د)

(٢) ق(∠أ هـ د) = ٢ ق(∠أ ب هـ)

البرهان

∵ ق(∠ب أ جـ) = ق(∠ب د جـ) = ٩٠°

وهما مرسومتان على القاعدة ب جـ وفي جهة واحدة منها ∴ الشكل أ ب جـ د رباعي دائري

∴ ق(∠أ ب د) = ½ ق(∠أ هـ د) = ½ × ٤٨ = ٢٤°

محيطية ومركزية مشتركتان في أد (أولاً)

، ق(∠أ ب د) = ق(∠أ جـ د)

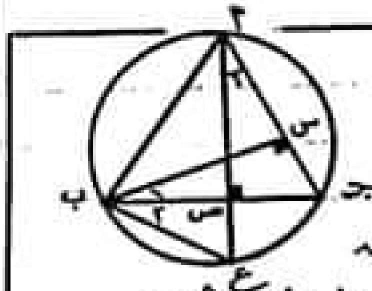
محيطيتان مشتركتان في أد

∵ ق(∠أ هـ ع) = ٢ ق(∠أ ب د) ــ(١) مركزية ومحيطية مشتركتان في أ د

، ∵ ق(∠ع هـ جـ) = ٢ ق(∠ع ب جـ) ــ(٢) مركزية ومحيطية مشتركتان في ع جـ

بجمع (١)، (٢) ∴ ق(∠أ هـ جـ) = ٢ ق(∠أ ب جـ)

○ في الشكل المقابل:



أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة.

ب س ⊥ أ جـ ، أ ص ⊥ ب جـ

يقطعها في ص د ويقطع الدائرة في ع. أثبت أن

أولاً: الشكل أ ب ص س رباعي دائري ثانياً: ب جـ ينصف ∠د ب ع

البرهان

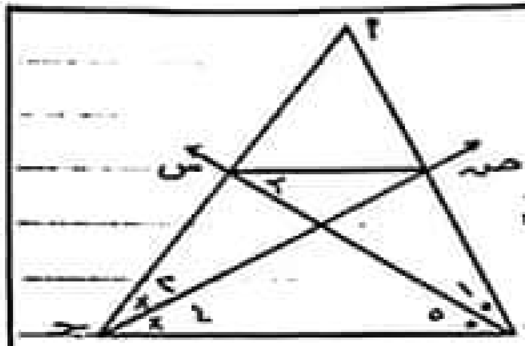
∵ ب س ⊥ أ جـ ∴ ق(∠أ س ب) = ٩٠° ، ∵ أ ص ⊥ ب جـ ∴ ق(∠أ ص ب) = ٩٠°

∴ ق(∠أ س ب) = ق(∠أ ص ب) = ٩٠° وهما مرسومتان على القاعدة أ ب

∴ الشكل أ ب ص س رباعي دائري ∴ ق(∠١) = ق(∠٢) مرسومتان على القاعدة س ص

∴ ق(∠١) = ق(∠٣) ∴ ب جـ ينصف ∠د ب ع ، ق(∠٢) = ق(∠٣) مرسومتان على ع جـ

○ في الشكل المقابل:



أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ

ب س ينصف ∠ب ويقطع أ جـ في س ، جـ ص ينصف ∠جـ ويقطع أ ب في ص أثبت أن

أولاً: ب جـ س ص رباعي دائري

ثانياً: س ص // ب جـ

البرهان

∵ أ ب = أ جـ ∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ) ــ(١)

∵ ب س ينصف ∠ب ∴ ق(∠١) = ½ ق(∠ب) ــ(٢)

، ∵ جـ ص ينصف ∠جـ ∴ ق(∠٢) = ½ ق(∠جـ) ــ(٣)

من (١)، (٢)، (٣) ∴ ق(∠١) = ق(∠٢) وهما مرسومتان على القاعدة س ص وفي جهة واحدة منها

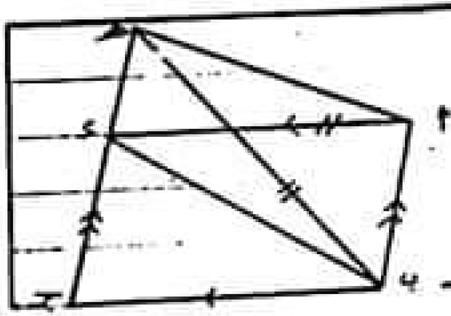
∴ الشكل ب جـ س ص رباعي دائري

وينتج أن ق(∠٣) = ق(∠٤) وهما مرسومتان على القاعدة ب ص

، ∵ ق(∠٥) = ق(∠٤)

∴ ق(∠٣) = ق(∠٥) وهما في وضع تبادل ∴ س ص // ب جـ

○ في الشكل المقابل:



أ ب جـ د متوازي أضلاع ، هـ ∈ جـ د

حيث ب هـ = أ د أثبت أن:

الشكل أ ب د هـ رباعي دائري.

البرهان

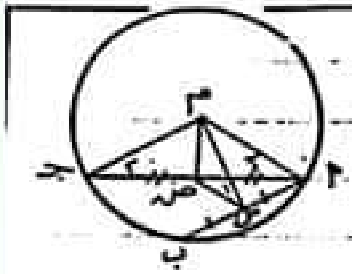
∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع ∴ ب جـ = أ د (خواص)

، ∵ ب هـ = أ د (معطى)

∴ ب جـ = ب هـ ∴ ق(∠١) = ق(∠هـ) } ∴ ق(∠١) = ق(∠٢)

∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع ∴ ق(∠٢) = ق(∠جـ) } وهما مرسومتان على القاعدة ب د وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل أ ب د هـ رباعي دائري.



٦ في الشكل المقابل :

دائرة مركزها م ، س ، ص منتصفا $\overline{اب}$ ، $\overline{اجـ}$ على الترتيب أثبت أن

أولاً : الشكل ا س ص م رباعي دائري .

ثانياً : ق(∠م س ص) = ق(∠م ا ص)

ثالثاً : $\overline{ام}$ قطر في الدائرة المارة بالنقط ا ، س ، ص ، م

البرهان ∵ ص منتصف $\overline{اجـ}$ ∴ $\overline{مص} \perp \overline{اجـ}$ ∴ ق(∠م ص ا) = ٩٠°

∵ س منتصف $\overline{اب}$ ∴ $\overline{مس} \perp \overline{اب}$ ∴ ق(∠م س ا) = ٩٠°

∴ ق(∠ا س م) = ق(∠ا ص م) = ٩٠° وهما مرسومتان على القاعدة $\overline{ام}$

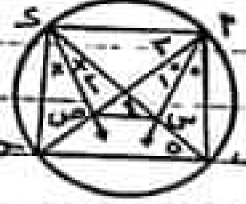
في جهة واحدة منها ∴ الشكل ا س ص م رباعي دائري .

في △ ا م جـ ∵ م ا = م جـ ∴ ق(∠٢) = ق(∠٣)

∵ ا س ص م رباعي دائري ∴ ق(∠١) = ق(∠٢)

∴ ق(∠١) = ق(∠٣) ← ثانياً .

∵ ق(∠ا س م) = ٩٠° ∴ $\overline{ام}$ قطر في الدائرة المارة بالنقط ا ، س ، ص ، م



٧ ا ب جـ د شكل رباعي مرسوم داخل الدائرة م ، $\overrightarrow{اس}$ ينصف ∠ب ا جـ ، $\overrightarrow{دص}$ ينصف ∠ب د جـ أثبت أن :

أولاً : الشكل ا س ص د رباعي دائري

ثانياً : $\overline{سص} // \overline{بجـ}$

البرهان ∵ ا ب جـ د شكل رباعي دائري

∴ ق(∠ب ا جـ) = ق(∠ب د جـ)

محيطيتان مشتركتان في $\overset{\frown}{بجـ}$

∵ $\overrightarrow{اس}$ ينصف ∠ب ا جـ ∴ ق(∠١) = ½ ق(∠ب ا جـ) ←(١)

∵ $\overrightarrow{دص}$ ينصف ∠ب د جـ ∴ ق(∠٢) = ½ ق(∠ب د جـ) ←(٢)

من (١) ، (٢) ∴ ق(∠١) = ق(∠٢) وهما مرسومتان

على القاعدة $\overline{سص}$ وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل ا س ص د رباعي دائري

∴ ا س ص د رباعي دائري

∴ ق(∠٣) = ق(∠٤) مرسومتان على القاعدة $\overline{دص}$ ← I

∴ ا ب جـ د رباعي دائري

∴ ق(∠٣) = ق(∠٥) مرسومتان على القاعدة $\overline{دجـ}$ ← II

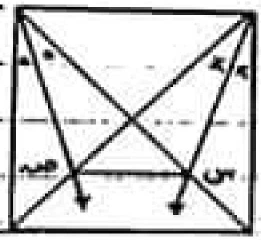
من I ، II ∴ ق(∠٤) = ق(∠٥) وهما في وضع تناظر

∴ $\overline{سص} // \overline{بجـ}$

مثال

أ ب جـ د مربع ، أس ينصف ∠ ب أ جـ ويقطع ب د في س
، د ص ينصف ∠ جـ د ب ويقطع أ جـ في ص . أثبت أن :
أولاً : الشكل أ س ص د رباعي دائري .
ثانياً : ق (∠ أ ص س) = ٤٥°

البرهان

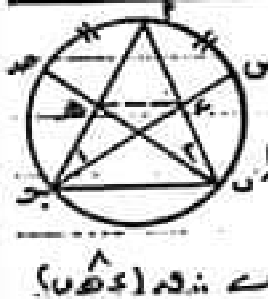


∵ أ ب جـ د مربع
∴ ق (∠ ب أ جـ) = ق (∠ ب د جـ) = ٤٥° ← (١)
∵ أس ينصف ∠ ب أ جـ
∴ ق (∠ س أ ص) = ½ ق (∠ ب أ جـ) ← (٢)
∵ د ص ينصف ∠ ب د جـ
∴ ق (∠ س د ص) = ½ ق (∠ ب د جـ) ← (٣)
من (١) ، (٢) ، (٣) ∴ ق (∠ س أ ص) = ق (∠ س د ص)
(وهما مرسومتان على القاعدة س ص وفي جهة واحدة منها) ∴ الشكل أ س ص د رباعي دائري
وينتج أن ق (∠ أ ص س) = ق (∠ أ د س) = ٤٥° (مرسومتان على القاعدة أ س)

مثال

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، س ∈ أ ب⌒ ، ص ∈ أ جـ⌒
حيث ق (أ س⌒) = ق (أ ص⌒) ، جـ س ∩ أ ب = {د}
، ب ص ∩ أ جـ = {هـ} أثبت أن
أولاً الشكل ب جـ هـ د رباعي دائري
ثانياً : ق (∠ د هـ ب) = ق (∠ س أ ب)

البرهان

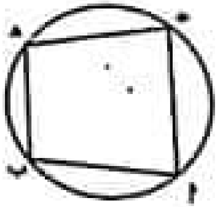


∵ ق (أ س⌒) = ق (أ ص⌒)
∴ ق (∠ ١) = ق (∠ ٢) وهما مرسومتان على القاعدة د هـ وفي جهة واحدة منها
∴ الشكل ب جـ هـ د رباعي دائري
وينتج أن ق (∠ س أ ب) = ق (∠ س جـ ب) محيطيتان مشتركتان في س ب ، ∴ ق (∠ د هـ ب)
، ق (∠ د هـ ب) = ق (∠ س جـ ب) مرسومتان على د ب
= ق (∠ س أ ب)

خواص الشكل الرباعي الدائري

نظرية (٢)

إذا كان الشكل الرباعي دائرياً فإن كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتين



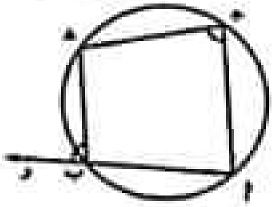
ق (∠ جـ) = ½ ق (أ ب هـ⌒)

ق (∠ ب) = ½ ق (أ جـ هـ⌒)

∴ ق (∠ جـ) + ق (∠ ب) = ½ قياس الدائرة = ½ × ٣٦٠ = ١٨٠

نتيجة

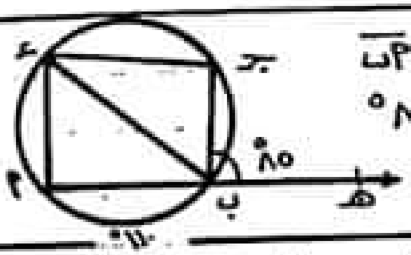
قياس الزاوية الخارجة عند أي رأس من رؤوس الشكل الرباعي الدائري يساوي قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها



ق (∠ جـ) = ق (∠ هـ ب و)

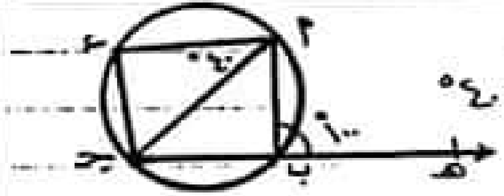
ملخص للحالات التي يكون فيها الشكل الرباعي دائرياً

١. إذا وجدت نقطة في المستوى بحيث تكون على أبعاد متساوية من رءوسه.
٢. إذا وجدت زاويتان متقابلتان فيه متكاملتان (مجموع قياسيهما ١٨٠°)
٣. إذا وجدت زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها ومتساويتان في القياس.
٤. إذا وجدت زاوية خارجة عند أي رأس من رءوسه قياسها يساوي قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها.



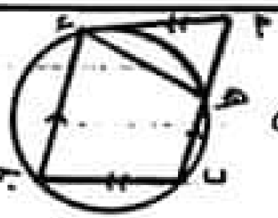
○ في الشكل المقابل: هـ ∈ أب ، هـ ∉ أب
، ق(⌒أب) = ١١٠° ، ق(∠جـ ب هـ) = ٨٥°
أوجد ق(∠ب ء جـ)

الحل: ∵ ق(⌒أب) = ١١٠° ، ∠أ ء ب محيطية قوسها أب
∴ ق(∠أ ء ب) = ½ ق(⌒أب) = ٥٥°
∵ ∠جـ ب هـ خارجة عن الشكل الرباعي الدائري أ ب جـ ء
∴ ق(∠جـ ب هـ) = ق(∠جـ ء أ) = ٨٥°
∴ ق(∠ب ء جـ) = ٨٥° − ٥٥° = ٣٠°



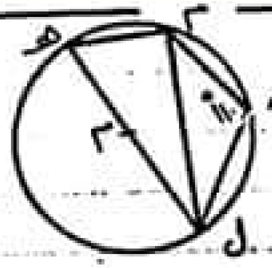
○ في الشكل المقابل:
ق(∠أ ب هـ) = ١٠٠° ، ق(∠جـ أ ء) = ٤٠°
اثبت أن: ق(⌒جـ ء) = ق(⌒أ ء)

الحل: ∵ ∠أ ب هـ خارجة عن الشكل الرباعي أ ب جـ ء
∴ ق(∠ء) = ق(∠أ ب هـ) = ١٠٠°
∵ مجموع قياسات زوايا △ = ١٨٠°
∴ ق(∠أ جـ ء) = ١٨٠° − (١٠٠° + ٤٠°) = ٤٠°
∴ ق(∠ء أ جـ) = ق(∠ء جـ أ) ∴ ق(⌒جـ ء) = ق(⌒أ ء)



○ في الشكل المقابل: أ ب جـ ء متوازي
أضلاع اثبت أن △ أ ء هـ متساوي الساقين

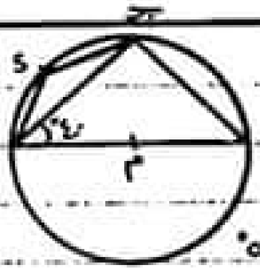
البرهان: ∵ أ ب جـ ء متوازي أضلاع ∴ ق(∠أ) = ق(∠جـ) خواص ⧠ ⟵ (١)
، ∵ ∠أ هـ ء خارجة عن الشكل الرباعي الدائري هـ ب جـ ء
∴ ق(∠أ هـ ء) = ق(∠جـ) ⟵ (٢) من (١) ، (٢) ∴ ق(∠أ) = ق(∠أ هـ ء)
∴ △ أ هـ ء متساوي الساقين .



○ في الشكل المقابل:
ل هـ قطر للدائرة م ، ق(∠م ن ل) = ١١٠°
أوجد ق(∠م ل هـ)

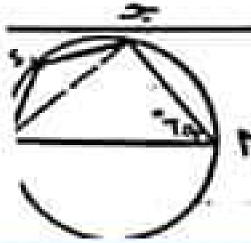
الحل: ∵ ل هـ قطر ∴ ق(∠ل م هـ) = ٩٠°
∵ الشكل ل ن م هـ رباعي دائري .
∴ ق(∠هـ) = ١٨٠° − ١١٠° = ٧٠°
في △ م ل هـ ∴ ق(∠م ل هـ) = ١٨٠° − [٩٠° + ٧٠°]
ق(∠م ل هـ) = ١٨٠° − ١٦٠° = ٢٠°

○ أب قطر في الدائرة م ، ق(∠أ ب جـ) = ٤٠° ، ء ∈ ⌒ب جـ
أوجد ق(∠جـ ء ب)

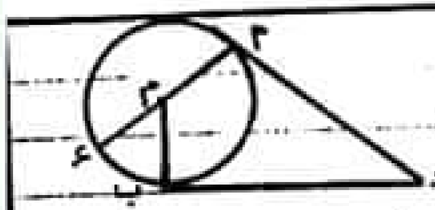


الحل: ∵ أب قطر في الدائرة م
∴ ق(∠أ جـ ب) = ٩٠°
∵ مجموع قياسات زوايا △ أ ب جـ = ١٨٠°
∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − [٩٠° + ٤٠°] = ١٨٠° − ١٣٠° = ٥٠°
∵ أ ب ء جـ رباعي دائري
∴ ق(∠جـ ء ب) = ١٨٠° − ٥٠° = ١٣٠°

○ أب قطر في الدائرة م ، ق(∠ب أ جـ) = ٦٥° ، ء ∈ ⌒ب جـ
أوجد ق(∠أ جـ ب) ، ق(∠جـ ء ب)



الحل: ∵ أب قطر ∴ ق(∠أ جـ ب) = ٩٠°
∵ أ ب ء جـ رباعي دائري
∴ ق(∠جـ ء ب) = ١٨٠° − ٦٥° = ١١٥°



○ أ ء قطر في دائرة مركزها م ، جـ أ ، جـ ب مماسان للدائرة عند النقطتين أ ، ب على الترتيب جـ

اثبت أن: ق(ء م̂ ب) = ق(أ جـ̂ ب)

الحل: ∵ جـ أ مماس للدائرة م ∴ م أ ⊥ أ جـ

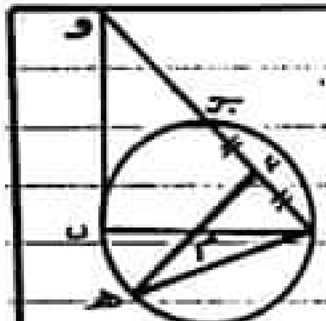
∴ ق(جـ أ̂ م) = ٩٠°

∵ جـ ب مماس ∴ م ب ⊥ جـ ب ∴ ق(م ب̂ جـ) = ٩٠°

∴ ق(أ̂) + ق(ب̂) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠° متقابلتان ومتكاملتان

∴ الشكل أ جـ ب م رباعي دائري.

∴ ق(ء م̂ ب) = ق(أ جـ̂ ب) (خارجة تساوي المقابلة للمجاورة لها)



○ في الشكل المقابل: أ ب قطر في الدائرة م ، ء منتصف أ جـ ، رسم ء م فقطع الدائرة في هـ ، رسم ب و مماس فقطع أ جـ في و

اثبت أن:

أولاً: الشكل م ب و ء رباعي دائري

ثانياً: ء هـ // ب جـ

الحل: ∵ ء منتصف أ جـ ∴ م ء ⊥ أ جـ ∴ ق(م ء̂ جـ) = ٩٠°

∵ ب و مماس ∴ م ب ⊥ ب و ∴ ق(م ب̂ و) = ٩٠°

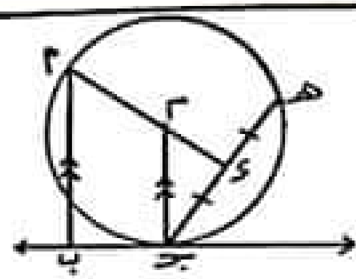
∴ ق(م ب̂ و) + ق(م ء̂ جـ) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠° (متقابلتان متكاملتان)

∴ الشكل ء م ب و رباعي دائري.

∵ أ ب قطر ∴ ق(أ جـ̂ ب) = ٩٠°

∴ ق(أ ء̂ م) = ق(أ جـ̂ ب) = ٩٠°

وهما في وضع تناظر ∴ ء هـ // ب جـ



○ في الشكل المقابل: ء منتصف هـ جـ ، م جـ // أ ب ، جـ ب مماس للدائرة م عند جـ

اثبت أن الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري

البرهان: ∵ ء منتصف هـ جـ ∴ م ء ⊥ هـ جـ

∴ ق(م ء̂ جـ) = ٩٠° ←(١)

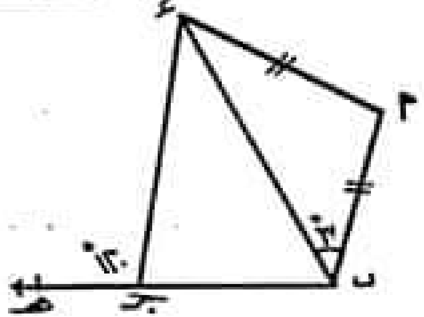
∵ جـ ب مماس ∴ م جـ ⊥ جـ ب ∴ ق(م جـ̂ ب) = ٩٠°

∵ أ ب // م جـ ∴ ق(أ ب̂ جـ) = ق(م جـ̂ ب) = ٩٠° ←(٢)

(داخلتان وفي جهة واحدة من القاطع متكاملتان)

من (١)، (٢) ∴ ق(م ء̂ جـ) + ق(أ ب̂ جـ) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°

وهما متقابلتان ومتكاملتان ∴ الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري



○ في الشكل المقابل: اثبت أن الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري

البرهان: ∵ △ أ ب ء فيه أ ب = أ ء

∴ ق(أ̂) = ١٨٠ − ٢ × ٣٠ = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

∵ ق(ب جـ̂ هـ) = ١٨٠°

∴ ق(ء جـ̂ ب) = ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠°

∴ ق(أ̂) + ق(ء جـ̂ ب) = ١٢٠° + ٦٠° = ١٨٠° وهما متقابلتان

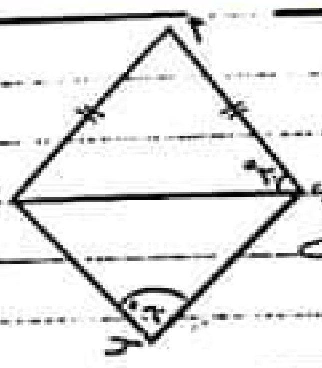
∴ الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري

حل آخر: ∵ △ أ ب ء فيه أ ب = أ ء ∴ ق(أ̂) = ١٨٠ − ٦٠ = ١٢٠°

∴ ق(ء جـ̂ هـ) = ق(أ̂) = ١٢٠° وهي خارجة عن الشكل الرباعي = المقابلة للمجاورة لها

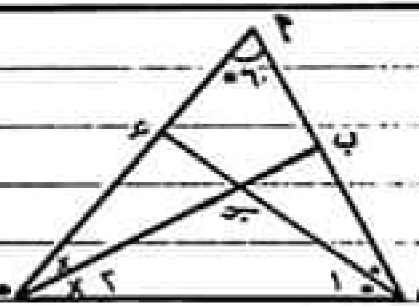
∴ الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري.

