سلسلة الفاروق

(١)

فى

الجـــــبر

للصف الثانى الثانوي

الفصل الدراسي الأول

القسم العلمي

إعداد : أ /عشري فاروق

ت/ ٠١١١٥٦٢٤٤٤٣١

الدرس الأول
الدالة ذات المتغير الحقيقي

الدالــــة

إذا كانت س ، ص مجموعتين غير خاليتين وجزئيتين من مجموعة الأعداد الحقيقية

فـــإن :

تسمى العلاقة من س إلى ص دالة إذا ارتبط كل عنصر من عناصر س بعنصر واحد فقط من عناصر ص

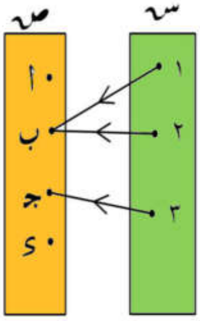
التعرف على العلاقة الدالية من خلال

(١) المخطط السهمى الممثل للعلاقة
(٢) الشكل البيانى الممثل للعلاقة
(٣) بيان العلاقة
(٤) قاعدة العلاقة

(١)المخطط السهمي الممثل للعلاقة

الشكل المقابل

يمثل دالة من س إلى ص



لأن كل عنصر من عناصر س خرج منه سهم واحد فقط نحو عناصر ص

ومن هذه العلاقة نتعرف على :

بيان العلاقة :

وهو يساوى مجموعة الأزواج المرتبة الممثلة للعلاقة

∴ بيان ع = { (١ ، ب) ، (٢ ، ب) ، (٣ ، حـ) }

المجال :

هو المجموعة س = { ١ ، ٢ ، ٣ }

المجال المقابل :

هو المجموعة ص = { أ ، ب ، حـ ، د }

المدى :

هو مجموعة صور عناصر المجموعة س وهو مجموعة جزئية من

∴ المدى = { ب ، حـ }

التعبير الرمزى عن الدالة :

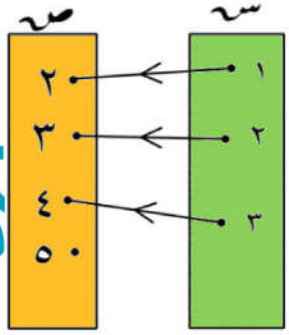
د : س ⟵ ص

د : { ١ ، ٢ ، ٣ } ⟵ { أ ، ب ، حـ ، د }

مثـــال ٠

أى من المخططات السهمية التالية تمثل دالة من س إلى ص؟ وفى حالة كونها دالة أكتب المجال والمدى

١



الحـــل

∵ كل عنصر من عناصر س يخرج منه سهم واحد فقط نحو عناصر ص

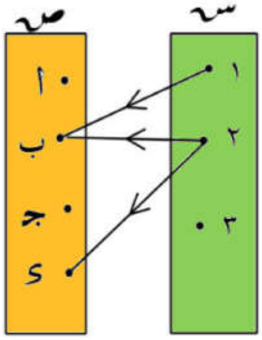
∴ العلاقة تمثل دالة من س إلى ص

المجال ={ ١ ، ٢ ، ٣}

المجال المقابل = {٢، ٣ ، ٤، ٥}

المدى = {٢ ، ٣ ، ٤}

٢

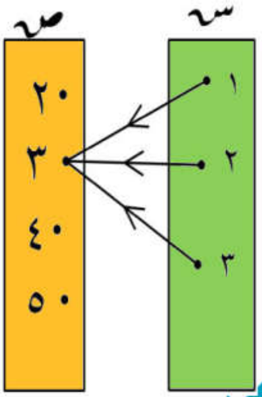


الحـــل

∵ العنصر ٣ لم يخرج منه أية أسهم نحو عناصر ص

∴ العلاقة لاتمثل دالة

٣



الحـــل

∵ كل عنصر من عناصر س خرج منه سهم واحد فقط نحو عناصر ص

∴ العلاقة تمثل دالة من س إلى

المجال ={ ١ ، ٢ ، ٣ }

المجال المقابل = { ٢، ٣ ، ٤ ، ٥ }

المدى ={ ٣ }

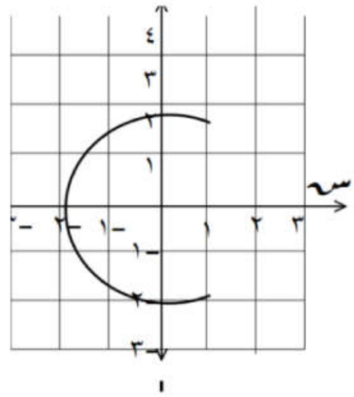
(٢) من المخطط البياني الممثل للعلاقة

تكون العلاقة الممثلة بيانيا تمثل دالة إذا كان لكل خط رأسى يمر بعنصر من عناصر المجموعة س تقع عليه نقطة واحدة و واحدة فقط من نقط العلاقة