○ في الشكل المقابل: أ ب جـ ء شكل رباعي
فيه: أ ب = أ ء
ق(∠أ ب ء) = ٣٠° ، ق(∠جـ) = ٦٠°
اثبت أن: الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري



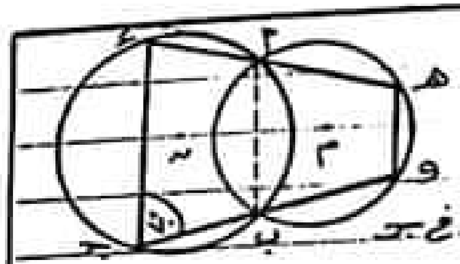
البرهان
∵ أ ب = أ ء ∴ ق(∠أ) = ١٨٠ − [٢ × ٣٠°] = ١٢٠°
∴ ق(∠أ) + ق(∠جـ) = ١٢٠° + ٦٠° = ١٨٠°
وهما متقابلتان متكاملتان
∴ الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري

○ في الشكل المقابل:
اثبت أن الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري



البرهان
في △ أ س ص ∴ ق(∠أ) = ٦٠°
∴ ق(∠س) + ق(∠ص) = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠° ← (١)
∵ س ء ينصف ∠س ∴ ق(∠١) = ½ ق(∠س) ← (٢)
∵ ص ب ينصف ∠ص ∴ ق(∠٢) = ½ ق(∠ص) ← (٣)
من (١) ∴ ق(∠س) + ق(∠ص) = ١٢٠°
∴ ½ ق(∠س) + ½ ق(∠ص) = ٦٠°
∴ ق(∠١) + ق(∠٢) = ٦٠°
في △ جـ س ص: ∴ ق(∠س جـ ص) = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°
∴ ق(∠ب جـ ء) = ق(∠س جـ ص) = ١٢٠° بالتقابل بالرأس
∴ ق(∠أ) + ق(∠ب جـ ء) = ٦٠° + ١٢٠° = ١٨٠° ∴ الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري

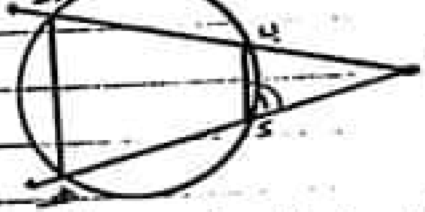
○ م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب
رسم أ ء يقطع الدائرة م في هـ
والدائرة ن في ء ، رسم ب جـ
يقطع الدائرة م في و والدائرة ن في جـ
، ق(∠جـ) = ٧٠°
(أ) اوجد ق(∠و)
(ب) أثبت أن جـ ء // هـ و



البرهان العمل: نرسم أ ب
∵ الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري
∴ ق(∠ء أ ب) = ١٨٠° − ٧٠° = ١١٠°
∵ الشكل أ ب و هـ رباعي دائري ، (∠ء أ ب) خارجة عنه
∴ ق(∠و) = ق(∠ء أ ب) = ١١٠°
∴ ق(∠و) + ق(∠هـ) = ١١٠° + ٧٠° = ١٨٠°
وهما داخلتان في جهة واحدة من القاطع متكاملتان
∴ جـ ء // هـ و

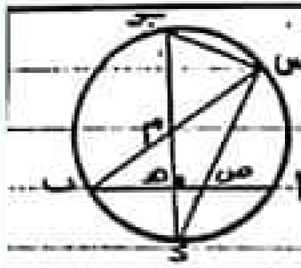
○ أ نقطة خارج دائرة رسم أ ب يقطع الدائرة في ب ، جـ على الترتيب. رسم أ ء يقطع الدائرة في ء ، هـ على الترتيب
فإذا كان: أ جـ = أ هـ اثبت أن
أولاً: ب ء // جـ هـ
ثانياً: ق(ب جـ) = ق(هـ ء)

البرهان



∵ أ جـ = أ هـ
∴ ق(∠جـ) = ق(∠هـ) ← (١)
∵ ب ء هـ جـ رباعي دائري
∴ ق(∠١) = ق(∠جـ) ← (٢)
من (١) ، (٢) ∴ ق(∠١) = ق(∠هـ) وهما في وضع تناظر
∴ ب ء // جـ هـ
∵ ب ء // جـ هـ ∴ ق(ب جـ) = ق(ء هـ)

مثال

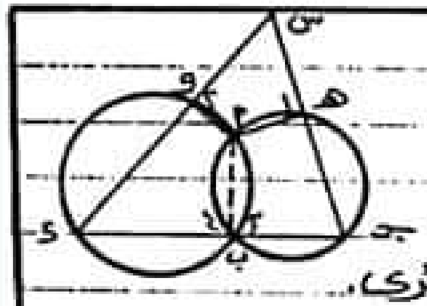


في الشكل المقابل :-
أب وتر في الدائرة م ، جـ د قطر عمودي على أب ويقطعه في هـ ، س م يقطع الدائرة في س ، ب ، س د ∩ أب = {ص}
أثبت أن :- أولاً :- الشكل س ص هـ جـ رباعي دائري
ثانياً :- ق(∠د ص ب) = ق(∠د س ب)

البرهان

∵ جـ د قطر ∴ ق(∠د س جـ) = ٩٠°
∵ جـ د ⊥ أب ∴ ق(∠أ هـ جـ) = ٩٠°
∴ ق(∠د س جـ) + ق(∠أ هـ جـ) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°
(زاويتان متقابلتان متكاملتان)
∴ الشكل س ص هـ جـ رباعي دائري وأولاً
∴ ق(∠د ص ب) = ق(∠جـ) (خارجة عن الشكل الرباعي تساوي المقابلة للمجاورة لها) ـــ (١)
، ق(∠د س ب) = ق(∠جـ) (محيطيتان مشتركتان في د ب) ـــ (٢)
من (١) ، (٢) ∴ ق(∠د ص ب) = ق(∠د س ب) وهو المطلوب ⁂

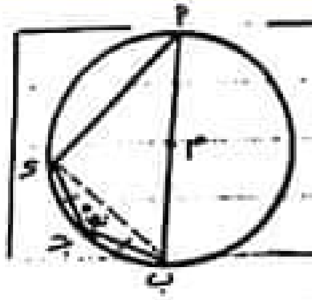
مثال



في الشكل المقابل :-
دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ، جـ د يمر بالنقطة ب ويقطع الدائرتين في جـ ، د ، جـ هـ ∩ د و = {س}
أثبت أن الشكل أ و س هـ رباعي دائري.

البرهان

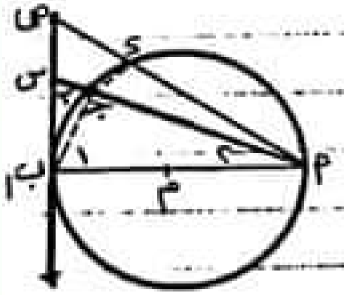
العمل :- نرسم أب
∵ الشكل أ ب جـ هـ رباعي دائري ∴ ق(∠١) = ق(∠٣) ـــ *
∵ الشكل أ ب د و رباعي دائري ∴ ق(∠٢) = ق(∠٤) ـــ **
بجمع (*) ، (**) ∴ ق(∠١) + ق(∠٢) = ق(∠٣) + ق(∠٤) = ١٨٠°
∴ ∠١ ، ∠٢ متقابلتان متكاملتان ∴ الشكل أ و س هـ رباعي دائري



○ أ ب جـ د شكل رباعي مرسوم داخل الدائرة م ، م ∈ أب ، جـ ب = جـ د ، ق(∠ب جـ د) = ١٤٠°
أوجد : أولاً : ق(∠أ) ثانياً : ق(∠أ د جـ)

البرهان

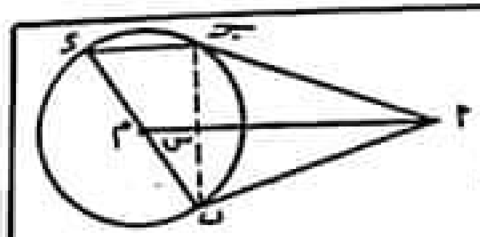
∵ أ ب جـ د شكل رباعي دائري
∴ ق(∠أ) + ق(∠جـ) = ١٨٠°
∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − ١٤٠° = ٤٠°
نرسم ب د في △ ب جـ د ∵ جـ ب = جـ د
∴ ق(∠جـ ب د) = ق(∠جـ د ب) = $\frac{١٨٠° - ١٤٠°}{٢}$ = ٢٠°
∵ أب قطر في الدائرة م ∴ ق(∠أ د ب) = ٩٠°
∴ ق(∠أ د جـ) = ٩٠° + ٢٠° = ١١٠° ⇐ ⁂



○ في الشكل المقابل :-
أب قطر في الدائرة م ، أ جـ ، أ د وتران فيها ومن جهة واحدة من أب رسم من ب مماس للدائرة قطع أ جـ في س ، أ د في ص
أثبت أن :- الشكل س ص د جـ رباعي دائري

الحل :

∵ أب قطر ∴ ق(∠أ جـ ب) = ٩٠° ∴ (∠١) تتمم (∠٣)
∵ ب ص مماس ∴ أب ⊥ ب ص ∴ (∠٢) تتمم (∠٣)
∴ ق(∠١) = ق(∠٢) ـــ *
∵ ∠ص د جـ خارجة عن الشكل أ ب جـ د الرباعي الدائري
∴ ق(∠١) = ق(∠٤) ـــ **
من (١) ، (٢) ∴ ق(∠٢) = ق(∠٤) وهي خارجة عن الشكل الرباعي د جـ س ص
∴ الشكل د جـ س ص رباعي دائري



في الشكل المقابل:
أب ، أجـ قطعتان مماستان للدائرة م ، ب د قطر في الدائرة
أثبت أن: أم // جـ د

البرهان: العمل: نرسم ب جـ يقطع أم في س

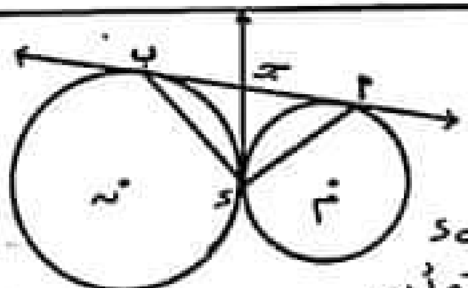
∵ ب د قطر ∴ ق(د جـ^ ب) = ٩٠°

∵ أم ∩ ب جـ = {س}

∴ ق(م س^ جـ) = ٩٠°

، المستقيم المار بمركز الدائرة ، ونقطة تقاطع مماسين لها يكون عمودياً على وتر التماس لهذين المماسين

∴ ق(د جـ^ ب) + ق(م س^ جـ) = ٩٠° وهما داخلتان في جهة واحدة من القاطع ∴ أم // جـ د



م ، ن دائرتان متماستان من الخارج في د ، أب مماس مشترك لهما عند أ ، ب ، د جـ مماس مشترك للدائرتين في د حيث د جـ ∩ أب = {جـ} أثبت أن:

أولاً جـ منتصف أب ثانياً أد ⊥ ب د

البرهان ∵ جـ أ ، جـ د قطعتان مماستان للدائرة م

∴ جـ أ = جـ د ←(١)

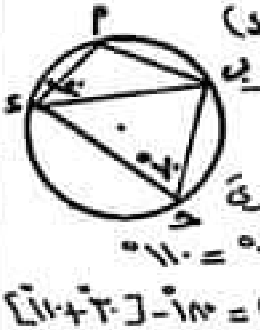
∵ جـ ب ، جـ د قطعتان مماستان للدائرة ن ∴ جـ ب = جـ د ←(٢)

من (١) ، (٢) ∴ جـ أ = جـ ب ∴ جـ منتصف أب ، أولاً

في △ أ د ب ∵ د جـ متوسط ، د جـ = $\frac{1}{2}$ أب

∴ ق(^د) = ٩٠° ∴ أد ⊥ ب د ، ثانياً

① أوجد ق(أ ب^ د)



الحل

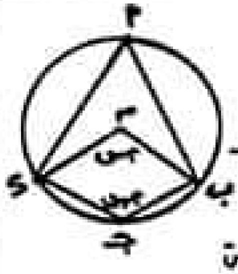
∵ أ ب جـ د رباعي دائري

∴ ق(^أ) = ١٨٠° - ٧٠° = ١١٠°

في △ أ ب د: ق(أ ب^ د) = ١٨٠° - [٣٠° + ١١٠°]

= ٤٠°

② أوجد قيمة ق(^أ)



∵ ^أ المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق(^م) المركزية

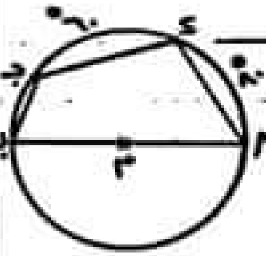
∴ ق(^أ) = $\frac{1}{2}$ × ٢س = س

∵ أ ب جـ د رباعي دائري

∴ س + ٢س = ١٨٠° ٣س = ١٨٠°

س = $\frac{١٨٠}{٣}$ = ٦٠°

③ أوجد قياسات زوايا الشكل أ ب جـ د



الحل ∵ أب قطر

ق(ب جـ⌒) = ١٨٠° - [٨٠° + ٦٠°] = ٤٠°

∴ ق(^أ) = $\frac{1}{2}$ ق(د جـ ب⌒) = $\frac{1}{2}$ [٦٠° + ٤٠°]

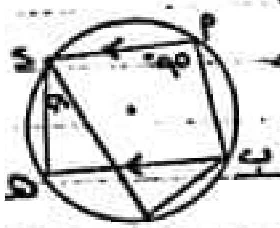
= ٥٠°

ق(^جـ) = ١٨٠° - ٥٠° = ١٣٠°

ق(^ب) = $\frac{1}{2}$ [٨٠° + ٦٠°] = ٧٠°

ق(^د) = ١٨٠° - ٧٠° = ١١٠°

④ أوجد قياسات زوايا الشكل الرباعي أ ب جـ د



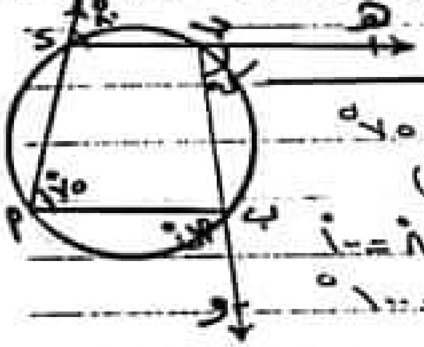
الحل ∵ أ ب جـ د رباعي دائري ∴ ق(^ه) = ١٨٠° - ٩٥°
= ٨٥°

∵ أد // ب ه ∴ ق(أ ب^ ه) = ١٨٠° - ٩٠°
= ٨٥°

، ق(^جـ) = ١٨٠° - ٩٥° = ٨٥°

ق(ه ب^ جـ) = ق(ه د^ جـ) = ٢٨°

ق(^ب) = ٢٨ + ٨٥° = ١١٣ ∴ ق(أ د^ جـ) = ٦٧°



⑤ س = ٧٠°

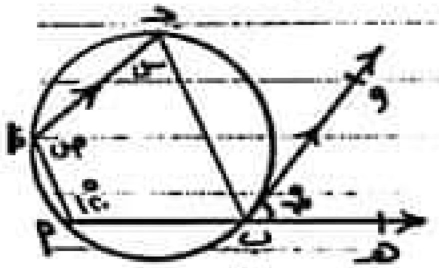
ق(ه د^ أ)

= ١٨٠° - ٨٠° = ١٠٠°

∴ ص = ١٠٠°

⑥ أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس.

الحل:

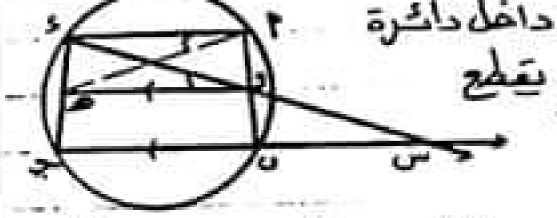


∵ أ ب جـ د رباعي دائري

∴ س = ١٨٠° - ١٢٠° = ٦٠°

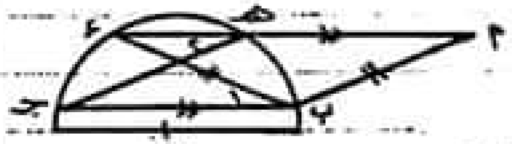
∵ ب و // أ جـ ∴ ق(ه ب^ و) = ٦٠°
بالتبادل

∴ ق(^ق) = ص = ق(ه ب^ و)
= ٦٥° + ٦٠° = ١١٥°



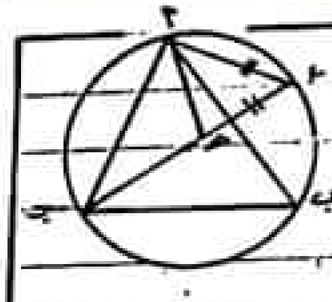
○ أ ب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة ، و ∈ أب ، رسم و هـ // ب جـ يقطع جـ ء في هـ ، ء و ∩ جـ ب = {س}
أثبت أن:
أولاً: الشكل أ و هـ ء رباعي دائري ثانياً: ق(∠ب س و) = ق(∠هـ أ ء)

البرهان ∵ أ ب جـ ء رباعي دائري
∴ ق(∠أ ب جـ) + ق(∠أ ء جـ) = ١٨٠° (متكاملتان) ←(١)
∵ و هـ // ب جـ
∴ ق(∠أ و هـ) = ق(∠أ ب جـ) ←(٢)
من (١) ، (٢) ∴ ق(∠أ و هـ) + ق(∠أ ء جـ) = ١٨٠°
وهما متقابلتان ومتكاملتان في الشكل أ و هـ ء
∴ الشكل أ و هـ ء رباعي دائري (أولاً)
∵ و هـ // جـ س ∴ ق(∠١) = ق(∠ب س و) بالتناظر ←(٣)
∵ ق(∠١) = ق(∠٢) محيطيتان مشتركتان في القاعدة ء هـ ←(٤) من ٣ ، ٤
∴ ق(∠٢) = ق(∠ب س و) هـ.ط.ث



○ ث) الشكل المقابل:
نصف دائرة مركزها م ،
أ ء // ب جـ ، أ ب = ب ء
أثبت أن: الشكل أ ب جـ ء متوازي أضلاع.

البرهان ∵ أ ب = ب ء ∴ ق(∠أ) = ق(∠ء) ←(١)
∴ ق(∠ء) = ق(∠١) بالتبادل
∴ ق(∠٢) = ق(∠١) محيطيتان مشتركتان في ء جـ
∴ ق(∠أ) = ق(∠ء) ←(٢) من (١) ، (٢) ∴ ق(∠٢) = ق(∠أ)
∴ أ ب // هـ جـ ، أ هـ // ب جـ ∴ الشكل أ ب جـ هـ متوازي أضلاع وهما في وضع تناظر

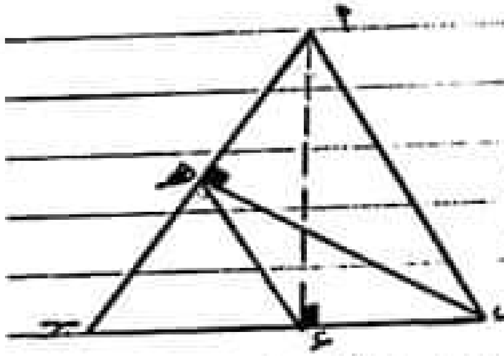


○ أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع مرسوم داخل دائرة ، ء ∈ أب⌢ ، هـ ∈ ء جـ بحيث أ ء = ء هـ. أثبت أن: المثلث أ ء هـ متساوي الأضلاع

البرهان ∵ △ أ ب جـ متساوي الأضلاع
∴ ق(∠ب) = ١٨٠/٣ = ٦٠°
∴ ق(∠ء) = ق(∠ب) = ٦٠°
(محيطيتان مرسومتان على أ جـ)
∵ ء هـ = ء أ ∴ ق(∠ء أ هـ) = ق(∠ء هـ أ) = (١٨٠° − ٦٠°)/٢ = ٦٠°
∴ △ أ هـ ء متساوي الأضلاع.

○ أ ب جـ مثلث متساوي الساقين فيه أ ب = أ جـ ، ء منتصف ب جـ ، رسم ب هـ ⊥ أ جـ حيث ب هـ ∩ أ جـ = {هـ}
أثبت أن: النقط أ ، ب ، ء ، هـ يمر بها دائرة واحدة

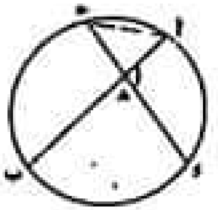
البرهان العمل: نرسم أ ء



∵ △ أ ب جـ فيه أ ب = أ جـ
، ء منتصف ب جـ
∴ أ ء ⊥ ب جـ ∴ ق(∠أ ء ب) = ٩٠°
∵ ب هـ ⊥ أ جـ ∴ ق(∠أ هـ ب) = ٩٠°
∴ ق(∠أ ء ب) = ق(∠أ هـ ب) = ٩٠°
مرسومتان على القاعدة أ ب وفي جهة واحدة
∴ الشكل أ ب ء هـ
∴ النقط أ ، ب ، ء ، هـ يمر بها دائرة واحدة

تمرين مشهور (١)

إذا تقاطع مستقيمان فى نقطة داخل دائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف مجموع قياسى القوسين المقابلين له



ق (∠ أهـء) = $\frac{1}{2}$ [ق (أء⌒) + ق (بج⌒)]

ق (∠ أهـج) = $\frac{1}{2}$ [ق (أج⌒) + ق (بج⌒)]

المعطيات أب ∩ جء = {هـ}

المطلوب : ق(أهـج) = $\frac{1}{2}$ [ق(أج⌒) + ق(بء⌒)]

العمل نرسم أء **البرهان**

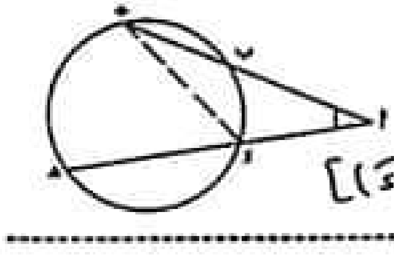
∵ أهـج خارجة عن △ أهـء

∴ ق (أهـج) = ق (ء) + ق (أ) = $\frac{1}{2}$ ق (أج⌒) + $\frac{1}{2}$ ق (بء⌒)

= $\frac{1}{2}$ [ق (أج⌒) + ق (بء⌒)] ⇐ ※

تمرين مشهور (٢)

إذا تقاطع شعاعان حاملان لوترين فى دائرة خارجها فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف قياس القوس الأكبر مطروحاً منه نصف قياس القوس الأصغر اللذين يحصرهم ضلعا هذه الزاوية.



ق (∠ أ) = $\frac{1}{2}$ [ق (جهـ⌒) − ق (بء⌒)]

المعطيات هـء ∩ جب = {أ}

المطلوب ق(أ) = $\frac{1}{2}$ [ق(جهـ⌒) − ق(بء⌒)]

العمل : نرسم بء

البرهان

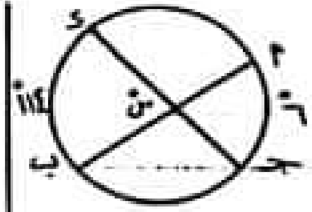
∵ أبج خارجة عن △ بهـج

∴ ق(أبج) = ق(هـ) + ق (بجء)

∴ ق (هـ) = ق (أبج) − ق(بجء)

∴ ق (هـ) = $\frac{1}{2}$ ق (أج⌒) − $\frac{1}{2}$ ق(بء⌒) = $\frac{1}{2}$ [ق (أج⌒) − ق (بء⌒)] ⇐ ※

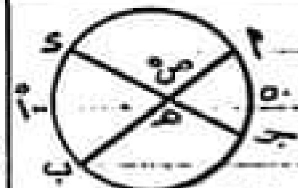
(أ) أوجد قيمة س ؟



الحل

س = $\frac{114 + 60°}{2}$ = ٨٧°

(ب) أوجد قيمة ص ؟



الحل:

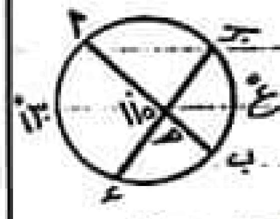
ق (ءهـد) = $\frac{50 + 100}{2}$ = ٧٥

∴ ق (أهـد) = ص = ١٨٠° − ٧٥° = ١٠٥°

(ج) إذا كان ق(أ ج⌒) = ١٠٠° ، ق (ب ء⌒) = ٦٠° ، ق (أهـج) = ؟

الحل: ق(أهـج) = $\frac{100 + 60}{2}$ = ٨٠°

(ء) أوجد قيمة ع ؟



الحل

∵ ق(أهـ ء) = $\frac{ق(جء⌒) + ق(أب⌒)}{2}$

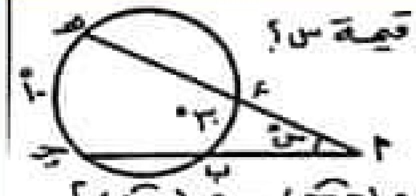
١١٥ = $\frac{ع + 130°}{2}$

ع° + ١٣٠° = ٢ × ١١٥°

ع + ١٣٠° = ٢٣٠°

ع = ٢٣٠° − ١٣٠° = ١٠٠°

(هـ) أوجد قيمة س ؟



الحل

ق (أ) = $\frac{1}{2}$ [ق(هـج⌒) − ق(بء⌒)]