مثال ٢

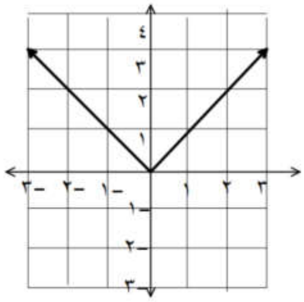
أى من الأشكال البيانية التالية يمثل دالة وأيها لا يمثل دالة وإذا كانت تمثل دالة عين المجال والمدى

١



لا يمثل دالة لأن محور الصادات هو خط رأسى وقطع الشكل فى أكثر من نقطة

٢



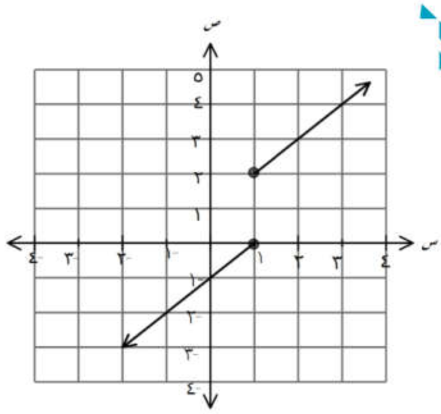
الحــــل

يمثل دالة لأن عند رسم أى خط رأسى يقطع الدالة فى نقطة وحيدة

المجال = ح

المدى = [٠ ، ∞[

٣



الحــــل

لايمثل دالة لأن :

الخط الرأسى س = ١ تقع عليه نقطتان من نقط العلاقة

(٣) من بيان العلاقة

العلاقة ع تمثل دالة من س إلى ص

إذا ظهر كل عنصر من عناصر مرة

واحدة فقط فى بيان العلاقة

مثــال ٢

إذا كانت : س = { ١ ، ٢ ، ٣ }

، ص = { أ ، ب ، حـ }

فأى من العلاقات الآتية تمثل دالة من

س إلى ص وإذا كانت تمثل دالة

عين مداها .

(أ) ع١ = { (١ ، أ) ، (١ ، ب) ، (٢ ، حـ) }

الحــــل

- العدد ١ ظهر كمسقط أول مرتين فى

بيان العلاقة

أو : العدد ٣ لم يظهر كمسقط أول فى

بيان العلاقة

∴ العلاقة لا تمثل دالة

(ب) ع٢ = { (١ ، أ) ، (٢ ، ب) ، (٣ ، حـ) }

الحــــل

كل عنصر من عناصر س ظهر

كمسقط أول مرة واحدة فى بيان ع

∴ العلاقة تمثل دالة

∴ المجال = { ١ ، ٢ ، ٣ }

{ أ ، ب ، حـ }

(حـ)

ع٣ = { (٣ ، حـ) ، (١ ، حـ) ، (٢ ، حـ) }

الحــــل

∵ كل عن من عناصر س ظهر

∴ العلاقة تمثل دالة

∴ المجال = { ١ ، ٢ ، ٣ }

، المدى = { حـ }

(٤) من قاعدة العلاقة

إذا كانت كل قيمة للمتغير س يناظرها قيمة وحيدة للمتغير ص فإن العلاقة تمثل دالة

فمثلاً

إذا كانت : $ص^{٢} = ٢س + ٤$

فـإن :

عند س = ٠ نجد أن :

$ص^{٢} = ٤$ ويكون ص = ± ٢

∴ ص لها قيمتان

∴ العلاقة لا تمثل دالة

ويحدث ذلك مع جميع العلاقات ذات الاس الزوجى للمتغير ص

أما إذا كانت : $ص^{٣} = ٧س + ١$

عند وضع س = ١

فـإن : $ص^{٣} = ٧ \times ١ + ١ = ٨$

∴ $ص = \sqrt[٣]{٨}$ ∴ ص = ٢

∴ كل قيمة للمتغير س يناظرها قيمة وحيدة للمتغير ص

∴ العلاقة تمثل دالة

وهذ يحدث فى حالة العلاقات ذات الأس الفردى للمتغير ص

مثـــال ٣

أى من العلاقات الآتية تمثل دالة وأيها لا تمثل دالة

١ ص = ٢س + ١

الحـــل

٢ $ص^{٢} = س + ١$

الحـــل

٣ $ص^{٣} = س^{٢} + ٤$

الحـــل

٤ س = ٥

الحـــل

٥ ص = ٣

تدريب ٠

إذا كانت د دالة حيث

د : {١ ، ٢ ، ٣} ← ح ، د(س) = ٣س - ٦

فإن : مدى د هو ....

الحل

تدريب ١

إذا كانت د دالة حيث

د : {-٣ ، -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣} ← ح

د(س) = $س^{٢}$ - ١

فإن : مدى د هو ....