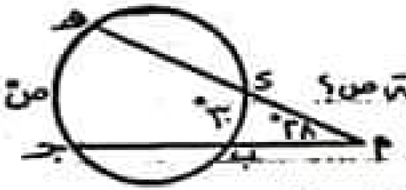
ق (أ) = $\frac{100 - 30°}{2}$ = ٣٥°

(و) ق(س ع⌒) = ٧٠° ، ق(ص ل⌒) = ٣٠° أوجد ق(هـ) ؟

الحل

ق(هـ) = $\frac{70° - 30°}{2}$ = ٢٠°

(ح) أوجد قيمة ص ؟



الحل

ق (أ) = $\frac{ص - 30}{2}$

٢٨° = $\frac{ص - 30°}{2}$

ص − ٣٠ = ٢ × ٢٨ ∴ ص = ٢٨ × ٢ + ٣٠ = ٥٨°

(ز) أوجد قيمة ع ؟

الحل

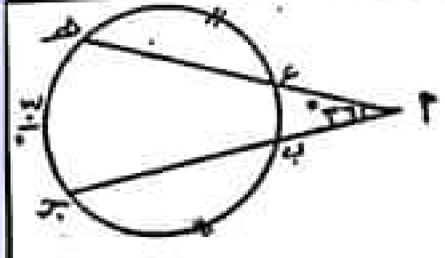
ق (أ) = $\frac{ق(هـج⌒) - ق(ءب⌒)}{2}$

٥٠° = $\frac{140° - ع}{2}$

١٤٠° − ع = ١٠٠°

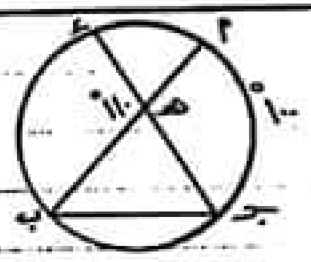
١٤٠° − ١٠٠° = ع

ع = ٤٠°



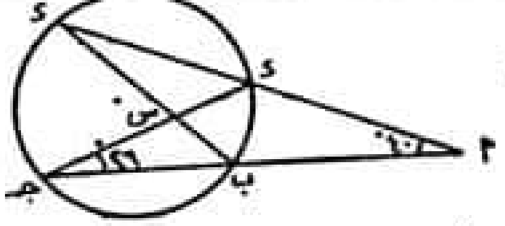
○ في الشكل المقابل :.
ق(^أ) = ٣٦° ، ق(⌒هـ جـ) = ١٠٤°
، ق(⌒ب جـ) = ق(⌒ء هـ) أوجد
(أ) ق(⌒ب ء)   (ب) ق(⌒ء هـ)

البرهان
∵ جـ ب ∩ هـ ء = {أ}
∴ ق(أ) = ½ [ق(⌒جـ هـ) − ق(⌒ب ء)]
∴ ½ [١٠٤ − ق(⌒ب ء)] = ٣٦   (×٢)
١٠٤ − ق(⌒ب ء) = ٧٢°   ∴ ق(⌒ب ء) = ١٠٤° − ٧٢ = ٣٢°
∵ ق(⌒ء هـ) + ق(⌒ب جـ) = ٣٦٠° − (١٠٤° + ٣٢°) = ٢٢٤°
∵ ق(⌒ء هـ) = ق(⌒ب جـ)   ∴ ق(⌒ء هـ) = ٢٢٤/٢ = ١١٢°



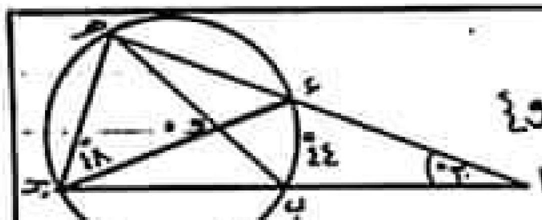
○ في الشكل المقابل :.
أب ، جـ ء وتران في الدائرة ،
أب ∩ جـ ء = {هـ} ، ق(^ء هـ ب) = ١١٠°
ق(⌒أ جـ) = ١٠٠° أوجد: ق(^ء جـ ب)

البرهان
∵ أب ∩ جـ ء = {هـ}
∴ ق(^ء هـ ب) = ½ [ق(⌒أ جـ) + ق(⌒ء ب)]
∴ ١١٠ = ½ [١٠٠ + ق(⌒ء ب)]
∴ ١٠٠ + ق(⌒ء ب) = ٢٢٠°
∴ ق(⌒ء ب) = ٢٢٠° − ١٠٠° = ١٢٠°
∴ ق(^ء جـ ب) = ½ ق(⌒ء ب) = ½ × ١٢٠° = ٦٠°
(المحيطية = ½ قياس القوس المقابل لها)



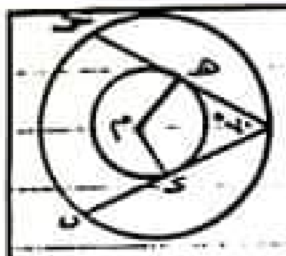
○ في الشكل المقابل :.
جـ ب ∩ هـ ء = {أ} ، ق(^أ) = ٤٠°
، ء جـ ∩ ب هـ = {س}
، ق(^ب جـ ء) = ٢٦° أوجد:
(أ) ق(⌒جـ هـ)   (ب) ق(^هـ س جـ)

البرهان
∵ ق(^جـ) = ٢٦°
∴ ق(⌒ب ء) = ٢ ق(^جـ) = ٢×٢٦° = ٥٢°
∵ جـ ب ∩ هـ ء = {أ}
∴ ق(أ) = ½ [ق(⌒جـ هـ) − ق(⌒ب ء)]
٤٠ = ½ [ق(⌒جـ هـ) − ٥٢°]
٨٠° = ق(⌒جـ هـ) − ٥٢°
∴ ق(⌒جـ هـ) = ٨٠° + ٥٢° = ١٣٢°
، ق(^هـ س جـ) = ½ [ق(⌒جـ هـ) + ق(⌒ب ء)] = ½[١٣٢° + ٥٢°] = ٩٢°



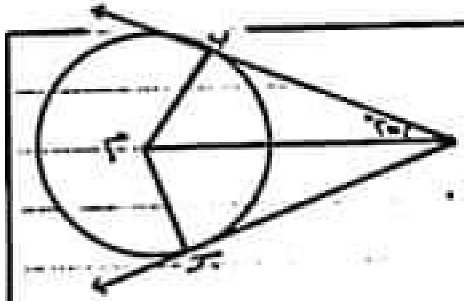
○ في الشكل المقابل :.
جـ ب ∩ هـ ء = {أ} ، ب هـ ∩ جـ ء = {و}
فإذا كان: ق(^أ) = ٣٠° ، ق(⌒ب ء) = ٤٤°
، ق(^ء جـ هـ) = ٤٨° أوجد
(أ) ق(⌒جـ هـ)   (ب) ق(⌒ب جـ)

البرهان
∵ ق(أ) = ½[ق(⌒جـ هـ) − ق(⌒ء ب)]
∴ ½ [ق(⌒جـ هـ) − ٤٤] = ٣٠   (×٢)
ق(⌒جـ هـ) − ٤٤ = ٦٠°   ∴ ق(⌒جـ هـ) = ٦٠° + ٤٤° = ١٠٤°
∵ ق(^ء جـ هـ) = ٤٨°   ∴ ق(⌒ء هـ) = ٢ ق(^ء جـ هـ) = ٢×٤٨° = ٩٦°
∵ قياس الدائرة = ٣٦٠°
∴ ق(⌒ب جـ) = ٣٦٠° − [١٠٤° + ٤٤° + ٩٦°] = ٣٦٠° − ٢٤٤° = ١١٦°



○ في الشكل المقابل:
دائرتان متحدتا المركز في م ، أب ، أجـ
قطعتان مماستان للدائرة الصغرى ،
ق(∠أ) = ٧٠°
أولاً: أوجد ق(∠د م هـ)   ثانياً: اثبت أن أب = أجـ

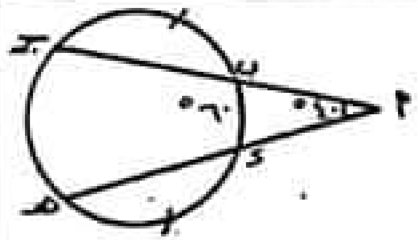
البرهان ∵ أب ، أهـ قطعتان مماستان للدائرة الصغرى
∴ م هـ ⊥ أهـ ∴ ق(∠أ هـ م) = ٩٠°
، م د ⊥ أب ∴ ق(∠أ د م) = ٩٠°
∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعي = ٣٦٠°
∴ ق(∠د م هـ) = ٣٦٠° − [٩٠° + ٩٠° + ٧٠°] = ٣٦٠° − ٢٥٠° = ١١٠°
، ∵ م د = م هـ (انصاف اقطار) ∴ أب = أجـ



○ في الشكل المقابل:
أب ، أجـ مماسان للدائرة م
يمسانها عند ب ، جـ على الترتيب .
ق(∠ب أ م) = ٢٥°
أولاً: أثبت أن أم ينصف ∠ب م جـ
ثانياً: أوجد ق(∠ب م جـ)

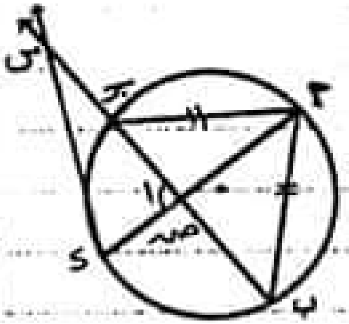
البرهان ∵ أب ، أجـ مماسان للدائرة م
∴ م ب ⊥ أب ∴ ق(∠أ ب م) = ٩٠°
، م جـ ⊥ أجـ ∴ ق(∠أ جـ م) = ٩٠°
∵ △△ أ م جـ ، أ م ب
فيهما:
① أم وتر مشترك
② م ب = م جـ = نق
③ ق(∠ب) = ق(∠جـ) = ٩٠°
∴ △ أ م جـ ≡ △ أ م ب
وينتج أن ق(∠أ م ب) = ق(∠أ م جـ)
∴ أم ينصف ∠ب م جـ .
، ق(∠أ) = ٢ × ٢٥ = ٥٠°
ق(∠ب م جـ) = ٣٦٠° − [٩٠° + ٩٠° + ٥٠°] = ١٣٠°

○ في الشكل المقابل:
ق(∠أ) = ٤٠° ، ق(ب د) = ٦٠°
ق(ب جـ) = ق(د هـ) أوجد بالبرهان
ق(هـ جـ) ، ق(ب جـ)



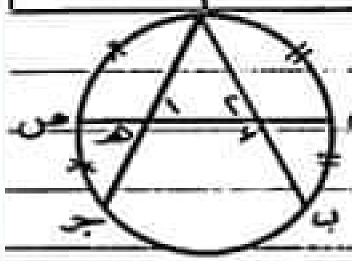
البرهان ∵ ق(∠أ) = ½ [ق(هـ جـ) − ق(ب د)]
∴ ٤٠° = ½ [ق(هـ جـ) − ٦٠] ×٢
٨٠ = ق(هـ جـ) − ٦٠°
∴ ق(هـ جـ) = ٨٠° + ٦٠° = ١٤٠°
∵ قياس الدائرة = ٣٦٠° ∴ ق(د هـ) = ق(ب جـ) = (٣٦٠ − ٢٠٠)/٢ = ٥٠°

④ أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة فيه
أ ب = أ جـ ، د ∈ ب جـ ، رسم د س
مماس للدائرة عند د حيث
د س ∩ ب جـ = {س} ، أ د ∩ ب جـ = {ص}
أثبت أن: س ص = س د .



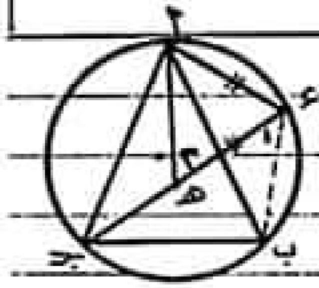
البرهان ∵ أ د وتر ، د س مماس
∴ ق(∠د) = ½ [ق(أ د)] = ½ [ق(أ جـ) + ق(جـ د)] ← ①
∵ أ د ∩ جـ ب = {ص}
∴ ق(∠١) = ½ [ق(أ ب) + ق(جـ د)] ← (٢)
∵ أ ب = أ جـ ∴ ق(أ ب) = ق(أ جـ) ← (٣)
من (١) ، (٢) ، (٣)
∴ ق(∠١) = ق(∠د) ∴ س ص = س د

○ أ ب ، أ جـ وتران في دائرة س ، ص منتصفا أ ب
، أ جـ على الترتيب ، رسمت س ص فقطعت
أ ب في د ، أ جـ في هـ اثبت أن: أ د = أ هـ



البرهان ∵ س منتصف أ ب
∴ ق(أ س) = ق(ب س) ← (١)
∵ ص منتصف أ جـ
∴ ق(جـ ص) = ق(أ ص) ← (٢)
∵ ق(∠١) = ½ [ق(أ س) + ق(جـ ص)] ← ③
∵ ق(∠٢) = ½ [ق(ب س) + ق(أ ص)] ← ④
من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) ∴ ق(∠١) = ق(∠٢)
∴ أ د = أ هـ ✻

○ أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع مرسوم داخل دائرة
، د نقطة على أ ب . أخذت نقطة هـ على د جـ بحيث
أ د = د هـ . أثبت أن:
أولاً: △ أ د هـ متساوي الأضلاع ثانياً: د ب // أ هـ
ثالثاً: ق(∠د جـ ب) = ق(∠هـ أ جـ)



البرهان ∵ △ أ ب جـ متساوي الأضلاع
∴ ق(∠ب) = ١٨٠°/٣ = ٦٠°
∵ ق(∠د) = ق(∠ب) = ٦٠° محيطيتان مشتركتان
في أ جـ
، د هـ = أ د
∴ △ أ د هـ متساوي الأضلاع .
∵ ق(∠١) = ق(∠ب أ جـ) = ٦٠° محيطيتان مشتركتان في ب جـ
∴ ق(∠١) = ق(∠٢) = ٦٠° وهما في وضع تبادل
∴ د ب // أ هـ ثانياً ثالثاً: حاول بنفسك ✻

أ/ أكرم يونس
٠١٠١٨٦٧٦٢٨

الزاوية المركزية وقياس الأقواس

الزاوية المركزية

هى الزاوية التى رأسها مركز الدائرة ويحمل كل ضلع من ضلعيها نصف قطر فى الدائرة.

($\angle$ أ م ب) هى زاوية مركزية

** **قياس القوس:**

هو قياس الزاوية المركزية المقابلة له .

ق ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ق ($\angle$ أ م ب)

لاحظ: قياس الدائرة = ٣٦٠ بينما قياس نصف الدائرة = ١٨٠

** **طـول القوس:** هو جزء من محيط الدائرة

$$\text{طول القوس} = \frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}} \times \text{محيط الدائرة} = \frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠} \times ٢ \,\pi\, \text{نق}$$

نتـائج هـامـة

نتيجة (١)

فى الدائرة الواحدة (أو فى الدوائر المتطابقة) الأقواس المتساوية فى القياس متساوية فى الطول أيضاً.

نتيجة (٢)

فى الدائرة الواحدة (أو فى الدوائر المتطابقة) الأقواس المتساوية فى القياس أوتارها متساوية فى الطول أيضاً.

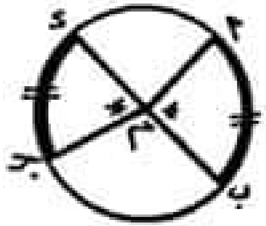
نتيجة (٣)

الوتران المتوازيان فى الدائرة يحصران بينهما قوسين متساويين فى القياس.

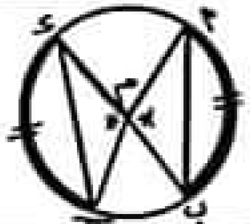
نتيجة (٤)

القوسان المحصوران بين وتر ومماس يوازيه فى الدائرة متساويان فى القياس.

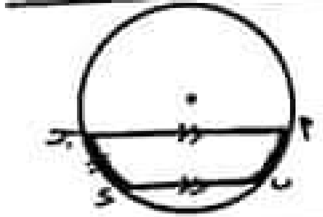
توضيح النتائج السابقة



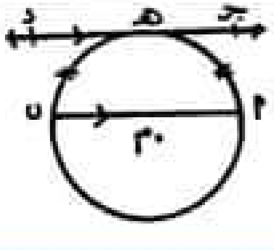
نتيجة ① فى الشكل المقابل: إذا كانت م دائرة فيها :.
ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{جـ ء}}$) فإن: طول $\overline{\text{أ ب}}$ = طول $\overline{\text{جـ ء}}$
والعكس صحيح :. إذا كان طول $\overline{\text{أ ب}}$ = طول $\overline{\text{جـ ء}}$ فإن: ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{جـ ء}}$)



نتيجة ② فى الشكل المقابل :-
إذا كانت م دائرة فيها: ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{جـ ء}}$)
فإن: أب = جـ ء والعكس إذا كان أب = جـ ء
فإن: ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{جـ ء}}$)

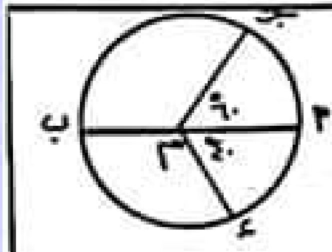


نتيجة ③ فى الشكل المقابل :-
إذا كان $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ وتران فى الدائرة م
، $\overline{\text{أ جـ}}$ // $\overline{\text{ب ء}}$ فإن، ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{جـ ء}}$)



نتيجة ④ فى الشكل المقابل :-
إذا كان $\overline{\text{أ ب}}$ وتراً فى الدائرة م
، $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ مماس يمس الدائرة م فى هـ
، $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ فإن ق($\overset{\frown}{\text{هـ أ}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{هـ ب}}$)

○ في الشكل المقابل :-



أب قطر في الدائرة م ، ق(∠أم جـ) = ٦٠°

، ق(∠أم ء) = ٤٠°

أوجد ① ق(⌒أء) ② ق(⌒جـ أ ء)

③ ق(⌒ب جـ) ④ ق(⌒ء جـ ب)

الحل

① ق(⌒أء) = ق(∠أم ء) = ٤٠°

② ق(⌒جـ أ ء) = ق(⌒جـ أ) + ق(⌒أء) = ٦٠° + ٤٠° = ١٠٠°

③ ق(⌒ب جـ) = ق(⌒أ جـ ب) − ق(⌒أ جـ)

= ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

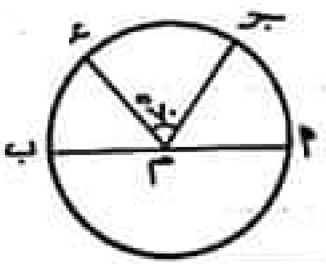
④ ق(⌒ء جـ ب) = قياس الدائرة − ق(⌒ء ب)

= ٣٦٠° − ق(⌒ء ب) = ٢٢٠°

○ أب قطر في الدائرة م ، ق(∠جـ م ء) = ٧٠°

ق(⌒أ جـ) : ق(⌒ء ب) = ٥ : ٦

أوجد ق(⌒أ جـ ب)



البرهان بفرض أن ق(⌒أ جـ) = ٥س ، ق(⌒ء ب) = ٦س

∵ ق(⌒أ جـ) + ق(⌒جـ ء) + ق(⌒ء ب) = ١٨٠°

∴ ٥س + ٧٠ + ٦س = ١٨٠°

∴ ١١س + ٧٠ = ١٨٠°

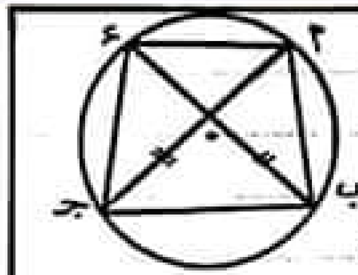
١١س = ١٨٠° − ٧٠° ١١س = ١١٠°

∴ س = ١١٠/١١ = ١٠°

∴ ق(⌒أ جـ) = ٥س = ٥×١٠ = ٥٠°

∴ ق(⌒أ جـ ء) = ق(⌒أ جـ) + ق(⌒جـ ء) = ٥٠° + ٧٠° = ١٢٠°

○ في الشكل المقابل :-



أ ب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة

فيه أ جـ = ب ء ، أب = (٣س − ٥) سم

، جـ ء = (س + ٣) سم أوجد بالبرهان طول أب

البرهان ∵ أ جـ = ب ء (معطى) ∴ ق(⌒أ ب جـ) = ق(⌒ب جـ ء)

بطرح ق(⌒ب جـ) من الطرفين

∴ ق(⌒أ ب جـ) − ق(⌒ب جـ) = ق(⌒أ ب جـ) − ق(⌒ب جـ)

∴ ق(⌒أب) = ق(⌒ء جـ) ∴ أب = جـ ء

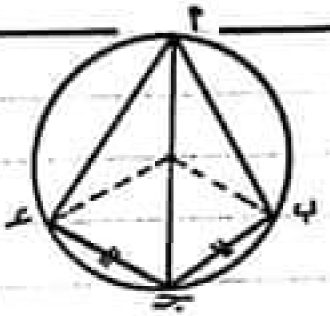
∵ أب = جـ ء ∴ ٣س − ٥ = س + ٣

∴ ٣س − س = ٣ + ٥ ∴ ٢س = ٨

∴ س = ٨/٢ ∴ س = ٤ سم .

∵ أب = ٣س − ٥ ∴ أب = ٣×٤ − ٥ = ٧ سم .

○ في الشكل المقابل :-



أ ب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة م ، أ جـ قطر في الدائرة ،

جـ ب = جـ ء أثبت أن

ق(⌒أب) = ق(⌒أء)

البرهان ∵ جـ ب = جـ ء ∴ ق(⌒جـ ب) = ق(⌒جـ ء) ← ①

∵ أ جـ قطر في الدائرة

∴ ق(⌒أب) = ١٨٠° − ق(⌒جـ ب)

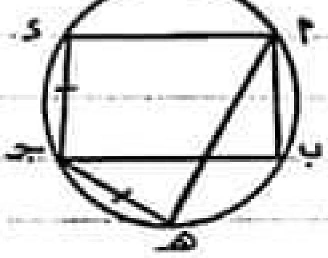
∴ ق(⌒أء) = ١٨٠° − ق(⌒جـ ء) ← ②

من (١) ، (٢) ينتج أن

ق(⌒أب) = ق(⌒أء)

○ في الشكل المقابل:

أ ب جـ د مستطيل مرسوم داخل دائرة
رسم الوتر $\overline{\text{جـ هـ}}$ بحيث جـ هـ = جـ د
أثبت أن: أ هـ = ب جـ.



الحل: ∵ أ ب جـ د مستطيل

∴ أ ب = جـ د ← (١) من خواص المستطيل

∵ جـ هـ = جـ د ← (٢) معطى

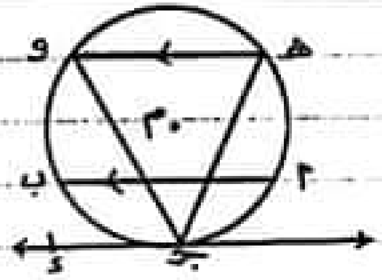
من (١)، (٢) ∴ أ ب = جـ هـ ∴ ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{جـ هـ}}$)

بإضافة ق($\overset{\frown}{\text{ب هـ}}$) للطرفين

∴ ق($\overset{\frown}{\text{أ ب هـ}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{ب هـ جـ}}$) ∴ أ هـ = ب جـ ⋘

○ في الشكل المقابل:

م دائرة، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ مماس للدائرة عند جـ
، $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{هـ و}}$ وتران في الدائرة حيث:
$\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ اثبت أن:
جـ هـ = جـ و



البرهان: ∵ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{هـ و}}$ ∴ ق($\overset{\frown}{\text{أ هـ}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{ب و}}$) ← (١)

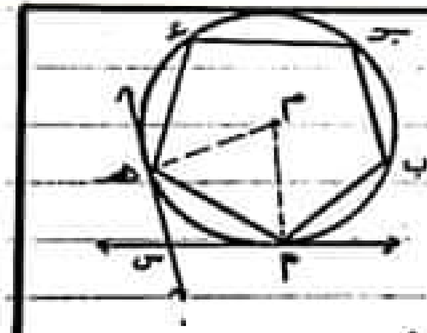
∵ المماس $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ ق($\overset{\frown}{\text{جـ أ}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{جـ ب}}$) ← (٢)

بجمع (١)، (٢) ∴ ق($\overset{\frown}{\text{هـ جـ}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{جـ و}}$)

∴ جـ هـ = جـ و.

○ في الشكل المقابل:-

أ ب جـ د هـ خماسي منتظم مرسوم
داخل الدائرة م ، $\overleftrightarrow{\text{أ س}}$ مماس للدائرة
عند أ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ س}}$ مماس للدائرة عند هـ
حيث $\overleftrightarrow{\text{أ س}} \cap \overleftrightarrow{\text{هـ س}} = \{\text{س}\}$ أوجد
(أ) ق($\overset{\frown}{\text{أ هـ}}$) (ب) ق($\angle$ أ س هـ)



البرهان العمل:- نرسم $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م هـ}}$

∵ أ ب جـ د هـ خماسي منتظم

∴ أ ب = ب جـ = جـ د = د هـ = أ هـ

∴ ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{جـ د}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{د هـ}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{أ هـ}}$)

∵ قياس الدائرة = ٣٦٠°

∴ ق($\overset{\frown}{\text{أ هـ}}$) = $\frac{٣٦٠}{٥}$ = ٧٢° ، ق($\angle$ أ م هـ) = ق($\overset{\frown}{\text{أ هـ}}$) = ٧٢°

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ س}}$ مماس ∴ $\overline{\text{م أ}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ س}}$ ∴ ق($\angle$ م أ س) = ٩٠°

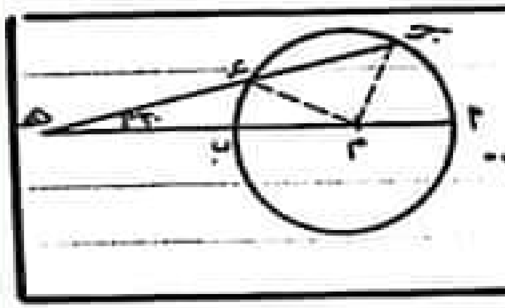
، ∵ $\overleftrightarrow{\text{هـ س}}$ مماس ∴ $\overline{\text{م هـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{س هـ}}$ ∴ ق($\angle$ م هـ س) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق($\angle$ أ س هـ) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٧٢°) = ١٠٨°

○ في الشكل المقابل:-

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة م ،
$\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \cap \overleftrightarrow{\text{جـ د}} = \{\text{هـ}\}$ ، ق($\angle$ أ هـ جـ) = ٣٠°
، ق($\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$) = ٨٠° أوجد ق($\overset{\frown}{\text{جـ د}}$)



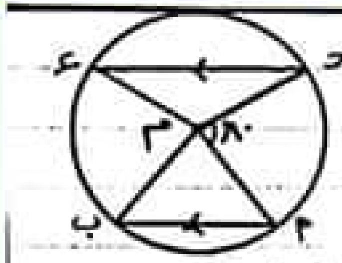
البرهان العمل:- نرسم $\overline{\text{م جـ}}$ ، $\overline{\text{م د}}$

∵ ق($\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$) = ٨٠° ∴ ق($\angle$ أ م جـ) = ق($\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$) = ٨٠°

∵ $\angle$ أ م جـ خارجية عن △ جـ م هـ ∴ ق($\angle$ جـ) = ٨٠° − ٣٠° = ٥٠°

∵ م جـ = م د = (نق) ∴ ق($\angle$ جـ د م) = ق($\angle$ جـ) = ٥٠° ∴ ق($\angle$ جـ م د) = ١٨٠ − (٥٠° + ٥٠°) = ٨٠°

∴ ق($\overset{\frown}{\text{جـ د}}$) = ٨٠°



○ في الشكل المقابل :-
م دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم ، أ ب ، حـ ء وتران متوازيان في الدائرة ، ق(أ م جـ) = ٨٠°
، طول أ جـ = طول أ ب .
أوجد :- (أ) ق(أ م ب) (ب) ق(جـ ء) (ء) طول جـ ء

البرهان ∵ طول أ جـ = طول أ ب ∴ ق(أ ب) = ق(أ جـ) = ٨٠°

∴ ق(∠أ م ب) = ق(أ ب) = ٨٠°

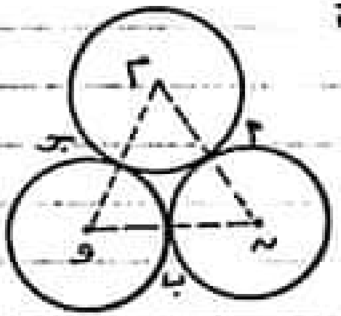
∵ جـ ء // أ ب ∴ ق(ب ء) = ق(أ جـ) = ٨٠°

∵ قياس الدائرة = ٣٦٠°

∴ ق(جـ ء) = ٣٦٠° − (٨٠° + ٨٠° + ٨٠°) = ١٢٠°

طول (جـ ء) = $\frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}}$ × محيط الدائرة

∴ طول (جـ ء) = $\frac{١٢٠°}{٣٦٠°}$ × ٢ π نق = $\frac{١٢٠°}{٣٦٠°}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٠ ≃



○ م ، ن ، و ثلاث دوائر متطابقة ومتماسة في أ ، ب ، جـ ، طول نصف قطر كل منها ١٠ سم

(أ) أثبت أن :-
طول أ ب = طول ب جـ = طول أ جـ

(ب) أوجد محيط الشكل أ ب جـ .

البرهان العمل :- نرسم م ن ، ن و ، م و

∵ م ، ن ، و دوائر متطابقة ، طول نصف قطر كل منها ١٠ سم

∴ △ م ن و متساوي الأضلاع ، ق(∠ن) = ق(∠و) = ق(∠م)

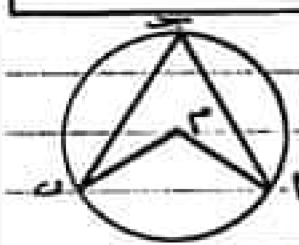
∴ ق(أ ب) = ق(ب جـ) = ق(أ جـ) = ٦٠° = ٦٠°

∴ طول أ ب = $\frac{٦٠}{٣٦٠}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٠ = $\frac{٢٢٠}{٢١}$ سم ∴ محيط الشكل أ ب جـ = ٣ × $\frac{٢٢٠}{٢١}$ = $\frac{٢٢٠}{٧}$ ≃ ٣١.٥ سم

العلاقة بين الزاويتين المحيطية والمركزية المشتركتين في القوس .

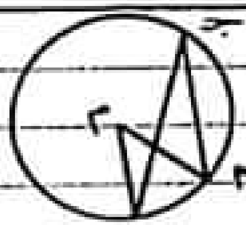
الزاوية المحيطية :

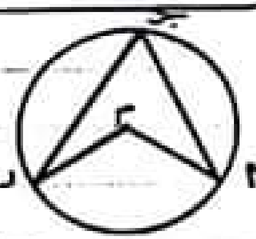
هي الزاوية التي رأسها على الدائرة ، ويحمل كل ضلع من ضلعيها وتراً في الدائرة .

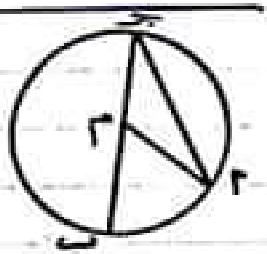


في الشكل المقابل : ∠أ جـ ب زاوية محيطية
ويكون أ ب هو القوس المقابل لها .
- لكل زاوية محيطية زاوية مركزية واحدة تشترك معها في القوس .

نظرية قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس.







الأشكال السابقة توضح الصور المختلفة بين الزاوية المحيطية والمركزية مثل ق(∠أ جـ ب) المحيطية تشترك مع ق(∠أ م ب) المركزية في القوس أ ب

نتيجة (١) قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها .

نتيجة (٢) الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة
- الزاوية المحيطية التي تقابل قوساً أصغر من نصف دائرة حادة.
- ~ ~ ~ ~ أكبر من ~ ~ منفرجة

○ في كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة الرمز المجهول
س ، ص ، ع ، ل

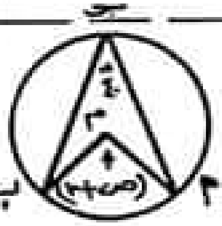
① قيمة س = ...

الحل

∵ ق(ج̂) = ½ ق(م̂)

∴ س = ½ × ١١٠° = ٥٥°

② قيمة ص = ...

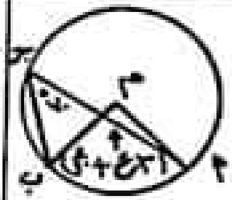


الحل ∵ ق(م̂) المركزية = ٢ ق(ج̂) المحيطية

∴ ص + ١٠ = ٢ × ٤٠

ص + ١٠ = ٨٠° ⟸ ص = ٨٠ − ١٠ = ٧٠°

○ أوجد قيمة ع؟



الحل ق(م̂) = ٢ ق(ج̂)

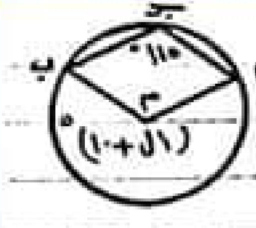
∴ ٣ع + ٢٠ = ٢ × ٧٠

∴ ٣ع + ٢٠ = ١٤٠

٣ع = ١٤٠ − ٢٠   ٣ع = ١٢٠

ع = ١٢٠/٣ = ٤٠°

○ أوجد قيمة ل؟



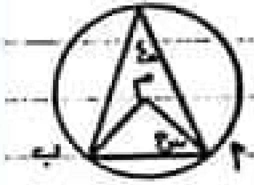
الحل ق(أ م̂ ب) = ٢ ق(ج̂)

٢ل + ١٠ = ٢ × ١١٥

٣ل + ١٠° = ٢٣٠° ⟸ ∴ ل = ٢٣٠° − ١٠

٣ل = ٢٢٠° ∴ ل = ٢٢٠°/٣ = ١١٠°

○ أوجد قيمة س؟

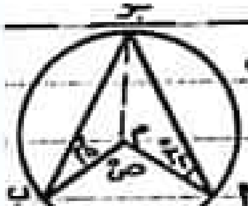


الحل ∵ ق(م̂) = ٢ ق(ج̂) = ٩٠°

∵ م أ = م ب = نق

∴ س = (١٨٠° − ٩٠°)/٢ = ٤٥°

○ أوجد قيمة ص؟



الحل

∵ م أ = م ج ∴ ق(أ ج̂ م) = ٣٢°

∵ م ج = م ب ∴ ق(ب ج̂ م) = ٢٥°

∴ ق(ج̂) = ٢٥° + ٣٢° = ٥٧°

∵ ق(م̂) = ٢ ق(ج̂)

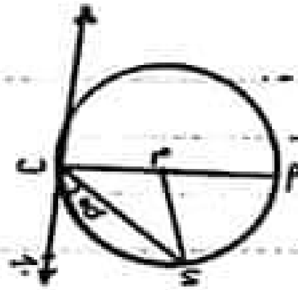
محيطية ومركزية مشتركتان

في أب⌒

∴ ص = ٢ × ٥٧° = ١١٤°

○ أوجد

ق(أ م̂ ء) = ...



الحل

∵ ب↔ج مماس

∴ م ب ⊥ ب ج

∴ ق(م ب̂ ج) = ٩٠°

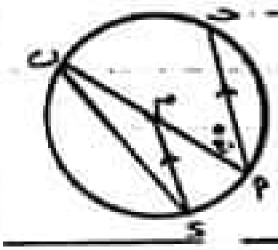
∴ ق(م ب̂ ء) = ٩٠° − ٥٠° = ٤٠°

∵ م ء = م ب ∴ ق(ء م̂ ب) = ١٨٠° − ٢ × ٤٠

ق(ء م̂ ب) = ١٠٠° ∴ ق(أ م̂ ء) = ٨٠°

○ أوجد

ق(ب ء̂ م)



الحل ∵ أ ج // ء م

∴ ق(أ م̂ ء) = ق(أ̂) = ٤٠° بالتبادل

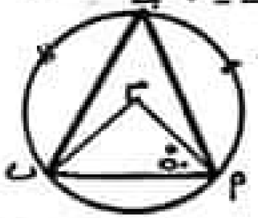
∵ م ء = م ب ∴ ق(ء م̂ ب) = ١٨٠° − ٤٠°

= ١٤٠°)

∴ ق(ب ء̂ م) = (١٨٠ − ١٤٠)/٢ = ٢٠°

○ أوجد

ق(ج أ̂ م)؟



الحل

∵ ق(أج⌒) = ق(جب⌒)

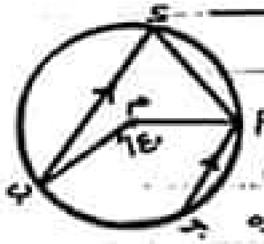
∴ أ ج = ج ب ∵ م أ = م ب = نق

∴ ق(أ م̂ ب) = ١٨٠ − ٢ × ٥٠°

∴ ق(ج̂) = ½ ق(م̂) = ٤٠°   = ٨٠°

∴ ق(أ̂) = (١٨٠ − ٤٠)/٢ = ٧٠°   ∴ ق(ج أ̂ م) = ٢٠°

○ أوجد ق(ه أ̂ ء)



الحل

∵ ق(م̂) = ١٤٠°

∴ ق(ء̂) = ½ ق(م̂)

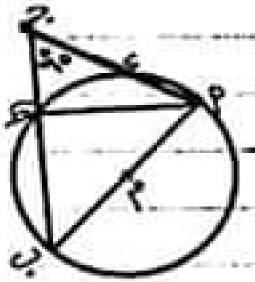
= ½ × ١٤٠° = ٧٠°

∵ أ ه // ء ب ∴ ق(ه أ̂ ء)

= ١٨٠° − ٧٠° = ١١٠°

○ أوجد

ق(ج أ̂ ه)



الحل

∵ أ ب قطر

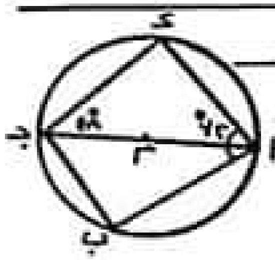
∴ ق(أ ه̂ ب) = ٩٠°

∴ ق(أ ه̂ ج) = ٩٠°

∴ ق(ج أ̂ ه) = ١٨٠° − [٩٠° + ٦٥°]

= ٢٥°

○ أوجد ق(ب أ̂ ه)



الحل

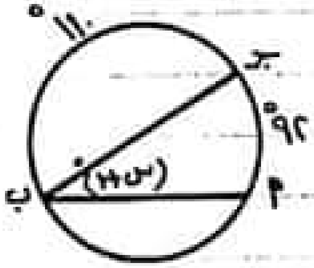
∵ أ ج قطر

∴ ق(ء̂) = ٩٠°

في △ أ ء ج ق(ء أ̂ ج) = ٩٠° − ٤٨° = ٤٢°

∴ ق(ب أ̂ ج) = ٧٢° − ٤٢° = ٣٠°

①



أوجد س ، ق(⌒أب)

الحل: ق(∠ب) = $\frac{1}{2}$ ق(⌒أجـ)

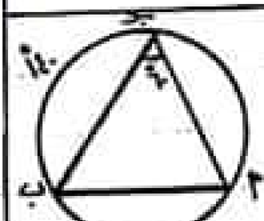
∴ س+١ = $\frac{1}{2}$ × ٩٢

س+١ = ٤٦ س = ٤٦ − ١ = ٤٥

ق(⌒أب) = ٣٦٠° − [٩٢° + ١١٠°]

= ٣٦٠° − ٢٠٢° = ١٥٨°

○



أوجد

ق(∠أ) ، ق(⌒أجـ)

الحل: ∵ ق(⌒جـب) = ١٤٠°

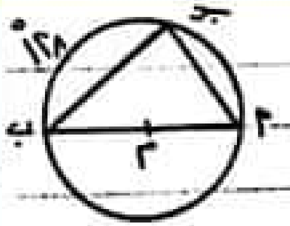
∴ ق(∠أ) = $\frac{1}{2}$ ق(⌒جـب) = $\frac{1}{2}$ × ١٤٠°

= ٧٠°

ق(⌒أب) = ٢ × ٦٠° = ١٢٠°

ق(⌒أجـ) = ٣٦٠° − [١٢٠° + ١٤٠°]

= ١٠٠°



أوجد:

ق(∠جـ) ، ق(∠ب)

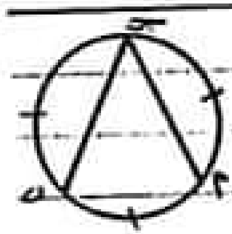
الحل: ∵ أب قطر ∴ ق(∠جـ) = ٩٠°

∵ ق(⌒جـب) = ١٢٨°

∴ ق(∠أ) = $\frac{1}{2}$ × ١٢٨ = ٦٤°

∴ ق(∠ب) = ١٨٠° − [٩٠° + ٦٤°] = ٢٦°

④



أوجد ق(∠جـ)

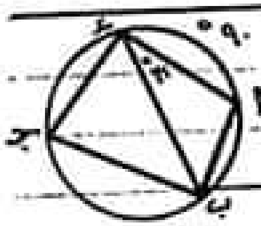
الحل:

∵ قياس الدائرة = ٣٦٠°

∴ ق(⌒أب) = $\frac{٣٦٠}{٣}$ = ١٢٠°

∴ ق(∠جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(⌒أب) = $\frac{1}{2}$ × ١٢٠° = ٦٠°

○



أوجد ق(∠دجـب)

الحل: ∵ ق(∠أدب) = ٣٠°

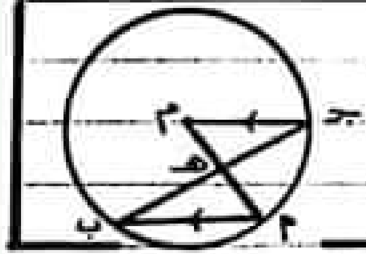
∴ ق(⌒أب) = ٢ × ٣٠° = ٦٠°

∴ ق(∠دجـب) = $\frac{1}{2}$ ق(⌒دب)

= $\frac{1}{2}$ × [٩٠° + ٦٠°] = $\frac{1}{2}$ × ١٥٠ = ٧٥°

○ في الشكل المقابل: أب وتر في الدائرة م ، جـم // أب ، ب جـ ∩ أم = {هـ}

أثبت أن: ب هـ > أ هـ



البرهان: ∵ ق(∠ب) = $\frac{1}{2}$ ق(∠م) (محيطية ومركزية مشتركتان في ⌒أجـ)

∴ ق(∠م) > ق(∠ب) ← ①

∵ جـم // أب

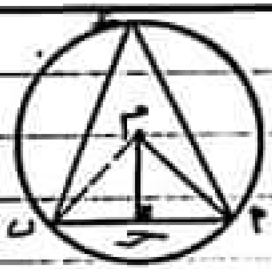
∴ ق(∠أ) = ق(∠م) ← (٢) من (١) ، (٢)

∴ ق(∠أ) > ق(∠ب) ∴ هـب > أهـ ⇐ ※

○ في الشكل المقابل: أب وتر في الدائرة م

م جـ ⊥ أب أثبت أن:

ق(∠أمجـ) = ق(∠أدب)



الحل العمل: نرسم ب م

في △ م أ ب ∵ م أ = م ب ، م جـ ⊥ أب

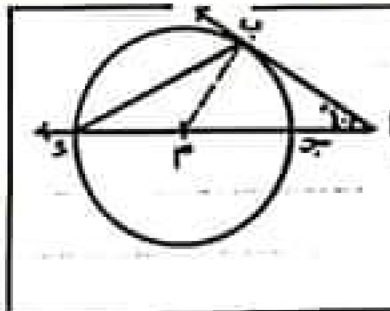
∴ ق(∠أمجـ) = ق(∠ب م جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠أمب) ← (١)

∵ ∠أدب المحيطية ، ∠أمب المركزية مشتركتان في ⌒أب

∴ ق(∠أدب) = $\frac{1}{2}$ ق(∠أمب) ← (٢)

من (١) ، (٢) ∴ ق(∠أمب) = ق(∠أدب)

○ أ نقطة خارج الدائرة م ، أب مماس للدائرة عند ب ، أم قطع الدائرة م في جـ ، ء على الترتيب ، ق(أˆ) = ٤٠°
أوجد بالبرهان ق(ب ءˆ جـ)



البرهان العمل: نرسم نصف القطر م ب

∵ أب مماس للدائرة عند ب ، م ب نصف قطر

∴ م ب ⊥ أب ∴ ق(أ بˆ م) = ٩٠°

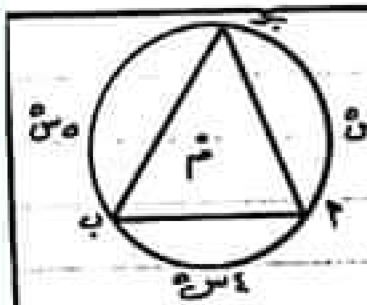
∵ مجموع قياسات زوايا △ أ م ب = ١٨٠°

∴ ق(أ مˆ ب) = ١٨٠° − [٩٠° + ٤٠°] = ١٨٠ − ١٣٠° = ٥٠°

∵ ب ءˆ جـ المحيطية ، ب مˆ جـ المركزية مشتركتان في ب⌒جـ

∴ ق(ب ءˆ جـ) = ½ ق(أ مˆ ب) = ½ × ٥٠ = ٢٥°

○ في الشكل المقابل:
أ ب جـ مثلث مرسوم داخل الدائرة م
ق(أ⌒ب) : ق(ب⌒جـ) : ق(أ⌒جـ) = ٤ : ٥ : ٣
أوجد: ق(أ جـˆ ب)



البرهان نفرض أن

ق(أ⌒ب) = ٤ س° ، ق(ب⌒جـ) = ٥ س° ، ق(أ⌒جـ) = ٣ س°

∵ قياس الدائرة = ٣٦٠°

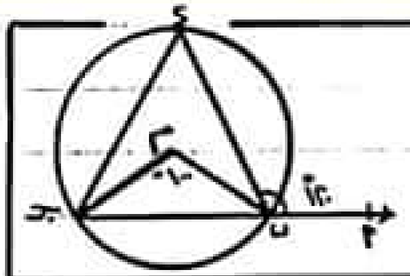
٤ س + ٥ س + ٣ س = ٣٦٠°

∴ ١٢ س = ٣٦٠° ∴ س = ٣٦٠/١٢ = ٣٠°

∴ ق(أ⌒ب) = ٤ س = ٤ × ٣٠° = ١٢٠°

∴ ق(أ جـˆ ب) = ½ ق(أ⌒ب) = ½ × ١٢٠° = ٦٠°

○ في الشكل المقابل: م دائرة
، ق(ب مˆ جـ) = ١٠٠° ، ق(أ بˆ ء) = ١٢٠°
اوجد بالبرهان ق(ء جـˆ ب)

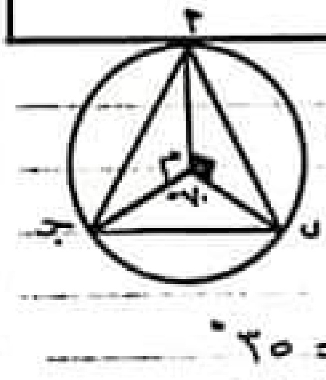


البرهان ∵ ق(ب مˆ ء) = ١٠٠° ∴ ق(ءˆ) = ½ ق(مˆ) = ½ × ١٠٠ = ٥٠°
محيطية ومركزية مشتركتان في ب⌒ء

∵ أ بˆ ء خارجة عن △ ب ء جـ

∴ ق(ء جـˆ ب) = ١٢٠° − ٥٠° = ٧٠°

○ أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة م بحيث ق(أ مˆ ب) = ٩٠°
، ق(ب مˆ جـ) = ٧٠° اوجد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ



البرهان ∵ ق(أ مˆ ب) = ٩٠°

∴ ق(جـˆ) = ½ ق(أ مˆ ب) = ½ × ٩٠° = ٤٥°
محيطية ومركزية مشتركتان في أ⌒ب

∵ ق(ب مˆ جـ) = ٧٠°

∴ ق(أˆ) = ½ ق(ب مˆ جـ) = ½ × ٧٠° = ٣٥°
محيطية ومركزية مشتركتان في ب⌒جـ

∵ مجموع قياسات △ أ ب جـ = ١٨٠°

∴ ق(بˆ) = ١٨٠° − [٤٥° + ٣٥°] = ١٨٠° − ٨٠° = ١٠٠°

الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس

نظرية الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس في الدائرة الواحدة متساوية في القياس

السؤال أثبت أن الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس في دائرة واحدة تكون متساوية في القياس

المعطيات جـ ، د ، هـ زوايا محيطية مشتركة في أب

المطلوب إثبات أن ق(جـ) = ق(د) = ق(هـ)

البرهان

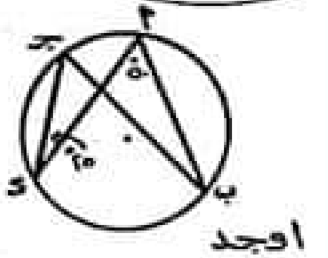
∵ ق(جـ) = ½ ق(أب) ← (١)

∵ ق(د) = ½ ق(أب) ← (٢)

∵ ق(هـ) = ½ ق(أب) ← (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ∴ ق(جـ) = ق(د) = ق(هـ) ⟸

مثال أوجد قياسات الزوايا المبينة أسفل كل شكل؟



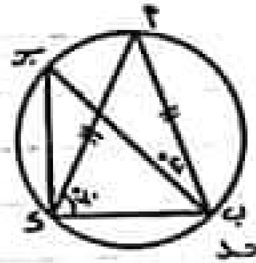
أوجد

ق(جـ) ، ق(ب)

الحل

ق(جـ) = ق(أ) = ٥٠°

ق(ب) = ق(د) = ٢٥°



أوجد

ق(جـ) ، ق(ب د جـ)

الحل

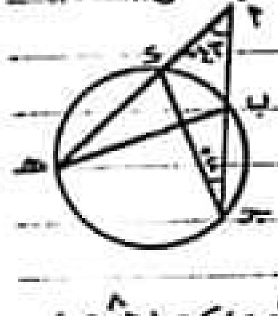
∵ Δ أ ب د فيه أب = أد

∴ ق(أ) = ١٨٠ − ٢×٧٠ = ٤٠°

∴ ق(جـ) = ق(أ) = ٤٠°

ق(جـ د أ) = ق(جـ ب أ) = ٢٠°

∴ ق(ب د جـ) = ٩٠°



أوجد

ق(ب هـ د) ، ق(أ ب هـ)

الحل

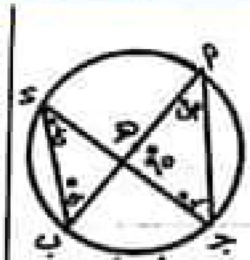
ق(ب هـ د) = ق(جـ) = ٢٠°

في Δ أ ب هـ

ق(أ ب هـ) = ١٨٠° − [٢٠° + ٤٢°]