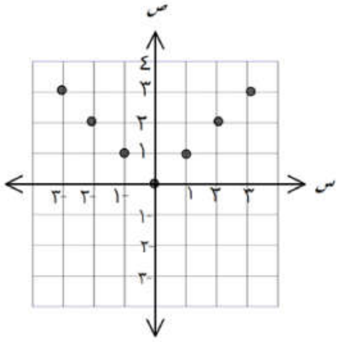
الحل

تدريب ٢

عين مجال ومدى كل دالة من

الدوال الآتية :

١

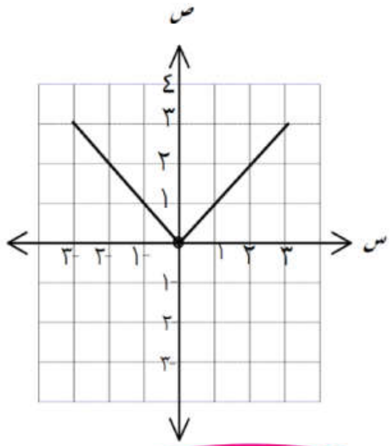


الحل

المجال هو ......

المدى هو ....

٢

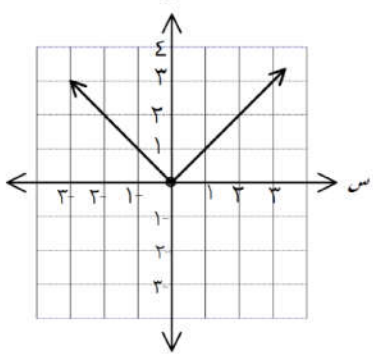


الحل

المجال هو ......

المدى هو ....

٣

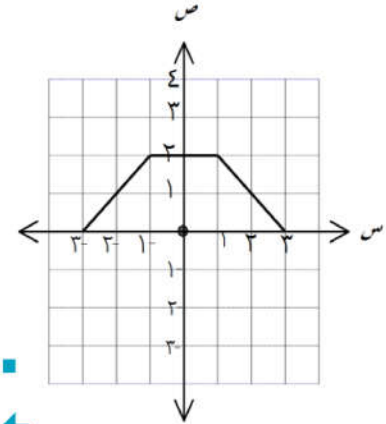


الحـــــل

المجال هو ......

المدى هو ....

٤



الحـــــل

المجال هو ......

المدى هو ....

ملحوظة ١

إذا كان المجال مجموعة منفصلة من الأعداد تمثل الدالة بمجموعة منفصلة من النقاط ويكون المدى مجموعة منفصلة من الأعداد

مثـــال ٤

مثل بيانيا الدالة د:

د : {-٣، -١، ١، ٢} ⟵ [-٣، ٧]

، د(س) = ٢س + ٣

ومن الرسم عين المجال والمدى

الحـــــل

مجال الدالة = {-٣، -١، ١، ٢}

نوجد صور عناصر المجال

∵ د(س) = ٢س + ٣

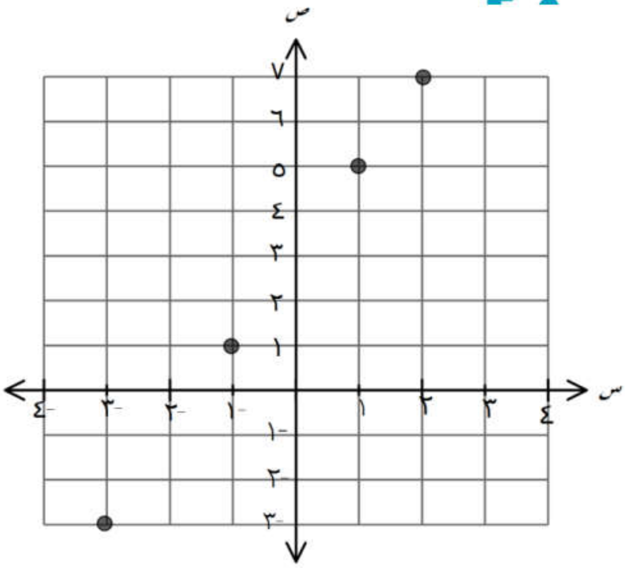
د(-٣) = ٢ × (-٣) + ٣ = -٦ + ٣ = -٣

د(-١) = ٢ × (-١) + ٣ = -٢ + ٣ = ١

د(١) = ٢ × ١ + ٣ = ٢ + ٣ = ٥

د(٢) = ٢ × ٢ + ٣ = ٤ + ٣ = ٧

س	-٣	-١	١	٢
د(س)	-٣	١	٥	٧



المدى = {-٣، ١، ٥، ٧}

ملحوظة ٢

إذا كان المجال مجموعة متصلة من الأعداد (على صورة فترة) تمثل الدالة بمجموعة متصلة من النقاط ويكون المدى مجموعة متصلة من الأعداد أو مجموعة من نقطة واحدة فى حالة الدالة الثابتة

مثال ٥

مثل بيانيا الدالة د : [-٣ ، ٣] ← ح

د(س) = $س^{٢}$ - ٤ ومن الرسم عين المجال والمدى

الحل

د(س) = $س^{٢}$ - ٤

د(-٣) = $(-٣)^{٢}$ - ٤ = ٩ - ٤ = ٥

د (-٢) = $(-٢)^{٢}$ - ٤ = ٤ - ٤ = ٠

د (-١) = (-١) -٤ = ١ - ٤ = -٣

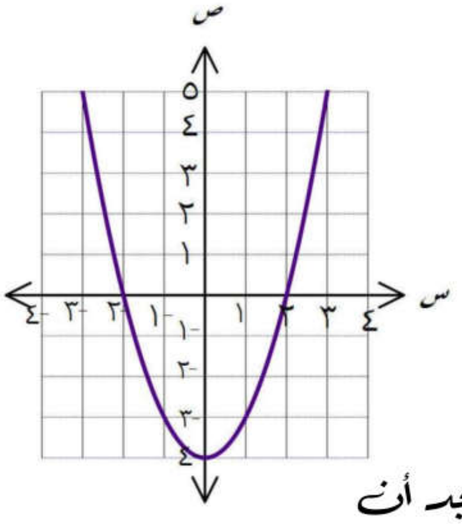
د(٠) = $(٠)^{٢}$ -٤ = ٠ -٤ = -٤

د(١) = $(١)^{٢}$ -٤ = ١ -٤ = -٣

د (٢) = $(٢)^{٢}$ -٤ = ٤ -٤ = ٠

د (٣) = $(٣)^{٢}$ -٤ = ٩ -٤ = ٥

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
د(س)	٥	٠	-٣	-٤	-٣	٠	٥



من الرسم نجد أن

المجال = [-٣ ، ٣]

المدى = [-٤ ، ٥]

الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

تسمى الدالة د :

$$د(س) = \begin{cases} س & س < ١ \\ س^{٢} + ٤ & ، س \geqslant ١ \end{cases}$$

هى دالة معرفة بأكثر من قاعدة :

مجالها = $]-\infty ، ١[\cup [١ ، \infty[$

$=]-\infty ، \infty[=$ ح

مثـــال (٦)

إذا كانت د : د(س) = $\begin{cases} س+٣ & ، -٣ \le س < -١ \\ ٢ & ، -١ \le س \le ١ \\ ٣-س & ، ١ < س \le ٣ \end{cases}$

مثل بيانياً الدالة ومن الرسم عين المجال والمدى

الحـــل

عندما س ∈ [-٣، -١[
فإن : د(س) = س + ٣

د(-٣) = (-٣) + ٣ = ٠

د(-٢) = (-٢) + ٣ = ١

د(-١) = (-١) + ٣ = ٢

س	-٣	-٢	-١
د(س)	٠	١	٢

لاحظ :

-١ ∉ [-٣، -١[(الفترة مفتوحة عند -١)

فيتم وضع ثقب عند النقطة (-١، ٢)

(١)

عندما س ∈ [-١، ١] فإن : د(س) = ٢

أى أن : الدالة تكون ثابتة وتساوى ٢

لجميع قيم س ∈ [-١، ١]

س	-١	٠	١
د(س)	٢	٢	٢

عندما س ∈]١، ٣] فإن : د(س) = ٣ - س

د(١) = ٣ - ١ = ٢

د(٢) = ٣ - ٢ = ١

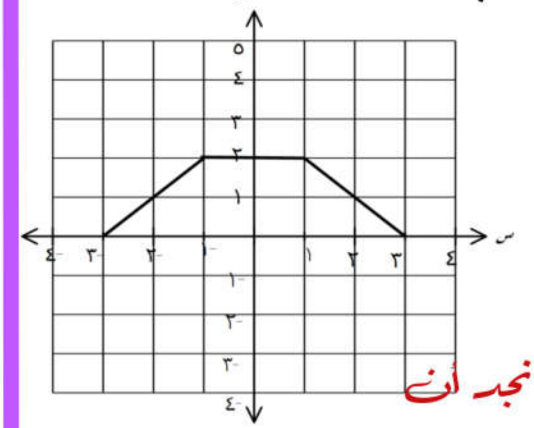
د(٣) = ٣ - ٣ = ٠

س	١	٢	٣
د(س)	٢	١	٠

لاحظ :

١ ∉]١، ٣] (الفترة مفتوحة عند ١)

فيتم وضع ثقب عند النقطة (١، ٢)



من الرسم نجد أن

(١) المجال = [-٣، ٣]

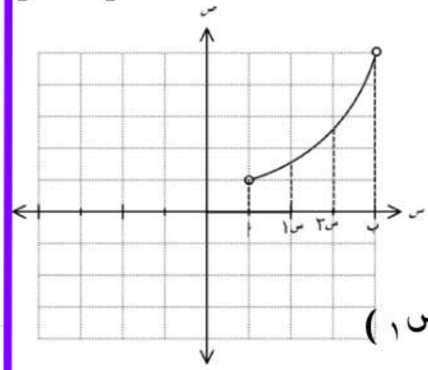
(٢) المدى = [٠، ٢]