= ١٨٠ − ٦٢ = ١١٧°

○ أوجد قيم س ، ص ، ع



الحل

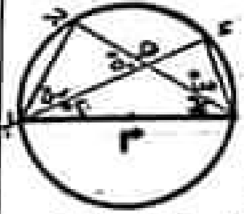
س = ٥٠°

لأن ق(جـ) = ق(ب) = ٥٠° محيطيتان مشتركتان في أد

ق(أ) = ١٨٠° − [٩٥° + ٥٠°] = ٣٥° ∴ ص

ق(د) = ق(أ) = ٣٥° ∴ ع = ٣٥°

○ أوجد قيم س ، ص ، ع



الحل

∵ هـ خارجة عن Δ هـ أ ب

∴ ق(هـ أ ب) = ع = ٥٠° − ٢٠° = ٣٠°

∵ أب قطر ∴ ق(جـ) = ٩٠°

∴ ق(ب) = ١٨٠° − [٩٠° + ٣٠°] = ٦٠°

∴ س = ٦٠ − ٢٠ = ٤٠°

س = ص = ٤٠°

○ أوجد قيم س ، ص ، ع

الحل ∵ ق(ب جـ) = ق(د ب)

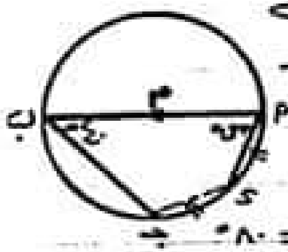
جـ ب = ب د

∴ س = ع = (١٨٠ − ٧٦)/٢ = ٥٢°

∵ ق(أ) = ق(د) = ٥٢°

محيطيتان مشتركتان في جـ ب

○ أوجد قيمة س



الحل

∵ ق(ب) = ٤٠°

∴ ق(أ جـ) = ٢×٤٠ = ٨٠°

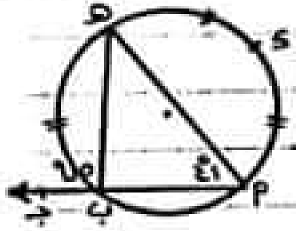
∵ د منتصف أ جـ ∴ ق(د جـ) = ٤٠°

∵ أب قطر ∴ ق(جـ ب) = ١٨٠ − ٨٠ = ١٠٠°

∴ ق(د أ ب) = ½ ق(د جـ ب) = ٤٠ + ١٠٠ = ١٤٠ × ½

∴ ق(د أ ب) = س = ½ × ١٤٠ = ٧٠°

○ أوجد قيمة ص



الحل

∵ ق(أ) = ٤١°

∴ ق(هـ ب) = ٢×٤١ = ٨٢°

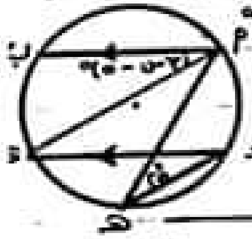
∴ ق(أ هـ ب) = ٣×٨٢ = ٢٤٦°

∴ ق(أ ب) = ٣٦٠ − ٢٤٦ = ١١٤°

∴ ق(هـ) = ½ × ١١٤ = ٥٧°

∴ ص = ٥٧ + ٤١ = ٩٨°

○ أوجد قيمة س ؟



∵ ق(د) = ق(هـ) = ٢٥°

∵ أب // د جـ

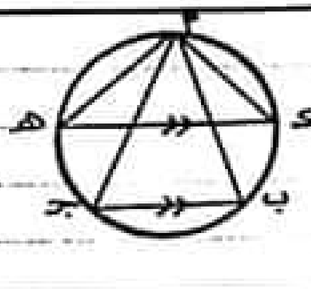
∴ ق(ب أ د) = ق(د) = ٢٥°

٣س − ٥ = ٢٥

٣س = ٢٥ + ٥ ٣س = ٣٠

س = ٣٠/٣ = ١٠°

○ في الشكل المقابل :-
أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، ء هـ // ب جـ . اثبت أن :-
ق (ء أ̂ جـ) = ق (ب أ̂ هـ)



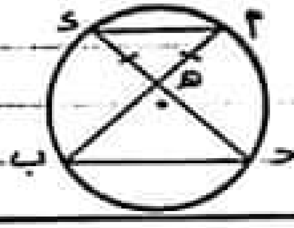
البرهان ∵ ء هـ // ب جـ ∴ ق(ء⌒ب) = ق(هـ⌒جـ)

بإضافة ب⌒جـ للطرفين

∴ ق (ء ب جـ⌒) = ق(هـ جـ ب⌒)

∴ ق (ء أ̂ جـ) = ق(هـ أ̂ ب)

○ في الشكل المقابل :-
أ ب ∩ جـ ء = {هـ} ، هـ أ = هـ ء
اثبت أن :- هـ ب = هـ جـ



البرهان في △ أ هـ ء ∵ أ هـ = هـ ء ∴ ق(أ̂) = ق(ء̂) ← (١)

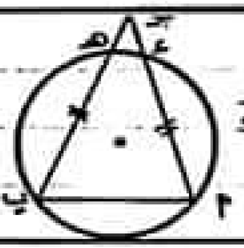
∵ أ ب̂ جـ ، أ ء̂ جـ محيطيتان تحصران أ⌒جـ ∴ ق(ب̂) = ق(ء̂) ← (٢)

∵ ء جـ̂ ب ، ء أ̂ ب محيطيتان تحصران ء⌒ب ∴ ق(جـ̂) = ق(أ̂) ← (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) نستنتج أن : ق(ب̂) = ق(جـ̂)

في △ هـ ب جـ ∵ ق(ب̂) = ق(جـ̂) ∴ هـ ب = هـ جـ

○ في الشكل المقابل :-
أ ء ، ب هـ وتران متساويان في الطول في الدائرة
، أ ء ∩ ب هـ = {جـ} أثبت أن : جـ ء = جـ هـ



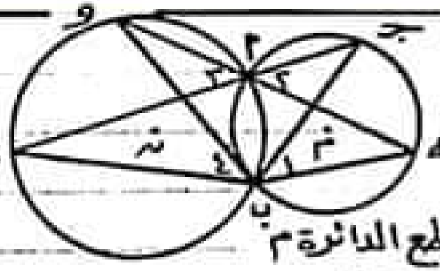
البرهان ∵ أ ء = ب هـ ← ① ∴ ق(أ⌒ء) = ق(ب⌒هـ) بإضافة ق(ء⌒هـ) للطرفين

∴ ق(أ ء هـ⌒) = ق(ب هـ ء⌒)

∴ ق(ب̂) = ق(أ̂) ∴ أ جـ = ب جـ ← ② بطرح ① من ②

∴ جـ ء = جـ هـ .

○ في الشكل المقابل :-
م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ، أ جـ↔ يقطع الدائرة م في جـ ويقطع الدائرة ن في ء ، أ هـ↔ يقطع الدائرة م في هـ ، ويقطع الدائرة ن في و أثبتوا أن
ق (هـ ب̂ جـ) = ق (و ب̂ ء)



الحل ∵ ق(١̂) = ق(٢̂) محيطيتان مشتركتان في هـ⌒جـ ← (١)

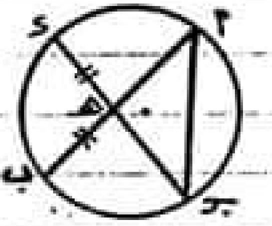
، ق(٢̂) = ق(٣̂) بالتقابل بالرأس ← (٢)

، ق(٣̂) = ق(٤̂) محيطيتان مشتركتان في و⌒ء ← (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ∴ ق(١̂) = ق(٤̂)

∴ ق(هـ ب̂ جـ) = ق(و ب̂ ء) ⇐ ※

○ في الشكل المقابل :-
أ ب ، جـ ء وتران متساويان في الطول في الدائرة ، أ ب ∩ جـ ء = {هـ}
أثبت أن : المثلث أ جـ هـ متساوي الساقين .



البرهان المعطيات : أ ب ، جـ ء وتران متساويان في الطول

المطلوب : إثبات أن : △ أ جـ هـ متساوي الساقين .

∵ أ ب = جـ ء

∴ ق(أ ء ب⌒) = ق(جـ ب ء⌒)

بطرح ق(ب⌒ء) من الطرفين

∴ ق(أ ء ب⌒) - ق(ب⌒ء) = ق(جـ ب ء⌒) - ق(ب⌒ء)

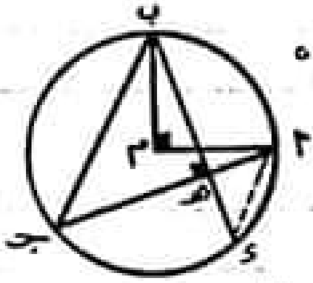
∴ ق(أ⌒ء) = ق(جـ⌒ب)

∴ ق(جـ̂) = ق(أ̂) ∴ أ هـ = هـ جـ

∴ △ أ هـ جـ متساوي الساقين .

○ م أ ، م ب نصفا قطرين متعامدين في الدائرة م ، أ جـ ، ب ء وتران متعامدان ومتقاطعان في هـ .

(أ) أوجد ق (∠ جـ ب ء)   (ب) اثبت أن : أ ء // ب جـ



الحل

∵ ق (∠ أ م ب) = ٩٠°

∴ ق (∠ أ جـ ب) = ½ ق (∠ أ م ب) = ½ × ٩٠ = ٤٥°

محيطية ومركزية مشتركتان في ⌒أ ب

في △ ب هـ جـ ∵ ق (∠ ب هـ جـ) = ٩٠°

∴ ق (∠ جـ) = ٤٥°

∴ ق (∠ جـ ب ء) = ١٨٠° − [٩٠° + ٤٥°] = ١٨٠° − ١٣٥° = ٤٥°

∵ ق (∠ ء أ جـ) = ق (∠ ء ب جـ) = ٤٥° محيطيتان مشتركتان في ⌒ء جـ

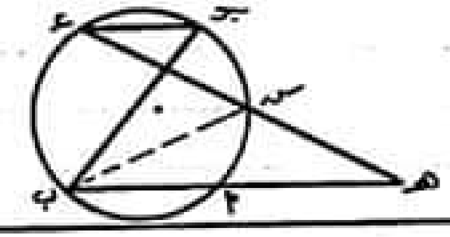
∴ ق (∠ ء أ جـ) = ق (∠ جـ) = ٤٥° وهما في وضع تبادل

∴ أ ء // ب جـ

○ في الشكل المقابل :

هـ نقطة خارج الدائرة

اثبت أن : ق (∠ هـ) < ق (∠ ب جـ ء)



الحل العمل : نرسم ب س

∵ ق (∠ ب س ء) = ق (∠ ب جـ ء) ← ①

محيطيتان مشتركتان في ⌒ب ء

∵ ∠ ب س ء خارجة عن △ ب هـ س

∴ ق (∠ هـ) < ق (∠ ب س ء) ← ②

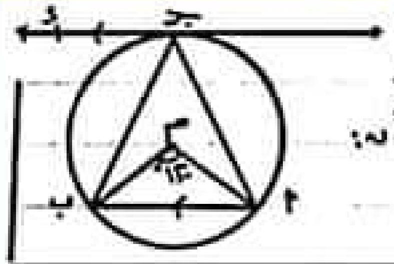
من (١) ، (٢) ∴ ق (∠ هـ) < ق (∠ ب جـ ء)

حل آخر ∵ ق (∠ هـ) = ½ [ق (⌒ء ب) − ق (⌒س أ)] ← (١)

∵ ق (∠ ب جـ ء) = ق (⌒ء ب) ← (٢)

من (١) ، (٢) ∴ ق (∠ هـ) < ق (∠ ب جـ ء)

○ في الشكل المقابل: جـ د مماس للدائرة عند جـ ، جـ د // أب ، ق(∠أم ب) = ١٢٠° اثبت أن: المثلث جـ أ ب متساوي الأضلاع .



البرهان ∵ ق(∠أم ب) = ١٢٠°

∴ ق(∠أجـ ب) = ½ ق(∠أم ب) = ½ × ١٢٠ = ٦٠°

محيطية ومماسية مشتركتان في أب

∵ جـ د // أب ∴ ق(أجـ) = ق(جـ د) . ∴ أجـ = جـ ب

∴ ق(∠أ) = ق(∠ب) = (١٨٠ − ٦٠)/٢ = ٦٠°

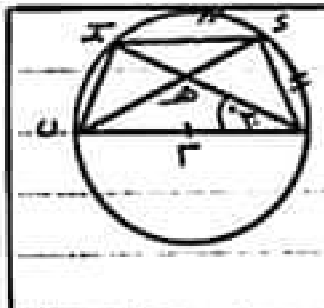
∴ △أجـ ب متساوي الأضلاع .

○ في الشكل المقابل:-

أب قطر في الدائرة م ، جـ د للدائرة ، ق(∠جـ أ ب) = ٣٠° ، د منتصف أجـ ، د ب ∩ أجـ = {هـ}

أولاً أوجد ق(∠ب د جـ) ، ق(∠أ ب د)

ثانياً أثبت أن △أ ب هـ متساوي الساقين .



البرهان ∵ أ ب جـ د شكل رباعي دائري

∴ ق(∠ب د جـ) = ق(∠ب أ جـ) = ٣٠° محيطيتان مشتركتان في ب جـ

∴ ق(ب جـ) = ٢ ق(∠ب أ جـ) = ٢ × ٣٠ = ٦٠°

∵ أب قطر ∴ ق(أ د جـ ب) = ١٨٠°

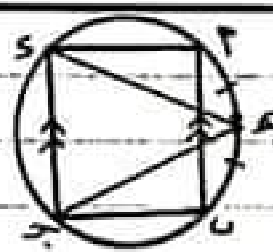
∵ د منتصف أجـ ∴ ق(أد) = ق(د جـ) = (١٨٠ − ٦٠)/٢ = ٦٠°

∴ ق(∠أ ب د) = ½ ق(أد) = ½ × ٦٠ = ٣٠°

في △أ ب هـ ∵ ق(∠هـ أ ب) = ق(∠هـ ب أ) = ٣٠°

∴ △أ ب هـ متساوي الساقين .

○ أ ب جـ د شكل رباعي دائري فيه أب // د جـ ، هـ منتصف أب . أثبت أن : هـ جـ = هـ د .



البرهان ∵ أب // د جـ

∴ ق(ب جـ) = ق(أ د) ←(١)

∵ هـ منتصف أب

∴ ق(هـ ب) = ق(هـ أ) ←(٢)

بجمع (١) ، (٢) ∴ ق(ب جـ) + ق(هـ ب) = ق(أ د) + ق(هـ أ)

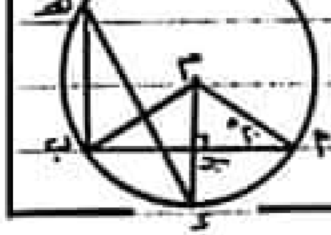
∴ ق(هـ جـ) = ق(هـ د)

∴ هـ جـ = هـ د

○ في الشكل المقابل:-

م جـ يقطع أب في جـ ، ويقطع الدائرة في د ، ق(∠م أ ب) = ٢٠° أوجد :

أولاً: ق(أد) ثانياً: ق(∠د هـ ب)



البرهان ∵ م جـ ⊥ أب ∴ ق(∠أجـ م) = ٩٠°

في △أم جـ : ق(∠أم جـ) = ١٨٠ − [٢٠° + ٩٠°]

∴ ق(∠أم جـ) = ١٨٠° − ١١٠° = ٧٠°

∴ ق(أد) = ق(∠أم د) = ٧٠°

في △أم ب : ∵ م أ = م ب = نق ، م جـ ⊥ أب

∴ ق(∠د م ب) = ق(∠أم د) = ٧٠°

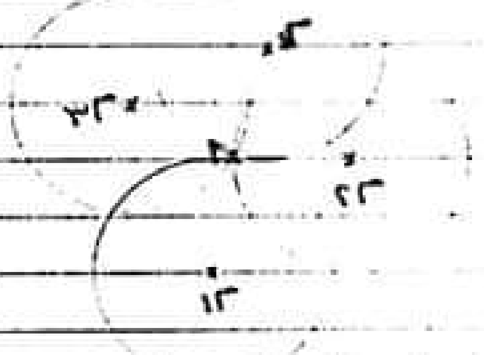
∴ ق(∠د هـ ب) = ق(∠د م ب) = ٧٠°

محيطية ومركزية مشتركتان في د ب

تعيين الدائرة.

أولاً: رسم دائرة تمر بنقطة معلومة

- يمكن رسم عدد لانهائي من الدوائر التي تمر بنقطة معلومة مثل أ.



ثانياً: رسم دائرة تمر بنقطتين معلومتين

لرسم عدد من الدوائر تمر بالنقطتين أ، ب أي أب

- جميع مراكز هذه الدوائر تقع على محور أب (المستقيم العمودي عليها من منتصفها)

ويوجد ٣ حالات

١- إذا كان نصف قطر الدائرة المطلوبة أكبر من نصف طول أب
نق > $\frac{1}{2}$ أب يمكن رسم دائرتين عدد الحلول (٢)

٢- إذا كان نصف قطر الدائرة المطلوبة = نصف طول أب
نق = $\frac{1}{2}$ أب يمكن رسم دائرة واحدة عدد الحلول (١)

٣- إذا كان نصف قطر الدائرة المطلوبة أقل من نصف طول أب
نق < $\frac{1}{2}$ أب لا يمكن رسم دائرة عدد الحلول صفر

ثالثاً: رسم دائرة تمر بثلاث نقاط.

نرسم المثلث المار بالنقط الثلاثة ثم نرسم محاور تماثل أضلاعه
نقطة تقاطع الأعمدة المقامة على أضلاع المثلث من منتصفها
تكون هي مركز الدائرة الخارجة للمثلث.

ملحوظة: أي ثلاث نقاط لا تنتمي لمستقيم واحد تمر بها دائرة واحدة

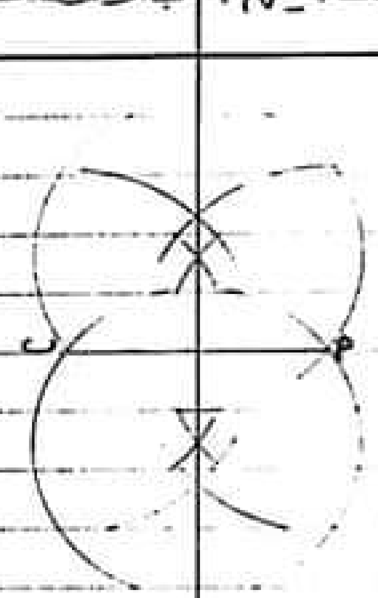
نتيجة: الأعمدة المقامة على أضلاع مثلث من منتصفاتها تتقاطع في نقطة واحدة هي مركز الدائرة الخارجة لهذا المثلث

○ باستخدام أدواتك الهندسية ارسم أب طولها ٤سم ثم ارسم على شكل واحد:

(أ) دائرة تمر بالنقطتين أ، ب وطول قطرها ٥سم، ما عدد الحلول الممكنة؟
(ب) دائرة تمر بالنقطتين أ، ب وطول نصف قطرها ٢سم. ما عدد الحلول؟
(جـ) دائرة تمر بالنقطتين أ، ب وطول قطرها ٣سم. ما عدد الحلول الممكنة؟

الحل

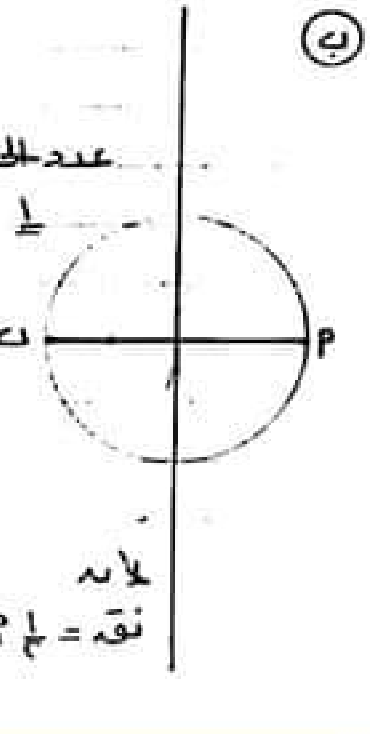
(أ)



عدد الحلول ٢

لأن
نق > $\frac{1}{2}$ أب

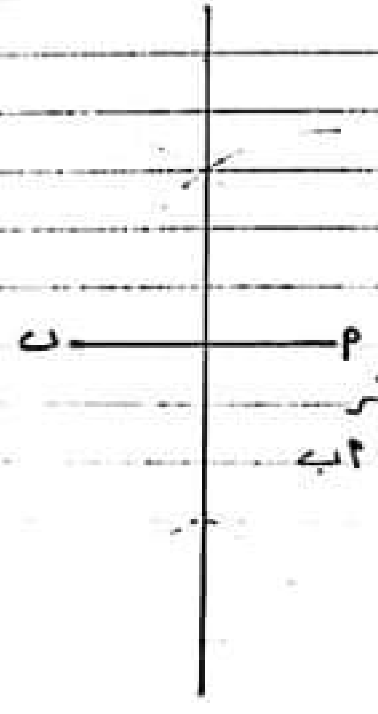
(ب)



عدد الحلول ١

لأن
نق = $\frac{1}{2}$ أب

(جـ)



عدد الحلول صفر

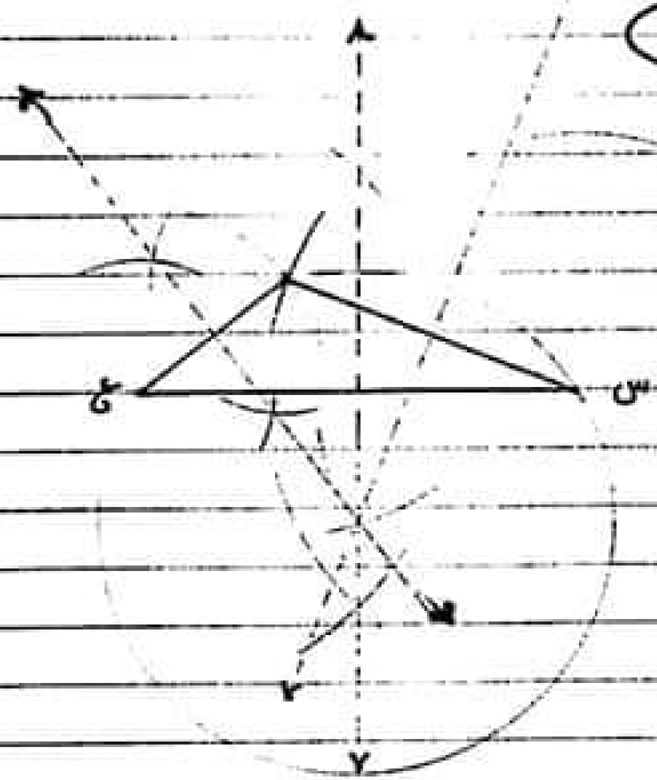
لأن نق < $\frac{1}{2}$ أب

○ ارسم المثلث س ص ع الذى فيه س ص = ٥ سم ، ص ع = ٣ سم ، ع س = ٧ سم ، ثم ارسم الدائرة الخارجية للمثلث س ص ع .

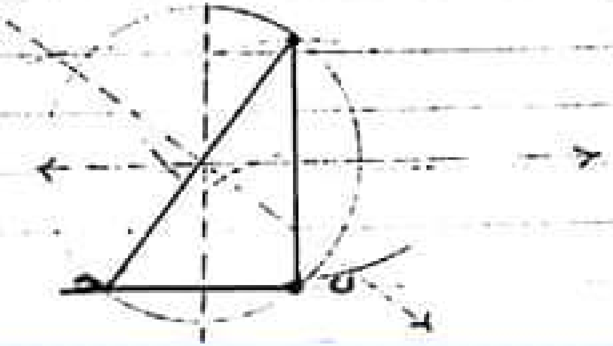
(أ) ما نوع المثلث س ص ع بالنسبة لقياسات زواياه ؟

(ب) أين يقع مركز الدائرة بالنسبة لهذا المثلث ؟

الحل :



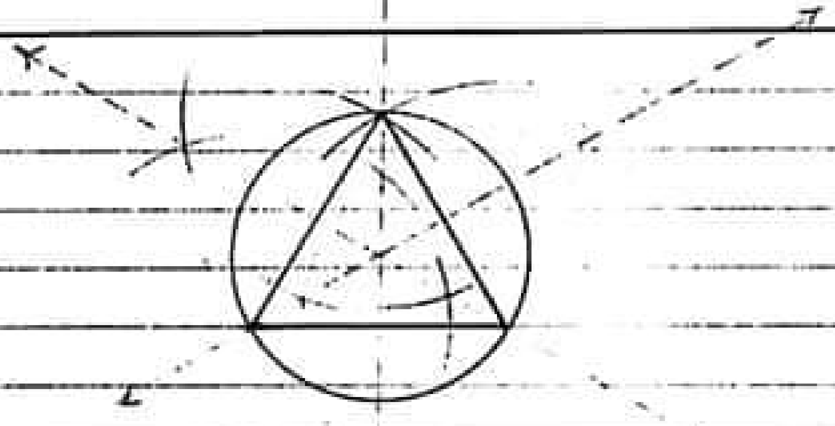
○ ارسم المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب حيث أ ب = ٤ سم ، ب جـ = ٣ سم ، ثم ارسم الدائرة الخارجية لهذا المثلث .