إطراد الدوال

يقصد بإطراد الدوال بحث فترات التزايد والتناقص والثبوت للدالة

١ تعريف تزايد الدالة

يقال للدالة د أنها تزايدية على الفترة] ا، ب [



إذا كان

$\text{س}_2 > \text{س}_1$

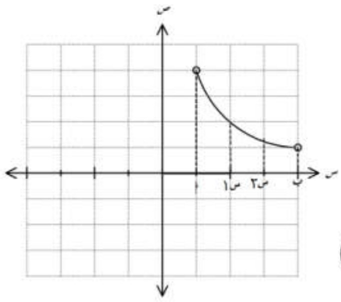
فإن :

$\text{د}(\text{س}_2) > \text{د}(\text{س}_1)$

لكل س_2 ، س_1 ∈] ا، ب [

٢ تعريف تناقص الدالة

يقال للدالة د أنها تناقصية على الفترة] ا، ب [



إذا كان

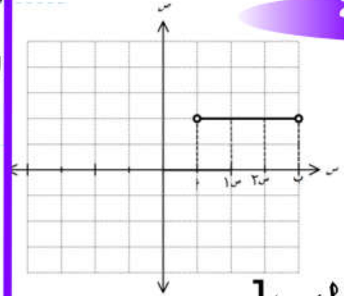
$\text{س}_2 > \text{س}_1$

فإن :

$\text{د}(\text{س}_2) < \text{د}(\text{س}_1)$

لكل س_2 ، س_1 ∈] ا، ب [

٣ تعريف ثبوت الدالة



إذا كان $\text{س}_2 > \text{س}_1$

فإن :

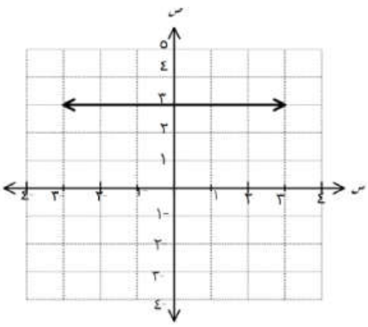
$\text{د}(\text{س}_2) < \text{د}(\text{س}_1)$

لكل س_2 ، س_1 ∈] ا، ب [

مثال ١

فى كل من الأشكال الآتية عين المجال والمدى وابحث الإطراد

١ فى الشكل المقابل

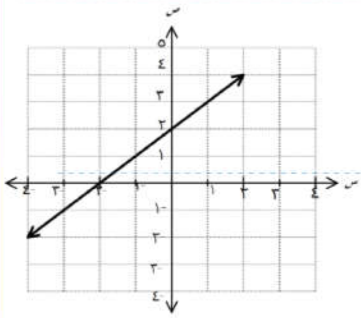


المجال = ...

المدى = ...

الإطراد

٢ فى الشكل المقابل

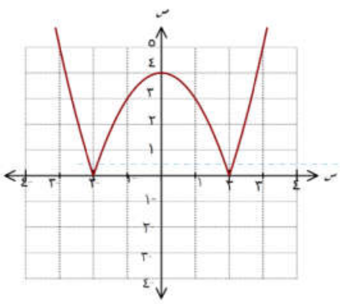


المجال = ...

المدى = ...

الإطراد

٣ فى الشكل المقابل

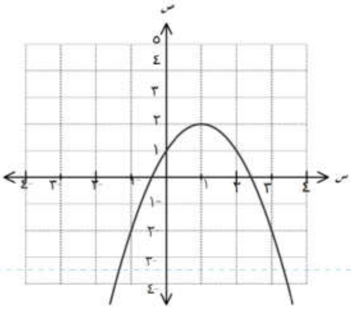


المجال = ...

المدى = ...

الإطراد

٤ فى الشكل المقابل

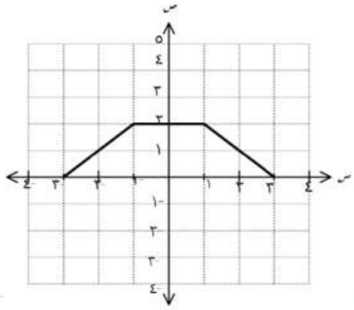


المجال = ...

المدى = ...

الإطراد

٥ فى الشكل المقابل

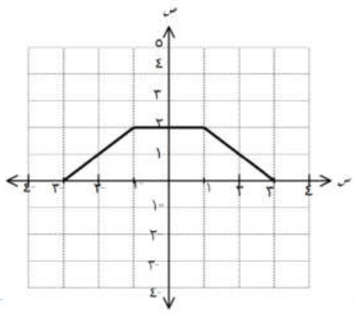


المجال = ...

المدى = ...