○ ارسم المثلث أ ب جـ المتساوى الأضلاع والذى طول ضلعه ٤ سم ، ارسم الدائرة الخارجية للمثلث أ ب جـ

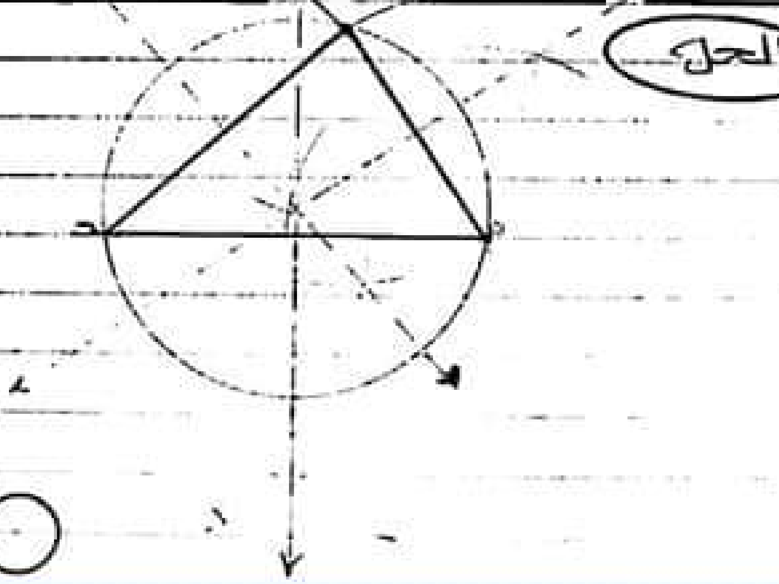
(أ) حدد موضع مركز الدائرة بالنسبة لكل : ارتفاعات المثلث - متوسطات المثلث - منصفات زوايا رؤوس المثلث

(ب) كم عدد محاور التماثل للمثلث المتساوى الأضلاع

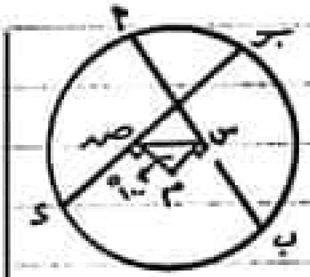


○ باستخدام الأدوات الهندسية ارسم المثلث أ ب جـ الذى فيه أ ب = ٤ سم ، ب جـ = ٥ سم ، جـ أ = ٦ سم ثم ارسم الدائرة المارة بالنقاط أ ، ب ، جـ ما نوع المثلث أ ب جـ بالنسبة لقياسات زواياه ؟ وأين تقع مركز الدائرة بالنسبة لزواياه

الحل :

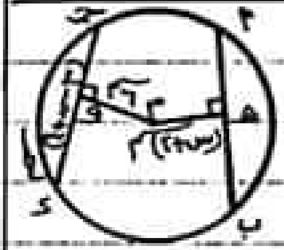


○ إذا كان:
أب = جـ ء
فأوجد
ق(∠م س ص)



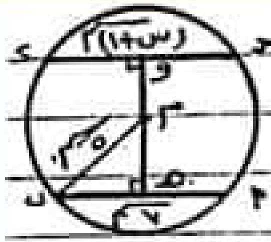
الحل: في △ م س ص
∵ ق(∠س م ص) = ١٠٠°
∴ ق(∠م ص س) + ق(∠م س ص) = ٨٠°
∵ م س ⊥ أب ، م ص ⊥ جـ ء
∵ أب = جـ ء
∴ م س = م ص
∴ ق(∠م س ص) = $\frac{٨٠}{٢}$ = ٤٠°

○ إذا كان:
أب = جـ ء
فأوجد كل من
قيمة س ، طول جـ ء



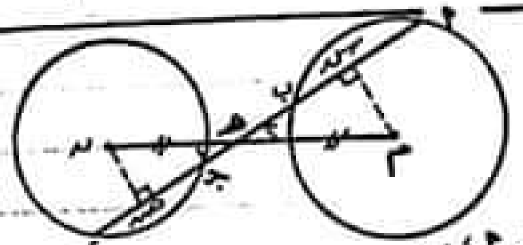
الحل: ∵ م هـ ⊥ أب
، م و ⊥ جـ ء ، أب = جـ ء
∴ م هـ = م و
∴ س+٢ = ٦ ∴ س = ٦ − ٢ = ٤ سم
طول جـ ء = ٣س + ٤
= ٣×٤ + ٤ = ١٦ سم

○ في الشكل المقابل
م و > م هـ أوجد
الفترة التي تنتمي إليها س.



الحل: ∵ م و > م هـ
∴ جـ ء < أب
∴ س+١ > ٦ ∴ س > ٦
∵ جـ ء ليس قطر في الدائرة م
∴ جـ ء ≤ ١٠
∴ س ≤ ٩ ∴ ٦ < س ≤ ٩
∴ س ∈]٦ ، ٩]

○ في الشكل المقابل:-
م ، ن دائرتان متطابقتان
متباعدتان ، هـ منتصف م ن
رسم $\overleftrightarrow{أهـ}$ يقطع الدائرة م في أ ، ب
ويقطع الدائرة ن في جـ ، ء . أثبت أن.
(أ) أب = جـ ء
(ب) هـ منتصف أء



البرهان: العمل: نرسم م س ⊥ أب ، ن ص ⊥ جـ ء
∵ م س ⊥ أب ∴ ق(∠م س هـ) = ٩٠°
∵ ن ص ⊥ جـ ء ∴ ق(∠ن ص هـ) = ٩٠°
∵ ق(∠١) = ق(∠٢) بالتقابل بالرأس.
∴ ق(∠م) = ق(∠ن)
∴ △△ م س هـ ، ن ص هـ فيهما
① ق(∠م) = ق(∠ن)
② ق(∠١) = ق(∠٢)
③ م هـ = هـ ن
∴ △ م س هـ ≡ △ ن ص هـ وينتج م س = ن ص (ابعاد متساوية)
∴ أب = جـ ء (المطلوب أولاً)
من تطابق △△ م س هـ ، ن ص هـ ينتج أن س هـ = ص هـ ← ①
، ∵ س منتصف أب ∴ أ س = ½ أب
∵ ص منتصف جـ ء ∴ ء ص = ½ جـ ء
∴ أ س = ء ص ← (٢) بجمع (١) ، (٢)
∴ أهـ = هـ ء ⟸ ##

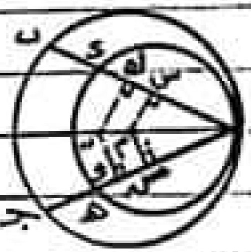
○ م ، ن دائرتان متماستان من الداخل في أ ، رسم أب ، أجـ وتران متساويان في الطول في الدائرة الكبرى فقطعا الدائرة الصغرى في ء ، هـ على الترتيب . أثبت أن : أء = أهـ

البرهان

العمل : نرسم م س ⊥ أء

، م ص ⊥ أهـ في الدائرة م

، ن ل ⊥ أب ، ن و ⊥ أجـ في الدائرة الكبرى ن



في الدائرة الكبرى

∵ ن ل ⊥ أب ، ن و ⊥ أجـ ، أب = أجـ ∴ ن ل = ن و

∵ △△ أ ل ن ، أ و ن

فيهما
① ن ل = ن و
② أ ن ضلع مشترك
③ ق(∠أ و ن) = ق(∠أ ل ن) = ٩٠°

∴ △ أ ل ن ≡ △ أ و ن وينتج أن ق(∠ن أ ل) = ق(∠ن أ و)

∵ △△ أ س م ، أ ص م

فيهما
① أ م ضلع مشترك
② ق(∠أ س م) = ق(∠أ ص م) = ٩٠°
③ ق(∠س أ م) = ق(∠ص أ م)

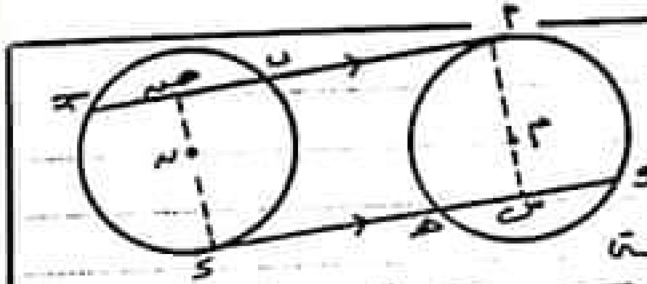
∴ △ أ س م ≡ △ أ ص م وينتج أن أ س = أ ص

∴ أء = أهـ ⇐ ✳

○ في الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متطابقتان ، أجـ قطعة مماسة للدائرة م عند أ ، ءو قطعة مماسة للدائرة ن عند ء ، أجـ // وء . أثبت أن :

أولاً : ب جـ = و هـ ثانياً : أ ب = هـ ء



البرهان

العمل : نرسم أ س ، ء ص

∵ أجـ مماس للدائرة م عند أ ∴ م أ ⊥ أ ب

، ∵ أجـ // وء ∴ ق(∠أ س هـ) = ٩٠°

بالمثل ∵ وء مماس للدائرة ن عند ء ∴ ن ء ⊥ ء و

∵ أجـ // وء ∴ ق(∠ء ص ب) = ٩٠°

∴ أ س ء ص مستطيل ∴ أ س = ء ص

∵ م ، ن دائرتان متطابقتان ∴ م أ = ن ء

∴ م س = ن ص ، ∵ م س ⊥ و هـ ، ن ص ⊥ ب جـ

∴ و هـ = ب جـ ← (المطلوب أولاً) ← (١)

، ∵ م س ⊥ و هـ ∴ س منتصف و هـ

، ∵ ن ص ⊥ ب جـ ∴ ص منتصف ب جـ

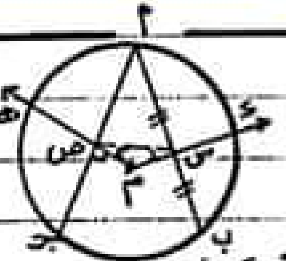
∴ و هـ = ب جـ ∴ ب ص = س هـ ← (٢)

بطرح (٢) من (١) ∴ أ ص − ب ص = س ء − س هـ

∴ أ ب = ء هـ

كلمتان خفيفتان على اللسان ثقيلتان في الميزان حبيبتان للرحمن

سبحان الله وبحمده ... سبحان الله العظيم



في الشكل المقابل: أب ، أجـ وتران متساويان في الطول في الدائرة م ، س منتصف أب ، م س يقطع الدائرة في ء ، م ص ⊥ أجـ يقطعه في ص ويقطع الدائرة في هـ

اثبت أن: أولاً: س ء = ص هـ

ثانياً: ق(ص س ب) = ق(س ص جـ)

البرهان ∵ س منتصف أب ∴ م س ⊥ أب

∵ أب = أجـ ، م س ⊥ أب ، م ص ⊥ أجـ

∴ م س = م ص (الأبعاد متساوية) ←(١)

∵ م ء = م هـ = نق (انصاف أقطار) ←(٢)

بطرح (١) من (٢) ∴ م ء − م س = م هـ − م ص

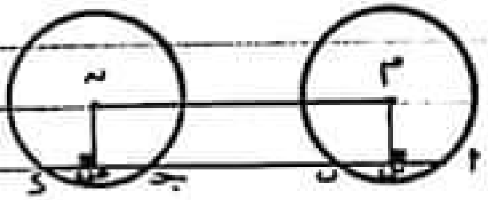
∴ س ء = ص هـ (المطلوب أولاً)

في △ م س ص ∵ م س = م ص

∴ ق(ص س م) = ق(س ص م) ←(١)

∵ م س ⊥ أب ، م ص ⊥ أجـ ∴ ق(م س ب) = ق(م ص جـ) ←(٢)

بجمع (١) ، (٢) ∴ ق(ص س ب) = ق(س ص جـ)



في الشكل المقابل:

م ، ن دائرتين متطابقتين

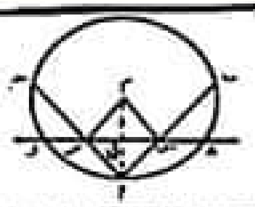
أب = جـ ء اثبت أن الشكل

م س ص ن مستطيل

البرهان ∵ م س ⊥ أب ، ن ص ⊥ جـ ء ، أب = جـ ء

∴ م س = ن ص ، ∵ م س // ن ص

∴ الشكل م س ص ن مستطيل



في الشكل المقابل ،

أب ، أجـ وتران متساويان في الطول في الدائرة م . س ، ص منتصفا أب ، أجـ

رسم س ص فقطع الدائرة في هـ ، و اثبت ان س هـ = ص و .

البرهان ∵ س منتصف أب ∴ م س ⊥ أب ∴ ق(م س ص) = ٩٠°

∵ ص منتصف أجـ ∴ م ص ⊥ أجـ ∴ ق(م ص أ) = ٩٠°

∵ أب = أجـ ∴ م س = م ص

∴ الشكل أ س م ص مربع ∴ م ل ⊥ س ص (القطران متعامدان)

∵ م ل ⊥ س ص ∴ ل س = ل ص ←(١)

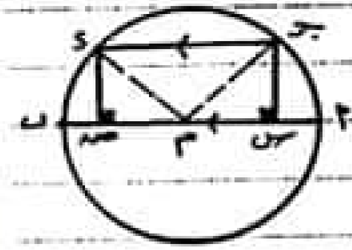
∵ م ل ⊥ هـ و ∴ ل هـ = ل و ←(٢)

بطرح (١) من (٢) ∴ س هـ = ص و .

أب قطر في دائرة م ، رسم الوتر جـ ء // أب ، رسم جـ س ⊥ أب ، ء ص ⊥ أب . اثبت أن: أ س = ص ب

البرهان العمل: نرسم م جـ ، م ء

∵ جـ ء // ...



∵ جـ س ⊥ أب ، ء ص ⊥ أب

∴ الشكل جـ س ص ء مستطيل

∴ جـ س = ء ص

∵ △△ جـ م س ، ء م ص فيهما ① جـ س = ء ص

② جـ م = ء م

③ ق(جـ س م) = ق(ء ص م) = ٩٠°

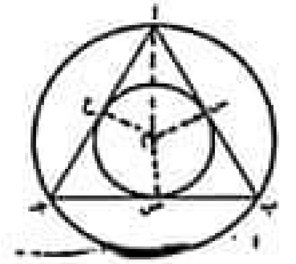
∴ △ جـ م س ≡ △ ء م ص وينتج أن م س = م ص ←(١)

∵ م أ = م ب (انصاف أقطار) ←(٢)

بطرح (١) من (٢) ∴ م أ − م س = م ب − م ص

∴ أ س = ص ب .

في الشكل المقابل:
دائرتان متحدتا المركز م طولا نصفى قطريهما ٤سم، ٢سم، رسم المثلث أ ب جـ بحيث تقع رؤوسه على الدائرة الكبرى وتمس أضلاعه الدائرة الصغرى في س، ص، ع.
اثبت ان: المثلث أ ب جـ متساوى الأضلاع وأوجد مساحته.



البرهان العمل: نصل $\overline{\text{م س}}$ ، $\overline{\text{م ص}}$ ، $\overline{\text{م ع}}$

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ قطع مماسة للدائرة الصغرى

∴ $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{م ع}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$

∵ م س = م ص = م ع = نق ∴ أ ب = ب جـ = أ جـ

∴ △ أ ب جـ متساوى الأضلاع

∵ م ص = نق (الدائرة الصغرى) = ٢ سم ، م أ = نق (الكبرى) = ٤ سم

∴ أ ص = ٦ سم ، ∵ ق(∠ ب) = ٦٠° ∴ ظا ٦٠ = $\frac{\text{أ ص}}{\text{ب ص}}$

$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{6}{\text{ب ص}}$ ⟸ ب ص = $\frac{6}{\sqrt{3}}$ = ٢$\sqrt{3}$

∴ ب جـ = ٢ × ب ص = ٢ × ٢$\sqrt{3}$ = ٤$\sqrt{3}$ سم

مساحة △ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ × ب جـ × أ ص = $\frac{1}{2}$ × ٤$\sqrt{3}$ × ٦ = ١٢$\sqrt{3}$ سم^2

اولا: إكمل ما يالى

(١) القطعة المستقيمة التى طرفاها مركز الدائرة واى نقطة على الدائرة تسمى ....

(٢) القطعة المستقيمة التى طرفاها اى نقطتين على الدائرة تسمى ....

(٣) الوتر المار بمركز الدائرة يسمى ....

(٤) اكبر الأوتار طولا فى الدائرة يسمى ....

(٥) يوجد فى الدائرة عدد .... من محاور التماثل .

(٦) المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أى وتر فيها يكون ....

(٧) المستقيم المار بمركز الدائرة عموديا على اى وتر فيها فإنه ....

(٨) المستقيم العمودى على أى وتر فى الدائرة من منتصفه يكون .... للدائرة

(٩) الدائرة تقسم المستوى إلى .... مجموعات من النقط .

(١٠) المماس للدائرة يكون عموديا على نصف القطر المرسوم من ....

(١١) المستقيم العمودى على قطر الدائرة من إحدى نهايته يكون ....

---

(١٢) المماسان لدائرة عند نهايتى قطر فيها يكونان ....

(١٣) الأوتار المتساوية فى الطول فى دائرة تكون على ابعاد متساوية من ....

(١٤) إذا كانت الأوتار فى دائرة على ابعاد متساوية من المركز فإنها تكون ....

(١٥) إذا كانت أ تقع خارج الدائرة م التى نصف قطرها نق فإن م أ .... نق

(١٦) دائرة طول نصف قطرها ٨ سم ، فإذا كان المستقيم ل يبعد عن مركزها ٤ سم فإن المستقيم ل يكون ....

(١٧) خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون .... ، ....

(١٨) إذا كان سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = ∅ فإن الدائرتين م ، ن ....

(١٩) إذا كانت الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅ ، سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة م فإن الدائرتين م ، ن ....

(٢٠) إذا كان سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = {أ} ، فإن الدائرتين م ، ن ....

(٢١) إذا كانت الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ} ، سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن فإن الدائرتين م ، ن ....

(٢٢) إذا كانت الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ ، ب} ، فإن الدائرتين م ، ن ....

(٢٣) عدد الدوائر التي تمر بثلاث نقط لا تنتمي لمستقيم واحد يساوي ....

(٢٤) عدد الدوائر التي يمكن رسمها بنقطة معلومة في المستوى يساوي ....

(٢٥) عدد الدوائر التي يمكن رسمها وتمر بنقطتين معلومتين في المستوى يساوي ....

(٢٦) إذا اشتركت دائرتان في ثلاث نقط فإنهما ....

(٢٧) جميع الدوائر التي تمر بالنقطتين أ ، ب تكون مراكزها جميعا تقع على ....

(٢٨) تتقاطع الدائرتان في ....

(٢٩) أصغر دائرة يمكن رسمها لتمر بنقطتين معلومتين في المستوى يكون طول نصف قطرها يساوي ....

(٣٠) الأعمدة المقامة على أضلاع مثلث من منتصفاتها تتقاطع في نقطة واحدة هي ......

(٣١) نقطة تقاطع محاور تماثل أضلاع المثلث هي ....

(٣٢) الدائرة م طول نصف قطرها نق ، أ نقطة في مستوى الدائرة . أكمل :

(أ) إذا كانت م أ = $\frac{١}{٢}$ نق فإن أ .... الدائرة

(ب) إذا كانت م أ = نق فإن أ .... الدائرة

(جـ) إذا كانت م أ = ٣ نق فإن أ .... الدائرة

ثانيا : إختر من المجموعة (س) ما يناسبها من المجموعة (ص)

دائرتان طولا نصفي قطريها ٨ سم ، ٦ سم .

المجموعة (س)	المجموعة (ص)
(١) إذا كان م ن = ١ سم	(أ) الدائرتان م ، ن متقاطعتان
(٢) إذا كان م ن = ٢ سم	(ب) الدائرتان م ، ن متباعدتان
(٣) إذا كان م ن = ٧ سم	(جـ) الدائرتان م ، ن متماستان من الخارج
(٤) إذا كان م ن = ١٤ سم	(د) الدائرتان م ، ن داخلتان
(٥) إذا كان م ن = ١٥ سم	(هـ) الدائرتان م ، ن متماستان من الداخل

ثالثا : إختر الإجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(١) إذا كان طول قطر دائرة ٧ سم ، المستقيم ل يبعد عن مركزها ٣.٥ سم فإن ل يكون :

أ) قاطع للدائرة في نقطتين ب) يقع خارج الدائرة
جـ) مماس للدائرة د) محور تماثل للدائرة

(٢) إذا كانت النقطة أ تنتمي للدائرة م التي قطرها ٦ سم فإن م أ تساوي :

أ) ٣ سم ب) ٤ سم جـ) ٥ سم د) ٦ سم

(٣) إذا كان المستقيم ل مماسا للدائرة التي قطرها ٨ سم فإنه يبعد عن مركزها بمقدار :

أ) ٣ سم ب) ٤ سم جـ) ٦ سم د) ٨ سم

(٤) إذا كان ل مستقيم خارج دائرة مركزها نقطة الأصل م (٠ ، ٠) ونصف قطرها ٣ سم وكان ل يبعد عن م مسافة س فإن س ∈ ....

أ)]٣ ، ∞[ب) [٣ ، ∞[جـ) [٦ ، ∞[د)]-∞ ، -٦]

(٥) إذا كان المستقيم ل يبعد عن مركز الدائرة م مسافة س حيث س ∈]٠ ، نق[فإن ل

أ) يقطع الدائرة ب) يمس الدائرة
جـ) يقع خارج الدائرة د) يمر بمركز الدائرة

(٦) إذا كان طول العمود المرسوم من مركز الدائرة م على المستقيم ل يساوي ٦ سم ، وكان طول نصف قطر الدائرة يساوي ٣ سم فإن ل :

أ) يقطع الدائرة ب) يمس الدائرة
جـ) يقع خارج الدائرة د) يمر بمركز الدائرة

(٧) دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٧ سم . أي من النقط الآتية لا تنتمي للدائرة ؟

أ) (٠ ، ٧) ب) (٠ ، -٧) جـ) (٧ ، ٠) د) (٧ ، ٧)

(٨) إذا كانت سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = {أ} فإن الدائرتين م ، ن :

(أ) متباعدتان (ب) متماستان من الداخل
(جـ) متماستان من الخارج (د) متقاطعتان

(٩) عدد الدوائر التي يمكن رسمها وتمر بالقطعة المستقيمة $\overline{أب}$ يساوي :

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (جـ) عدد لا نهائي

(١٠) إذا كانت الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ ، ب} فإن الدائرتين م ، ن :
(أ) متباعدتان (ب) متحدتا المركز
(جـ) متماستان من الخارج (د) متقاطعتان

(١١) إذا كانت الدائرتان م ، ن متماستان من الخارج وطول نصف قطر أحدهما ٥ سم ، م ن = ٩ سم ، فإن طول نصف قطر الأخرى يساوى :
(أ) ٣ سم (ب) ٤ سم (جـ) ٧ سم (د) ١٤ سم

(١٢) إذا كانت الدائرتان م ، ن متماستان من الداخل وطول نصف قطر أحدهما ٣ سم ، م ن = ٨ سم ، فإن طول نصف قطر الأخرى يساوى :
(أ) ٥ سم (ب) ٦ سم (جـ) ١١ سم (د) ١٢ سم

(١٣) م ، ن دائرتان متقاطعتان وطولا نصفي قطريهما ٥ سم ، ٢ سم فإن م ن ∋ ...
(أ) [٣ ، ٧] (ب) [٣ ، ٧[(جـ)]٣ ، ٧] (د)]٣ ، ٧[

(١٤) عدد الدوائر التى تمر بثلاث نقط على استقامة واحدة يساوى :
(أ) صفر (ب) واحد (جـ) ثلاث (د) عدد لا نهائى

(١٥) محور التماثل للوتر المشترك $\overline{\text{أ ب}}$ للدائرتين متقاطعتين م ، ن هو :
(أ) $\overleftrightarrow{\text{م أ}}$ (ب) $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ (جـ) $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ (جـ) $\overleftrightarrow{\text{ن أ}}$

(١٦) مراكز الدوائر التى تمر بالنقطتين أ ، ب تقع جميعا على :
(أ) محور $\overline{\text{أ ب}}$ (ب) $\overline{\text{أ ب}}$
(جـ) العمود المقام على $\overline{\text{أ ب}}$ (د) العمود المقام على $\overline{\text{أ ب}}$ من ب

(١٧) عدد الدوائر التى تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة :
(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(١٨) مركز الدائرة الخارجة للمثلث هو نقطة تقاطع :
(أ) منصفات زواياه الداخلة (ب) منصفات زواياه الخارجة
(جـ) ارتفاعاته (د) محاور تماثل أضلاعه

(١٩) إذا كان أ ، ب نقطتان فى المستوى بحيث أ ب = ٤ سم ، فإن طول نصف قطر أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب تساوى :
(أ) ٢ سم (ب) ٣ سم (جـ) ٤ سم (د) ٨ سم

(٢٠) إذا كان أ ، ب نقطتان ، أ ب = ٦ سم فإن عدد الدوائر التى طول نصف قطر كل منها ٥ سم وتمر بالنقطتين أ ، ب يساوى :
(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى من الدوائر

الإجابات

أولاً :
① نصف قطر
② وتر
③ قطر
④ قطر
⑤ عدد لا نهائى
⑥ عمودياً على هذا الوتر
⑦ ينصف هذا الوتر
⑧ ماراً بمركز الدائرة
⑨ ثلاث
⑩ نقطة التماس .
⑪ مماساً
⑫ متوازيان
⑬ من المركز
⑭ متساوية فى الطول
⑮ ٢٣ > نق
⑯ قاطع
⑰ عمودياً على الوتر المشترك وينصفه
⑱ متباعدتان
⑲ متداخلتان
⑳ متماستان من الخارج
㉑ متماستان من الداخل
㉒ متقاطعتان
㉓ ل
㉔ عدد لا نهائى
㉕ عدد لا نهائى
㉖ منطبقتان
㉗ محور $\overline{\text{أ ب}}$
㉘ نقطتين
㉙ ل المحدد بالنقطتين
㉚ مركز الدائرة الداخلة
㉛ مركز الدائرة الخارجة
㉜ (أ) داخل
(ب) على
(جـ) خارج

ثانياً
① ء
② هـ
③ أ
④ جـ
⑤ ب

ثالثاً
① مماس للدائرة .
② ٣ سم
③ ٤ سم
④]٣ ، ∞[
⑤ تقطع الدائرة
⑥ تقع خارج الدائرة
⑦ (٧ ، ٧)
⑧ متماستان من الخارج
⑨ عدد لا نهائى

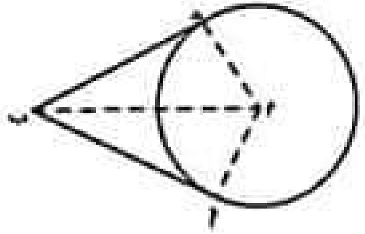
⑩ متقاطعتان
⑪ ٤ سم
⑫ ١١ سم
⑬]٣ ، ٧[
⑭ صفر
⑮ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$
⑯ محور $\overline{\text{أ ب}}$
⑰ ١
⑱ محاور تماثل أضلاعه
⑲ ٢ سم
⑳ ٢

العلاقة بين مماسات الدائرة

لاحظ : المماسان المرسومان من نهايتى قطر في دائرة يكونان متوازيان.