الإطراد

٦ فى الشكل المقابل

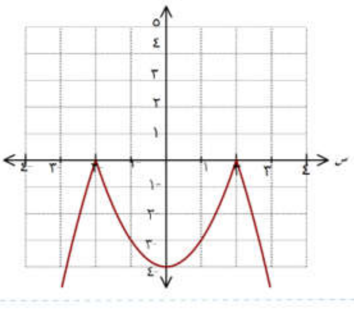


المجال = ...

المدى = ...

الإطراد

٧ فى الشكل المقابل

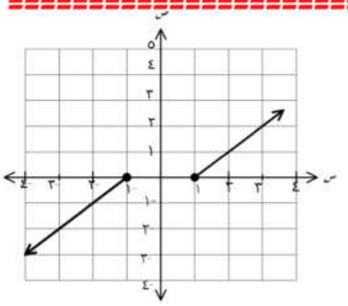


المجال = ...

المدى = ...

الإطراد

٨ فى الشكل المقابل

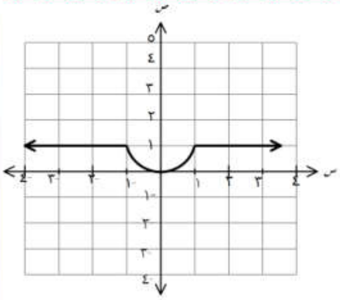


المجال = ...

المدى = ...

الإطراد

٩ فى الشكل المقابل

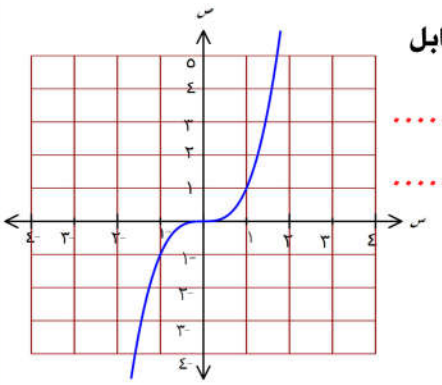


المجال = ...

المدى = ...

الإطراد

١٠ فى الشكل المقابل



المجال = ...

المدى = ...

الإطراد

الواجب ١

١ إذا كانت د دالة حيث

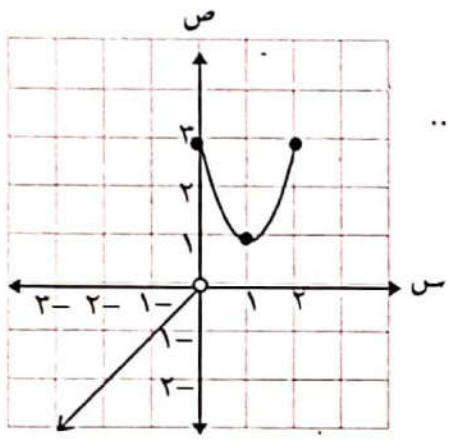
$$د(س) = \begin{cases} ٢س &، \quad ٣ \ge س \\ س^{٢} &، \quad ٣ < س \end{cases}$$

فإن : د(٣) + د(١) + د(٤) = ...

(أ) ٥ (ب) ١٨ (جـ) ٢٤ (د) ٣

الحــــل

٣



يمثل الشكل البياني للدالة د فإن مجالها هو ....

(أ) ح (ب) ح – {٠}

(جـ)]–∞ ، ٢] (د)]–∞ ، ٢] – {٠}

الحــــل

٤

إذا كانت د دالة حيث : د(س) = أس + ب ،

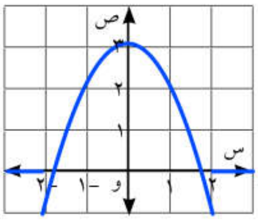
وكان د(٢) + د(٣) – د(٥) = ١٢ فان د(٠) = ...

(أ) ١٢ (ب) صفر (جـ) –١ (د) ١٨

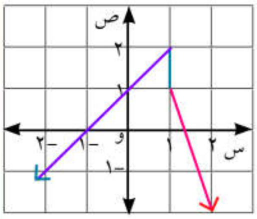
الحــــل

٥ فى كل من الأشكال الآتية بين ما إذا كانت ص دالة فى س أم لا ؟ وإذا كانت دالة عين المجال والمدى

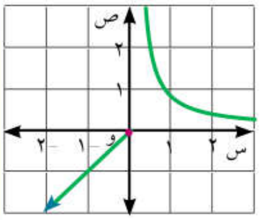
(أ)



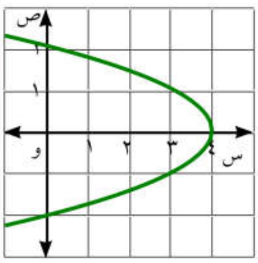
(ب)



(جـ)



(د)



٦ إذا كانت **د** دالة حيث :

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ٥ \text{ ، } & \text{س} \geq ٣ \\ -\text{س} + ٦ \text{ ، } & \text{س} < ٣ \end{cases}$$