نظرية (٤)

القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج دائرة متساويتان فى الطول



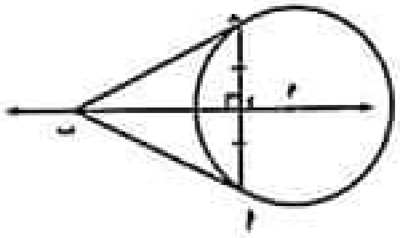
ب ج ، ب ﺃ قطعتان مماستان للدائرة عند ب

يكون : ب ج = ب ﺃ

نتائج هامة

نتيجة (١)

المستقيم المار بمركز الدائرة ونقطة تقاطع مماسين لها يكون محوراً لوتر التماس لهذين المماسين



ب ج ، ب ﺃ مماسان للدائرة عند م عند ﺃ ، ج

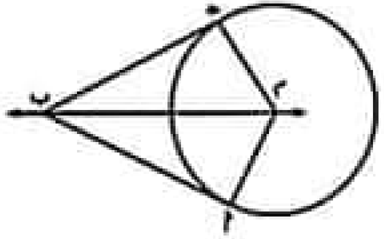
على الترتيب ، فإن ب م محور ب ج

أى أن: ب م ⊥ ﺃ ج ، ج ء = ﺃ ء

مركز الدائرة الداخلة للمثلث هى نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة

نتيجة (٢)

المستقيم المار بمركز الدائرة ونقطة تقاطع مماسين لها ينصف الزاوية بين هذين المماسين كما ينصف الزاوية بين نصفى القطرين المارين بنقطتى التماس



ب ج ، ب ﺃ مماسان للدائرة م عند ﺃ ، ج على الترتيب

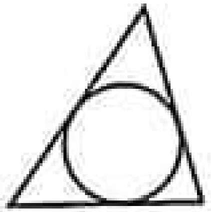
ب م ينصف (∠ ﺃ ب ج)

∴ ق (∠ ج ب م) = ق (∠ ﺃ ب م)

ب م ينصف (∠ ﺃ م ج)

∴ ق (∠ ﺃ م ب) = ق (∠ ﺃ ب م)

الدائرة الداخلة للمثلث



هى الدائرة التى تمس أضلاعه.

ملاحظات هامة:

(١) عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين هو ٤

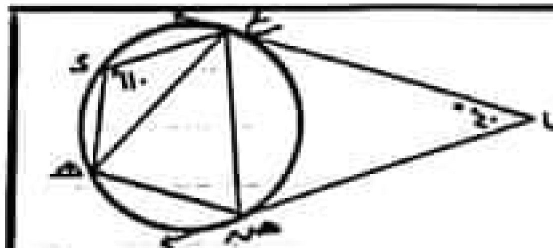
(٢) عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الخارج هو ٣

(٣) عدد المماسات المشتركة لدائرتين متقاطعتين هو ٢

(٤) عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الداخل هو ١

(٥) لا يوجد مماسات مشتركة لدائرتين متداخلتين

مثال

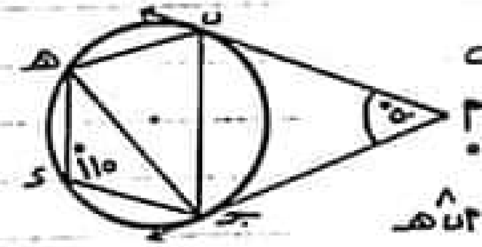


في الشكل المقابل:-
سص ، سع مماسان للدائرة من نقطة س.
، ق(ء̂) = ١١٠° أثبت أن:-
ق(عه⌒) = ق(عص⌒)

الحل

∵ سص ، سع مماسان
∴ س ص = س ع ∴ ق(س ع̂ ص) = ق(س ص̂ ع)
= $\frac{١٨٠^\circ - ٤٠^\circ}{٢}$ = ٧٠°
∵ ع ص هـ ء رباعي دائري
∴ ق(ع ص̂ هـ) = ١٨٠° − ١١٠° = ٧٠°
∴ ق(س ع̂ ص) = ق(ع ص̂ هـ) = ٧٠°
∴ ق(عص⌒) = ق(عه⌒) = ١٤٠°

مثال

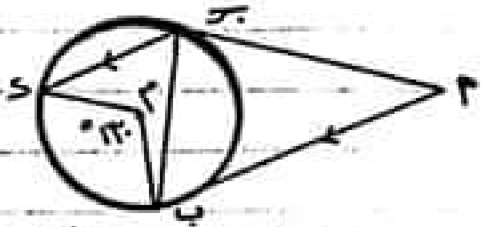


في الشكل المقابل:-
أب ، أجـ قطعتان مماستان للدائرة عند ب ، جـ
، ق(أ̂) = ٥٠° ، ق(جـ ء̂ هـ) = ١١٠°
أثبت أن:- أولاً:- بجـ ينصف ∠أ ب هـ
ثانياً:- جـ ب = جـ هـ

البرهان

∵ أب ، أجـ قطعتان مماستان
∴ أب = أجـ ∴ ق(أ ب̂ جـ) = ق(أ جـ̂ ب) = $\frac{١٨٠^\circ - ٥٠^\circ}{٢}$ = ٦٠°
∵ ب جـ ء هـ رباعي دائري
∴ ق(جـ ب̂ هـ) = ١٨٠° − ١١٥° = ٦٥°
∴ ق(أ ب̂ جـ) = ق(هـ ب̂ جـ) = ٦٠° ∴ بجـ ينصف ∠أ ب هـ
∵ ق(ب هـ̂ جـ) = ق(أ ب̂ جـ) ، ٦٥° مماسية ومحيطية
∴ ق(جـ ب̂ هـ) = ق(ب هـ̂ جـ) = ٦٥° ∴ ب جـ = جـ هـ

مثال

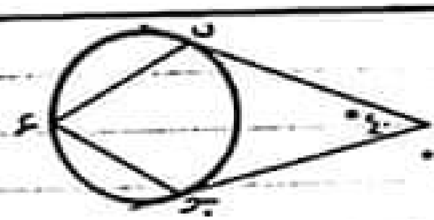


في الشكل المقابل:-
أب ، أجـ قطعتان مماستان للدائرة م ، أب // جـء
، ق(ب م̂ ء) = ١٣٠°
(أ) أثبت أن: جـب ينصف ∠أ جـ ء (ب) أوجد ق(أ̂)

البرهان

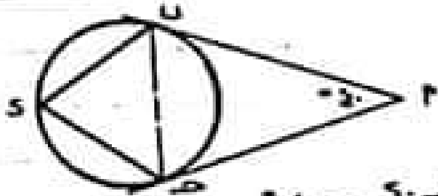
∵ ق(ب جـ̂ ء) = ½ ق(ب م̂ ء) = ½ × ١٣٠° = ٦٥°
(محيطية ومركزية مشتركتان في بء⌒)
∵ أب // جـء ∴ ق(أ ب̂ جـ) = ق(ب جـ̂ ء) = ٦٥° بالتبادل
∵ أب ، أجـ قطعتان مماستان
∴ أب = أجـ ، ق(أ جـ̂ ب) = ق(أ ب̂ جـ) = ٦٥°
∴ ق(أ جـ̂ ب) = ق(ء جـ̂ ب) = ٦٥°
∴ جـب ينصف ∠أ جـ ء
∵ مجموع قياسات زوايا △ = ١٨٠°
∴ ق(أ̂) = ١٨٠° − (٦٥° + ٦٥°) = ١٨٠° − ١٣٠° = ٥٠°

مثال

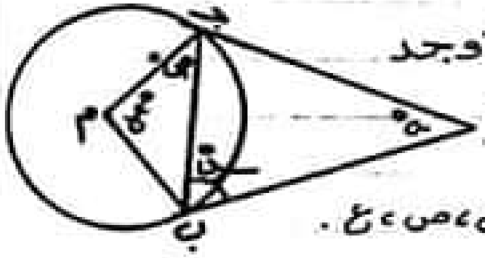


في الشكل المقابل:-
أب ، أجـ قطعتان مماستان للدائرة عند ب ، جـ ، ق(أ̂) = ٤٠°
أوجد بالبرهان: ق(ء̂)

الحل



العمل: نرسم بجـ
البرهان: ∵ أب ، أجـ قطعتان مماستان
∴ أب = أجـ
∴ ق(أ ب̂ جـ) = ق(أ جـ̂ ب) = $\frac{١٨٠ - ٤٠}{٢}$ = ٧٠°
∴ ق(ء̂) = ق(أ ب̂ جـ) = ٧٠°
(محيطية ومماسية مشتركتان بجـ⌒)



أوجد قيم س، ص، ع.

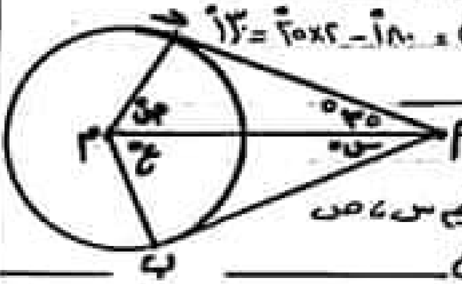
الحل: ∵ جـ أ، أ ب قطعتان مماستان

∴ أ ب = أ جـ ∴ س = (١٨٠° − ٥٠°)/٢ = ٦٥°

∵ م جـ ⊥ أ جـ ∴ ق(∠أ جـ م) = ٩٠°

∴ ص = ٩٠° − ٦٥° = ٢٥°

∴ ق(م̂) = ١٨٠° − ٢ × ٢٥° = ١٣٠°



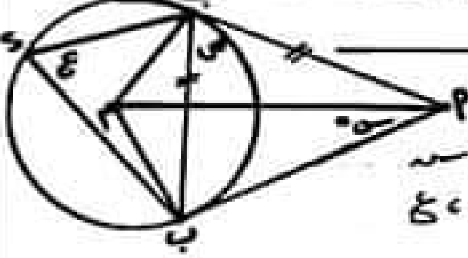
أوجد قيم س، ص، ع

الحل: ∵ أ جـ، أ ب قطعتان مماستان

س = ٣٥° م ب ⊥ أ ب ∴ ق(ب̂) = ٩٠°

∴ ع = ١٨٠° − [٩٠° + ٣٥°] = ٥٥°

ص = ع = ٥٥°



أوجد س، ص، ع

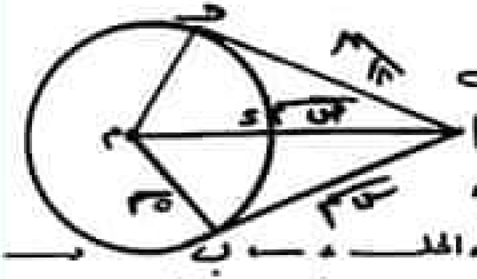
الحل: ∵ أ ب = أ جـ قطعتان مماستان

∴ أ جـ = جـ ب معطى

∴ △ أ ب جـ متساوي الأضلاع

∴ ص = ٦٠° ، س = ٦٠/٢ = ٣٠°

ق(ع̂) = ع = ٦٠°



أوجد قيمتي س، ص

الحل:

∵ أ ب = أ جـ قطعتان مماستان

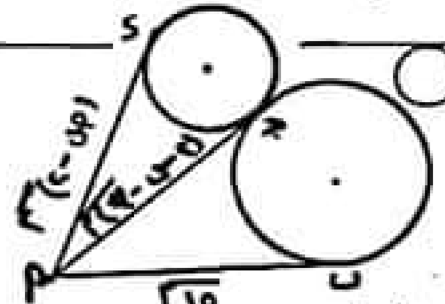
∴ س = ١٢ سم

∵ م ب ⊥ أ ب ∴ ق(ب̂) = ٩٠°

∴ (أ م)² = (أ ب)² + (م ب)²

(أ م)² = (١٢)² + (٥)² = ١٤٤ + ٢٥

(أ م)² = ١٦٩ ∴ أ م = ص = ١٣ سم



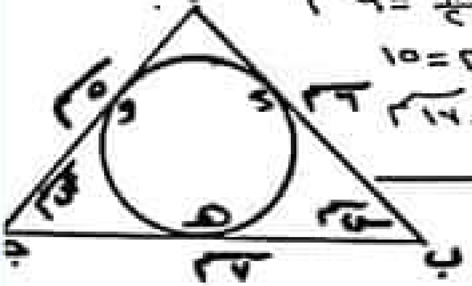
الحل: أ د = أ جـ

٢س − ٣ = ١٥ ⟸ ٢س = ١٨

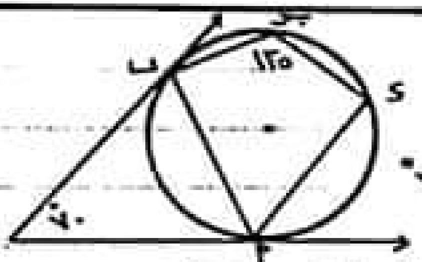
س = ١٨/٢ = ٩ سم

ص − ٢ = ١٥

ص = ١٧ سم



مثال



في الشكل المقابل:

س أ، س ب مماسان للدائرة

عند أ، ب، ق(أ س̂ ب) = ٧٠°

، ق(د جـ̂ ب) = ١٢٥° أثبت أن:

أولاً: أ ب ينصف ∠د أ س ثانياً: أ د // س ب

الحل

البرهان: ∵ س أ، س ب قطعتان مماستان

∴ أ س = ب س

∴ ق(س أ̂ ب) = ق(س ب̂ أ) = (١٨٠° − ٧٠°)/٢ = ٥٥° ⟵ (١)

∵ الشكل أ ب جـ د رباعي دائري

∴ ق(د أ̂ ب) = ١٨٠° − ١٢٥° = ٥٥° ⟵ (٢)

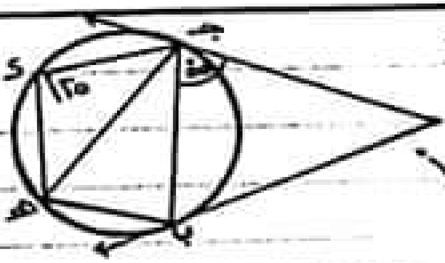
من (١)، (٢) ق(د أ̂ ب) = ق(س أ̂ ب) = ٥٥°

∴ أ ب ينصف ∠د أ س (المطلوب أولاً)

، ∵ ق(د أ̂ ب) = ق(س ب̂ أ) = ٥٥° وهما في وضع تبادل

∴ أ د // س ب (المطلوب ثانياً)

مثال



في الشكل المقابل: إذا كان أ ب، أ جـ

مماسين للدائرة عند ب، جـ أ

ق(أ جـ̂ ب) = ٥٥°، ق(جـ د̂ هـ) = ١٢٥°

أثبت أن: أولاً: أ جـ // ب هـ

ثانياً: أوجد ق(أ̂) ثالثاً: جـ ب = جـ هـ

البرهان

∵ الشكل جـ ب هـ د رباعي دائري

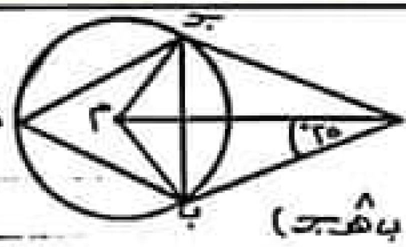
∴ ق(هـ ب̂ جـ) = ١٨٠° − ١٢٥° = ٥٥° ، ∵ ق(أ جـ̂ ب) = ٥٥°

∴ ق(أ جـ̂ ب) = ق(هـ ب̂ جـ) = ٥٥° وهما في وضع تبادل ∴ أ جـ // ب هـ

، ∵ أ جـ، أ ب قطعتان مماستان ∴ أ جـ = أ ب ∴ ق(أ̂) = ١٨٠° − (٥٥° + ٥٥°) = ٧٠°

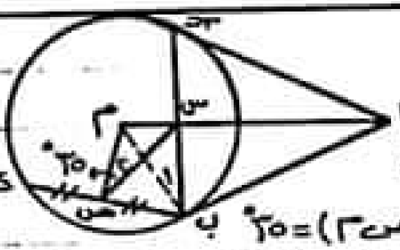
∵ ق(هـ جـ̂ ب) = ق(أ جـ̂ ب) = ٥٥° مماسية ومحيطية ∴ ق(هـ جـ̂ ب) = ق(جـ هـ̂ ب)

∴ جـ ب = جـ هـ .



○ في الشكل المقابل :-
أب ، أجـ قطعتان مماستان للدائرة م .
ق (∠ب أ م) = ٢٥° ، هـ ∈ ب جـ الأكبر
اوجد ، أولاً : ق (∠أ جـ ب) ثانياً : ق (∠ب هـ جـ)

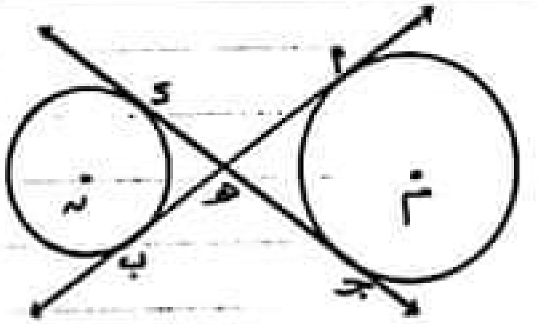
البرهان ∵ أب ، أجـ قطعتان مماستان للدائرة م
∴ أم ينصف ∠ب أ جـ ∴ ق (∠جـ أ ب) = ٢ × ٢٥ = ٥٠°
∵ أب = أجـ ∴ ق (∠أ جـ ب) = $\frac{١٨٠° - ٥٠°}{٢}$ = ٦٥°
∵ أجـ مماس ∴ م جـ ⊥ أجـ ∴ ق (∠أ جـ م) = ٩٠°
∵ أب مماس ∴ م ب ⊥ أب ∴ ق (∠أ ب م) = ٩٠°
∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعي = ٣٦٠°
∴ ق (∠جـ م ب) = ٣٦٠° − [٩٠° + ٩٠° + ٥٠°] = ٣٦٠° − ٢٣٠° = ١٣٠°
∴ ق (∠ب هـ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق (∠جـ م ب) = $\frac{1}{2}$ × ١٣٠° = ٦٥°
محيطية ومماسية مشتركتان في ب جـ .



○ في الشكل المقابل :-
أب ، أجـ قطعتان مماستان للدائرة م
عند ب ، جـ ، أم ∩ ب جـ = {س} ،
ص منتصف الوتر ب د ، ق (∠س ص م) = ٣٥°
(أ) أثبت أن : الشكل س ب ص م رباعي دائري (ب) أوجد ق (∠أ)

البرهان ∵ أب ، أجـ قطعتان مماستان للدائرة م ∴ أم محور ب جـ
∴ ق (∠ب س م) = ٩٠° ← (١)
∵ ص منتصف ب د ∴ ق (∠ب ص م) = ٩٠° ← (٢)
من (١) ، (٢) ق (∠ب س م) + ق (∠ب ص م) = ١٨٠° ∴ الشكل س ب ص م رباعي دائري
• نرسم م ب ∴ الشكل س ب ص م رباعي دائري
∴ ق (∠١) = ق (∠٢) = ٣٥° ∵ أب مماس ∴ م ب ⊥ أب ∴ ق (∠أ ب م) = ٩٠°
∴ ق (∠أ ب جـ) = ٩٠° − ٣٥° = ٥٥° ∵ أب = أجـ ∴ ق (∠أ) = ١٨٠° − (٢×٥٥)°
= ٧٠°

① في الشكل المقابل:
اثبت أن: أب = جـ د



البرهان ∵ $\overline{هـأ}$ ، $\overline{هـجـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م

∴ هـأ = هـجـ ← (١)

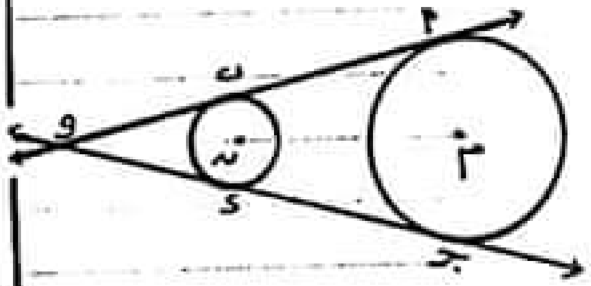
∵ $\overline{هـب}$ ، $\overline{هـد}$ قطعتان مماستان للدائرة ن

∴ هـب = هـد ← (٢)

بجمع (١)، (٢) ∴ هـأ + هـب = هـجـ + هـد

∴ أب = جـ د ⇐ ※

○ في الشكل المقابل
اثبت أن: أب = جـ د



البرهان ∵ $\overline{ود}$ ، $\overline{وب}$ قطعتان مماستان للدائرة ن

∴ وب = ود ← (١)

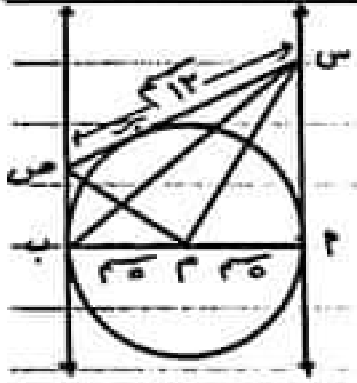
∵ $\overline{وجـ}$ ، $\overline{وأ}$ قطعتان مماستان للدائرة م

∴ وأ = وجـ ← (٢)

بطرح (١) من (٢) ∴ وأ − وب = وجـ − ود

∴ أب = جـ د .

○ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م ، أب = ١٠ سم ، جـ ∈ للدائرة م ،
رسم مماس للدائرة عند جـ فقطع المماسين المرسومين
لها عند أ ، ب في س ، ص على الترتيب حيث س ص = ١٣ سم
ⓐ اثبت أن: $\overline{سم} \perp \overline{صم}$ ⓑ أوجد مساحة الشكل أ س ص ب.