فإن $\text{د}(\text{أ} + ٣) =$ .... حيث $\text{أ} \in \text{ح}^{-}$

(أ) $\text{أ}^{٢} + ٦\text{أ} + ١٤$ (ب) $-\text{أ} + ٩$

(ج) $-\text{أ} + ٣$ (د) $\text{أ}^{٢} + ١٤$

الحـــــل

٧

أي من العلاقات الآتية لا تعبر عن دالة :

(أ) {(−٢ ، ١) ، (−١ ، ٢) ، (١ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٢ ، ٣)}

(ب) {(−٢ ، ٠) ، (−١ ، −١) ، (٠ ، ٣) ، (١ ، ٥) ، (٢ ، −٤)}

(ج) {(−١ ، ٤) ، (٠ ، ٤) ، (١ ، ٤) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٤)}

(د) {(−١ ، ١) ، (−١ ، ٢) ، (١ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٢ ، ٣)}

الحـــــل

٨ أرسم الشكل البياني للدالة **د** حيث :

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} -\text{س} - ١ \text{ ، } & \text{س} < ٠ \\ ٢\text{س} - ١ \text{ ، } & ٠ \leq \text{س} \leq ٣ \end{cases}$$

ومن الرسم حدد مدى الدالة د

الحـــــل

٩ أرسم الشكل البياني للدالة **د** حيث :

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} \text{ ، } & \text{س} < ٠ \\ ٣ \text{ ، } & ٠ \leq \text{س} \leq ٣ \\ -\text{س} + ٦ \text{ ، } & \text{س} > ٣ \end{cases}$$

الحـــــل

١٠ إذا كانت د : [١ ، ∞[⟵ ع حيث

د (س) = ١ ـ س ارسم الشكل البيانى للدالة

، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

الحـــــل

١١ ارسم الشكل البيانى للدالة ر حيث

ر :]-∞ ، -١] ⟵ ع ، ر (س) = ١ ـ س

، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

الحـــــل

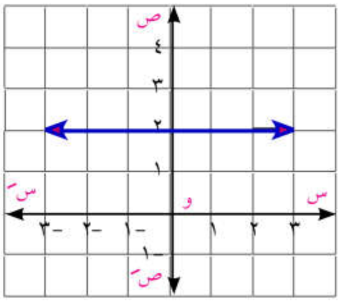
١٢ إذا كانت د(س) = { ٣ - س عندما -٢ ≤ س < ٢ ، س عندما ٢ ≤ س ≤ ٥ }

عين مجال الدالة د ومثلها بيانياً واستنتج من الرسم المدى

الحـــــل

١٣ فى كل من الأشكال البيانية التالية استنتج مجال ومدى الدالة

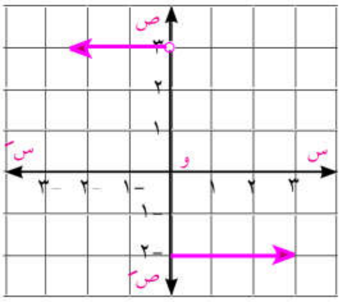
(أ)



المجال = ...

المدى = ...

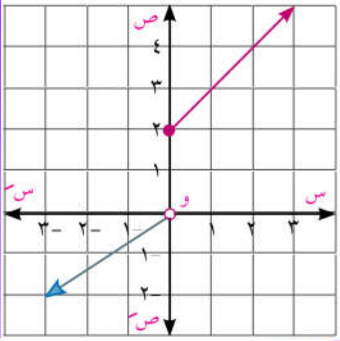
(ب)



المجال = ...

المدى = ...

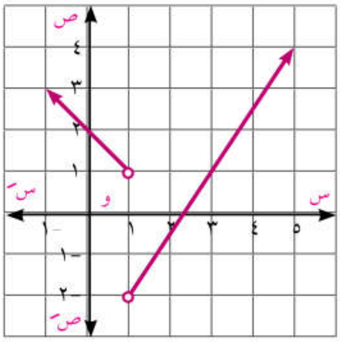
(جـ)



المجال = ...

المدى = ...

(د)



المجال = ...

المدى = ...

١٤

إذا كانت د: [-٢ ، ٣] ⟵ ح ، د(س) = ٣س + ٢

فإن مدى الدالة = ...

(أ) [-٤ ، ١١]
(ب) [-٤ ، ٩]
(جـ) [-٣ ، ٧]
(د) [-٢ ، ٢]

الحـــل

١٦

إذا كانت د(س) = $\begin{cases} س^2 + ١ & \text{عندما } س \geq ٠ \\ -س^2 - ١ & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$

مثل بيانياً الدالة ومن الرسم عين المجال والمدى

المجال = ...

المدى = ...