البرهان ∵ $\overline{سأ}$ ، $\overline{سجـ}$ مماسان للدائرة م

∴ $\overrightarrow{سم}$ ينصف ∠أ س ص

∴ ق(∠أ س م) = ق(∠م س ص)

∵ $\overline{صجـ}$ ، $\overline{صب}$ مماسان للدائرة م

∴ $\overrightarrow{صم}$ ينصف ∠ب ص س

∴ ق(∠ب ص م) = ق(∠م ص ب)

∵ $\overleftrightarrow{أس}$ مماس ∴ $\overline{أم} \perp \overleftrightarrow{أس}$ ∴ ق(∠م أ س) = ٩٠°

، ∵ $\overleftrightarrow{بص}$ مماس ∴ $\overline{مب} \perp \overleftrightarrow{بص}$ ∴ ق(∠م ب ص) = ٩٠°

∴ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق(∠أ س ص) + ق(∠ب ص س) = ٣٦٠° − ١٨٠° = ١٨٠° (بالقسمة)

∴ ½ ق(∠أ س ص) + ½ ق(∠ب ص س) = ٩٠°

∴ ق(∠م س ص) + ق(∠م ص س) = ٩٠°

في △ س م ص ∴ ق(∠س م ص) = ٩٠° ∴ $\overline{سم} \perp \overline{صم}$

ⓑ ∵ $\overline{سأ}$ ، $\overline{سجـ}$ قطعتان مماستان ∴ سأ = سجـ

∵ $\overline{صب}$ ، $\overline{صجـ}$ قطعتان مماستان ∴ صب = صجـ

بالجمع ∴ سأ + صب = سجـ + صجـ = س ص = ١٣ سم

∵ $\overline{أس} \parallel \overline{بص}$ ، أس ≠ بص

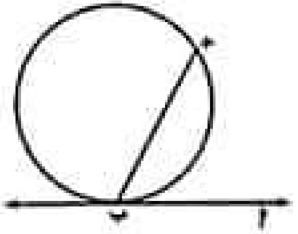
∴ الشكل أ ب ص س شبه منحرف

∴ مساحة الشكل أ ب ص س

= ½ [مجموع القاعدتين المتوازيتين × الارتفاع]

= ½ [أس + ب ص] × أب = ½ × ١٣ × ١٠ = ٦٥ سم²

الزاوية المماسية



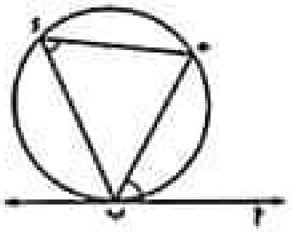
هى الزاوية المكونة من اتحاد شعاعين أحدهما مماس للدائرة والآخر يحمل وترا فى الدائرة يمر بنقطة التماس

قياس الزاوية المماسية = $\frac{1}{2}$ قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

ق (∠ أ ب جـ) = $\frac{1}{2}$ ق (⌢ب جـ)

نظرية (٥)

قياس الزاوية المماسية يساوى قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى القوس



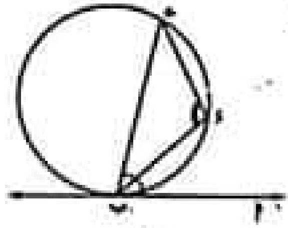
ق (∠ أ ب جـ) = $\frac{1}{2}$ ق (⌢ب جـ)

ق (∠ ء) = $\frac{1}{2}$ ق (⌢ب جـ)

∴ ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ ء)

ملاحظة هامة:

الزاوية المماسية تكمل الزاوية المحيطية المرسومة على وتر الزاوية المماسية وفى جهة واحدة منها



ق (∠ أ ب جـ) + ق (∠ ء) = ١٨٠

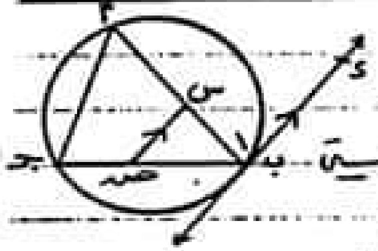
عكس النظرية (٥) إثبات المماس

مثال

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، ب ء مماس للدائرة عند ب ، س ∈ أ ب ، ص ∈ ب جـ حيث س ص // ب ء

أثبت أن: الشكل أ س ص جـ رباعى دائرى.

البرهان



∵ ب ء مماس للدائرة عند ب

أ ب وتر التماس.

∴ ق (١̂) = ق (جـ̂) مماسية ومحيطية

∵ س ص // ء ب ، أ ب قاطع لهما

∴ ق (١̂) = ق (٢̂) بالتبادل

∴ ق (٢̂) = ق (جـ̂)

∵ ∠ ٢ خارجة عن الشكل الرباعى س ص جـ أ

∴ الشكل س ص جـ أ رباعى دائرى.

مثال

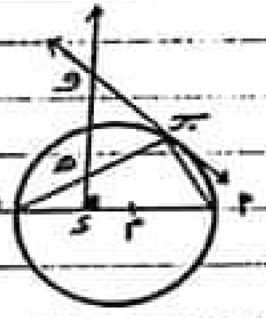
فى الشكل المقابل:

أ ب قطر فى دائرة م ، جـ و مماس للدائرة عند جـ ، ء هـ ⊥ أ ب

اثبت أن:

أولاً: الشكل أ ء هـ جـ رباعى دائرى

ثانياً: و هـ = و جـ .



الحل

البرهان: ∵ أ ب قطر ∴ ق (∠ أ جـ ب) = ٩٠° (محيطية مرسومة فى نصف دائرة)

∵ ء هـ ⊥ أ ب ∴ ق (∠ أ ء هـ) = ٩٠°

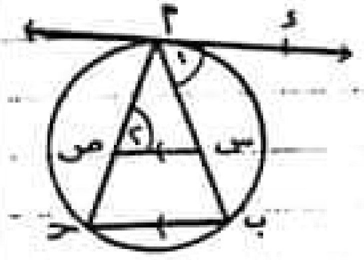
∴ ق (∠ أ جـ هـ) + ق (∠ أ ء هـ) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°

(زاويتان متقابلتان متكاملتان) ∴ الشكل أ ء هـ جـ رباعى دائرى

∵ ق (∠ و جـ هـ) = ق (أ̂) مماسية ومحيطية مشتركتان فى ب جـ

، ق (∠ و هـ جـ) = ق (أ̂) خارجية عن الشكل الرباعى ∴ ق (∠ و جـ هـ) = ق (∠ و هـ جـ)

∴ و جـ = و هـ .



○ أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، أ د مماس للدائرة عند أ ، س ∈ أ ب ، ص ∈ أ جـ حيث س ص // ب جـ

اثبت أن: أ د مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، س ، ص

البرهان ∵ أ د مماس ، أ ب وتر

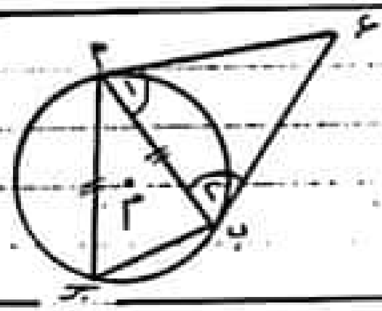
∴ ق(∠١) = ق(∠جـ) ← (١) مماسية ومحيطية مشتركتان في أ ب

∵ س ص // ب جـ

∴ ق(∠٢) = ق(∠جـ) ← (٢) بالتناظر

من (١) ، (٢) ∴ ق(∠١) = ق(∠٢)

∴ أ د مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، س ، ص



○ في الشكل المقابل: اثبت أن أ د مماس للدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب د

البرهان ∵ أ د ، د ب قطعتان مماستان للدائرة م

∴ ق(∠١) = ق(∠٢) ← (١)

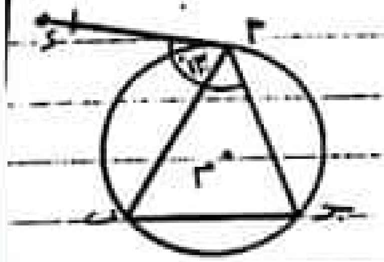
∵ أ ب = أ جـ ∴ ق(∠أ ب جـ) = ق(∠جـ) ← (٢)

∵ أ د مماس ∴ ق(∠١) = ق(∠جـ) ← (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ∴ ق(∠١) + ق(∠٢) = ق(∠أ ب جـ) + ق(∠جـ)

∴ في ∴ ق(∠ب أ د) = ق(∠د)

∴ أ د مماس للدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب د



○ في الشكل المقابل:-

أ د مماس للدائرة م يمسها في أ

، ق(∠د أ جـ) = ١٣٠°

أوجد بالبرهان: ق(∠ب)

البرهان ∵ ق(∠جـ أ د) = ١٣٠° (مماسية)

∴ ق(⌒جـ ب د) = ٢ × ١٣٠° = ٢٦٠°

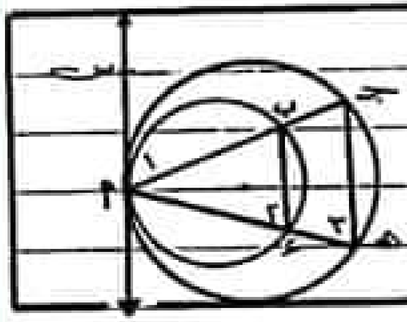
∵ محيط الدائرة = ٣٦٠°

∴ ق(⌒أ جـ) = ٣٦٠° − ٢٦٠° = ١٠٠°

∴ ق(∠ب) = ½ ق(⌒أ جـ) = ½ × ١٠٠° = ٥٠°

حل آخر ∵ الزاوية المماسية تكمل الزاوية المحيطية المرسومة على وتر التماس في نفس الجهة

∴ ق(∠ب) = ١٨٠° − ١٣٠° = ٥٠°



○ في الشكل المقابل: اثبت أن ب د // جـ هـ

البرهان ∵ أ س مماس للدائرة الصغرى ، أ ب وتر

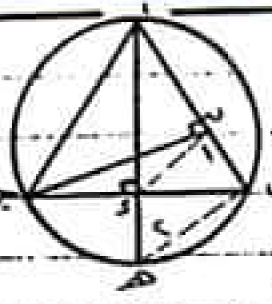
∴ ق(∠١) المماسية = ق(∠٢) المحيطية ← (١) مشتركتان في أ ب

∵ أ س مماس للدائرة الكبرى ، أ جـ وتر فيها

∴ ق(∠١) المماسية = ق(∠٣) المحيطية وهما مشتركتان في أ جـ ← (٢)

من (١) ، (٢) ∴ ق(∠٢) = ق(∠٣) وهما في وضع تناظر

∴ جـ هـ // ب د ⇐ #



( ) أ ب جـ مثلث حاد الزوايا مرسوم داخل دائرة ، رسم أ ء ⊥ ب جـ ليقطع ب جـ في ء ويقطع الدائرة في هـ ، رسم جـ ن ⊥ أ ب ليقطع أ ب في ن

أثبت أولاً: الشكل أ ن ء جـ رباعي دائري

ثانياً: ق(ب ن د) = ق(ب هـ د)

البرهان

∵ أ ء ⊥ ب جـ ∴ ق(أ ء جـ) = ٩٠°

∵ جـ ن ⊥ أ ب ∴ ق(أ ن جـ) = ٩٠°

∴ ق(أ ء جـ) = ق(أ ن جـ) = ٩٠°

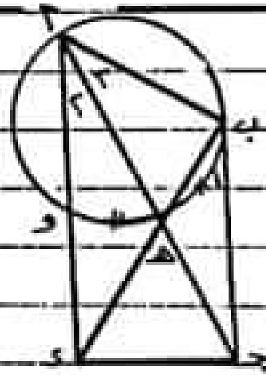
وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل أ ن ء جـ رباعي دائري

∵ ق(١) = ق(جـ) خارجة عن الشكل الرباعي أ ن ء جـ = المقابلة للمجاورة لها ← (١)

∵ ق(هـ) = ق(جـ) محيطيتان مشتركتان في (أ ب) ← (٢)

من (١)، (٢) ∴ ق(ب ن د) = ق(ب هـ د) ← **



○ في الشكل المقابل:

ب جـ تمس الدائرة عند ب ، إذا كانت هـ منتصف ب د ، أثبت أن الشكل أ ب جـ د رباعي دائري

البرهان

∵ ب جـ مماس ∴ ق(١) = ق(٢) محيطية ومماسية مشتركتان في ب أ ← I

∵ هـ منتصف ب د ∴ ق(٢) = ق(٣) ← II من I ، II

∴ ق(١) = ق(٣) وهما مرسومتان على جـ د ∴ الشكل أ ب جـ د رباعي دائري

مثال

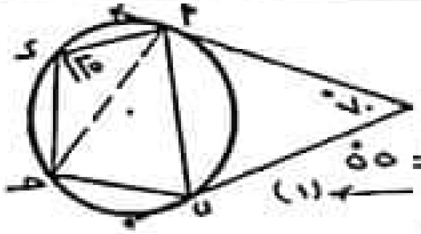
أ ب جـ د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة ، هـ نقطة خارجها ، هـ أ ، هـ ب مماسان للدائرة عند أ ، ب فإذا كان ق (أ هـ ب) = ٧٠° ، ق (أ د جـ) = ١٢٥°

أثبت أن: أولاً: أ ب = أ جـ

ثانياً: أ جـ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، هـ

الحل

البرهان



∵ هـ أ ، هـ ب قطعتان مماستان هـ

∴ ق (هـ أ ب) = ق (هـ ب أ) = (١٨٠° − ٧٠°)/٢ = ٥٥° ← (١)

∵ أ ب جـ د رباعي دائري

∴ ق (أ ب جـ) = ١٨٠° − ١٢٥° = ٥٥°

∵ ق (أ جـ ب) = ق (هـ أ ب) = ٥٥° مماسية ومحيطية مشتركتان في أ ب

∴ ق (أ ب جـ) = ق (أ جـ ب) = ٥٥°

∴ أ ب = أ جـ

∵ مجموع قياسات زوايا △ أ ب جـ = ١٨٠° ∴ ق(ب أ جـ) = ١٨٠° − (٥٥° + ٥٥°) = ٧٠°

∴ ق (ب أ جـ) = ق (هـ) = ٧٠°

∴ أ جـ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، هـ

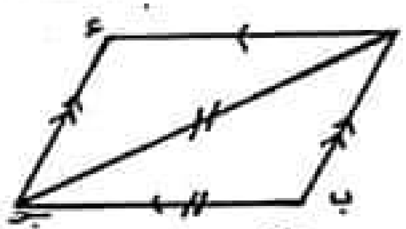
مثال ٤

أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه أ جـ = ب جـ

أثبت أن: جـ د مماس للدائرة الخارجية للمثلث أ ب جـ

الحل

البرهان



∵ أ جـ = ب جـ

∴ ق (ب أ جـ) = ق (ب) ← (١)

∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع

∴ ق (أ جـ د) = ق (ب أ جـ) بالتبادل ← (٢)

من (١)، (٢) ∴ ق (أ جـ د) = ق (ب) ∴ جـ د مماس للدائرة المارة بالمثلث أ ب جـ .

تمارين عامة على الوحدة الخامسة

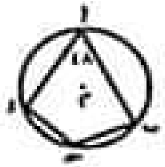
أولاً : أكمل ما يأتي :

(١) في الشكل الرباعي الدائري تكون الزاويتان المتقابلتان ....

(٢) الأقواس المتساوية في القياس في دائرة أوتارها ....

(٣) قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس ....

(٤) في الشكل المقابل :



إذا كانت م دائرة ، ق (∠أ) = ٤٨° ، فإن :

أولاً : ق (∠جـ) = ...

ثانياً : ق (ب د الأكبر) = ...

(٥) يكون الشكل رباعياً دائرياً إذا وجدت زاوية خارجة عند أي رأس من رؤوسه قياسها يساوي .... الزاوية المقابلة للمجاورة لها .

(٦) في الشكل المقابل :

إذا كانت ق(∠جـ أ هـ) = ٣٦° فإن :

(أ) ق(∠هـ ب جـ) = ...°

(ب) ق(∠هـ م جـ) = ...°

(جـ) ق(∠هـ د جـ) = ...°

(٧) الزاوية المحيطية التي تقابل قوساً أصغر في الدائرة ....

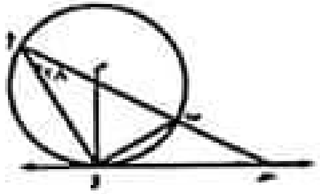
(٨) الوتران المتوازيان في الدائرة يحصران بينهما قوسين ....

(٩) قياس القوس من دائرة يساوي ضعف ....

(١٠) الزاويتان المحيطيتان المرسومتان على قوس واحد في دائرة يكونان ......

(١١) ارتفاعات المثلث ....

(١٢) في الشكل المقابل :



أب قطر في الدائرة م ، جـ د مماس لها ،

ق(∠ب أ د) = ٢٨° .

أكمل ما يأتي :

أولاً : ق(∠ب د م) = ...°

ثانياً : ق(∠ب م د) = ...°

ثالثاً : ق(∠د ب جـ) = ...° رابعاً : ق(أ د) = ...°

خامساً : ق(∠جـ) = $\frac{1}{2}$ [ق(....) − ق(....)]

الإجابات

① متكاملتان

② متساوية في الطول

③ الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس

④ ١٣٢° ، ٢٦٤°

⑤ متساوية

⑥ أ ٣٦° ب ٧٢° جـ ١٤٤°

⑦ حادة

⑧ متساويين

⑨ قياس الزاوية المحيطية

⑩ متساويتين

⑪

⑫ ① ٢٨° ثانياً: ٥٦° ثالثاً: ٦٢° رابعاً: ٥٦° خامساً: ق(أد) ق(ب هـ)

(٦٦)

(١٣) المماسان المرسومان من نهايتي قطر في الدائرة يكونان ....

(١٤) قياس الزاوية المماسية يساوي ...... الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس

(١٥) عدد المماسات المشتركة المرسومة لدائرتين متباعدتين يساوي ....

(١٦) مركز الدائرة الداخلة لأي مثلث هو نقطة تقاطع .....

ثانياً : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) في الشكل الرباعي الدائري كل زاويتين متقابلتين :

(أ) متساويتان (ب) متتامتان (جـ) متكاملتان (د) متبادلتان

(٢) مركز الدائرة الداخلة للمثلث هي نقطة تقاطع :

(أ) ارتفاعاته (ب) متوسطاته (جـ) منصفات زواياه (د) محاور أضلاعه

(٣) الزاوية المحيطية التي تقابل قوساً أصغر في الدائرة :

(أ) منعكسة (ب) قائمة (جـ) منفرجة (د) حادة

(٤) في الشكل المقابل :

في الدائرة م إذا كان ق (∠أ م ب) = ٥٢° ،

فإن ق(أ د ب) يساوي :

(أ) ٥٢° (ب) ١٠٤° (جـ) ١٢٨° (د) ٣٠٨°

(٥) في الشكل المقابل :

أجـ ، ب د وتران في دائرة متقاطعان في هـ ،

ق(∠أ) = ٣٠° ، ق(∠أهـد) = ١١٥°

فإن ق(أ د) يساوي :

(أ) ٧٠° (ب) ٨٠° (جـ) ١١٥° (د) ١٦٠°

⑬ متوازيان

⑭ نصف

⑮ ٤

⑯ منصفات زواياه

ثانياً : اختر

① متكاملتان

② منصفات زواياه

③ حادة

④ ٣٦٠ − ٥٢° = ٣٠٨°

⑤ ق(ب جـ) = ٧٠°

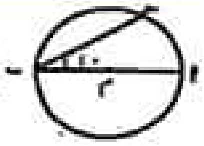
ق(∠أ هـ د) = (ق(ب جـ) + ق(أ د)) / ٢

١١٠ = (٧٠ + ق(أ د)) / ٢

٧٠ + ق(أ د) = ٢٢٠°

ق(أ د) = ١٦٠°

(٦٧)



(٦) في الشكل المقابل :

أ ب قطر في الدائرة م ، ق(∠أ ب جـ) = ٤٠°

فإن ق(ب جـ⌒) يساوي :

(أ) ٤٠° (ب) ٥٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٠٠°

(٧) في الشكل المقابل :

إذا كان أ ب قطر في الدائرة م ، ق(∠أ ب د) = ٢٥° فإن :

أولا : ق(∠د أ ب) تساوي :

(أ) ٢٥° (ب) ٥٠° (جـ) ٦٥° (د) ٩٠°

ثانيا : ق(∠د جـ ب) تساوي :

(أ) ٥٠° (ب) ١٠٠° (جـ) ١١٥° (د) ١٢٥°

(٨) في الشكل المقابل :

دائرتان متحدتا المركز في م ، أ ب ∩ جـ د = {م} ،

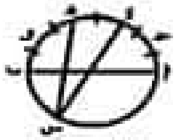
فإذا كان ق(ب د⌒) = ٨٠° ، فإن ق(أ جـ⌒) يساوي :

(أ) ٤٠° (ب) ٨٠° (جـ) ١٠٠° (د) ١٦٠°

(٩) مستعينا بالأشكال الآتية اختر الإجابة الصحيحة

شكل (١)

شكل (٢)



شكل (٣)

شكل (١) : دائرة مركزها م ، ق(∠م ب جـ) = ٣٢° ، فإن ق(ب جـ⌒) يساوي :

(أ) ١٦° (ب) ٣٢° (جـ) ٦٤° (د) ١١٦°

شكل (٢) : إذا كان أ ب ، جـ د وتران في دائرة فإن ق(∠د أ ب) يساوي :

(أ) ٤٠° (ب) ٥٠° (جـ) ٦٠° (د) ٧٠°

شكل (٣) : إذا كان أ ب قطر في دائرة وكان

ق(أ جـ⌒) = ق(جـ د⌒) = ق(د هـ⌒) = ق(هـ و⌒) = ق(و ب⌒)

فإن ق(∠د ب هـ) تساوي :

(أ) ١٨° (ب) ٣٦° (جـ) ٥٤° (د) ٧٢°

الإجابات

⑥ ق(أ جـ⌒) = ٨٠ و ق(جـ ب⌒) = ١٠٠°

⑦ أولا : ٦٥°

ثانيا : ١١٥°

⑧ ١٦٠°

⑨ شكل (١) ق(م̂) = ١٨٠ − ٣٢×٢

ق(ب جـ⌒) = ١١٦°

شكل (٢) ق(أ جـ⌒) = ١٢٠°

ق(هـ̂) = ١٠٠ − ٦٠° = ٤٠°

ق(أ̂) = ٤٠°

شكل ③ ١٨٠/٥ = ٣٦°

ق(∠د ب هـ) = ٣٦/٢ = ١٨°

(١٠) القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج دائرة دائماً ،

(أ) متساويتان في الطول . (ب) غير متساويتين (ج) متعامدتان (د) متوازيتان

(١١) الزاوية المماسية هي زاوية محصورة بين ،

(أ) وترين (ب) مماسين (ج) وتر ومماس (د) وتر وقطر

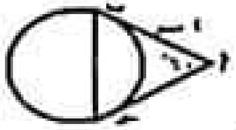
(١٢) عدد المماسات التي يمكن رسمها من إحدى نقط دائرة تساوي ،

(أ) واحد (ب) اثنان (ج) أربعة (د) عدد لا نهائي

(١٣) عدد المماسات المشتركة لدائرتين متحدتي المركز تساوي ،

(أ) صفر (ب) واحد (ج) اثنان (د) ثلاثة

(١٤) في الشكل المقابل ،



أ ب ، أ ج مماسان ، ق(∠أ) = ٦٠° ،

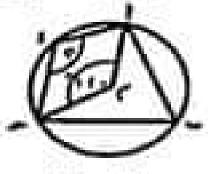
فإذا كان أ ب = ٤ سم فإن طول ب ج تساوي ،

(أ) ٣ سم (ب) ٤ سم (ج) ٥ سم (د) ٨ سم

(١٥) عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الداخل تساوي ،

(أ) واحد (ب) اثنان (ج) ثلاثة (د) أربعة

(١٦) مستعينا بالأشكال الآتية اختر الإجابة الصحيحة ،



شكل (١)

شكل (٢)

شكل (٣)

شكل (٤)

شكل (١) ، إذا كانت ق(∠أ م ج) = ١٤٠° فإن ق(∠أ ء ج) تساوي ،

(أ) ٤٠° (ب) ٧٠° (ج) ١١٠° (د) ١٤٠°

الإجابات

(١٠) متساويتان في الطول

(١١) وتر ومماس

(١٢) واحد

(١٣) صفر

(١٤) ٤ سم

(١٥) واحد

(١٦) شكل (١) ١١٠°

شكل (٢) ١٣٠°

شكل (٣) ٤٠°

شكل (٤) ٣٠°

شكل (٢) ، إذا كانت ق(∠أ ب م) = ٤٠° فإن ق(∠أ ج ب) تساوي ،

(أ) ٨٠° (ب) ١٠٠° (ج) ١٣٠° (د) ١٤٠°

شكل (٣) ، إذا كانت ق(∠أ ب ج) = ٧٠° فإن ق(∠ب ء ج) تساوي ،

(أ) ٢٠° (ب) ٤٠° (ج) ٦٠° (د) ٩٠°

شكل (٤) ، إذا كانت ق(∠ب أ ء) = ١٢٠° فإن ق(∠ج ب ء) تساوي ،

(أ) ١٥° (ب) ٣٠° (ج) ٤٥° (د) ٦٠°

(١٧) في الشكل المقابل ،

إذا كان ب ء مماس للدائرة م ،

ق(∠ب أ م) = ٢٥° فإن ق(∠أ ب ء) تساوي ،

(أ) ٢٥° (ب) ٥٠° (ج) ٦٥° (د) ١٣٠°

(١٨) في الشكل المقابل ،

أ ب مماس للدائرة م ، إذا كان م ب = ٥ سم ،

أ ج = ٨ سم ، فإن أ ب =

(أ) ٥ سم (ب) ١٠ سم (ج) ١٢ سم (د) ١٣ سم

(١٩) يمكن رسم دائرة تمر برؤوس ،

(أ) شبه منحرف (ب) معين (ج) متوازي أضلاع (د) مستطيل

(٢٠) في الشكل المقابل ،

إذا كان ، ق(أ ء) = ٧٠° ، ق(ب ج) = ٣٠°

فإن ق(∠هـ) =

(أ) ٢٠° (ب) ٤٠° (ج) ٥٠° (د) ١٠٠°

(١٧) ∵ م أ = م ب ∴ ق(∠م) = ١٨٠ - ٥٠ = ١٣٠° ق(∠أ ب ء) = ½ × ١٣٠ = ٦٥°

(١٨) م ج = م ب = ٥ م أ = ١٣ سم م ب ⊥ أ ب أ ب = √((١٣)² - (٥)²) = ١٢ سم

(١٩) مستطيل

(٢٠) ق(∠هـ) = ½ [ق(أ ء) - ق(ب ج)] = ½ [٧٠ - ٣٠] = ٢٠°