١٧ إذا كان س ، ص متغيرين حقيقيين فحدد أى علاقة مما يأتى تمثل قاعدة دالة فى س وأيها لا :

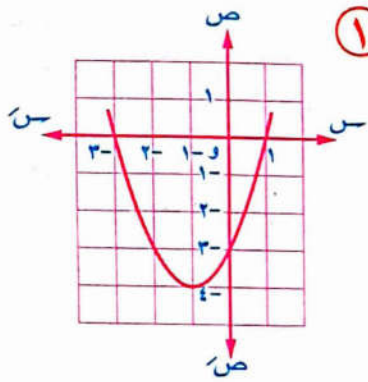
(١) ص = ٢ س + ٥
(٢) $\text{ص}^{٢}$ = س + ٤
(٣) ص = $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٤}$
(٤) $(\text{س} - \text{ص})^{٢}$ = ٥
(٥) $\text{ص}^{٣}$ − $\text{س}^{٢}$ = ٢
(٦) $\text{ص}^{٤}$ = $\text{س}^{٢}$ − ٤ س + ٤
(٧) ص = ٢
(٨) س = ٣
(٩) ص = ٣ جا س + جتا ٢ س
(١٠) س ص + ص = ٢ س + ٢

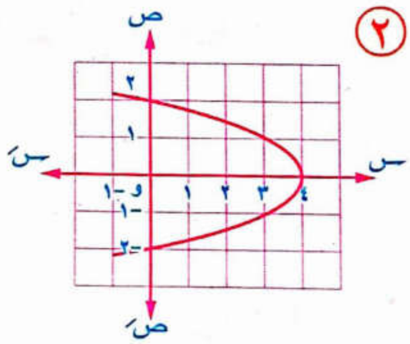
الحـــــل

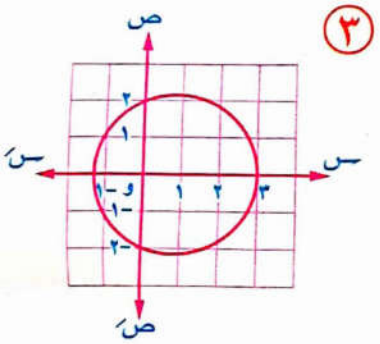
١

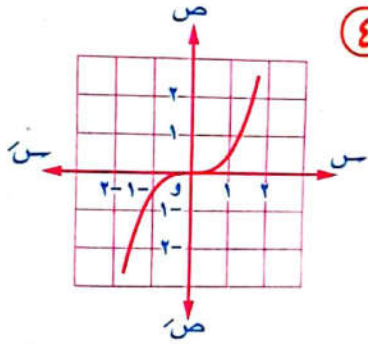
(١) ....
(٢) ....
(٣) ....
(٤) ....
(٥) ....
(٦) ....
(٧) ....
(٨) ....
(٩) ....
(١٠) ....

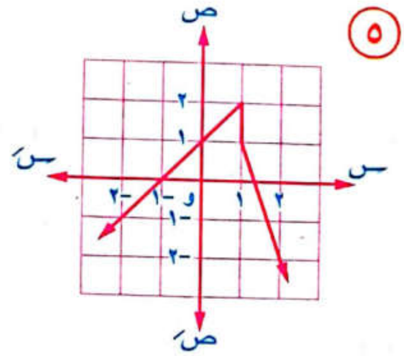
١٨ فى كل شكل من الأشكال الآتية بين ما إذا كانت ص تمثل دالة فى س أم لا :

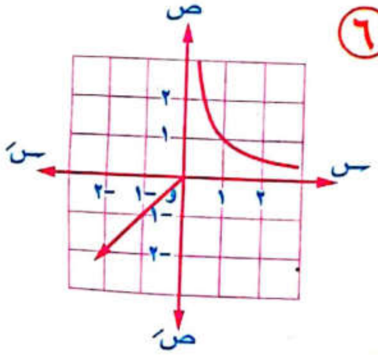
(١)


(٢)


(٣)


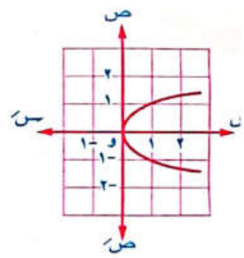
④


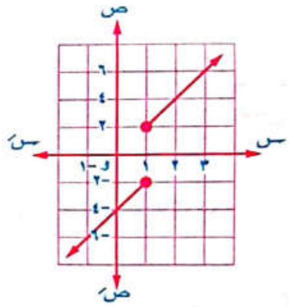
⑤


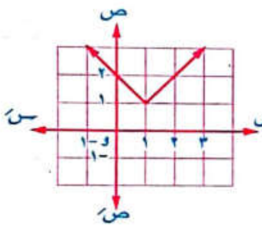
⑥


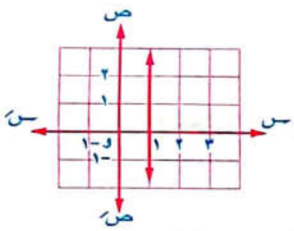
١٩ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الشكل الذى يمثل دالة فى س من بين الأشكال الآتية هو ....

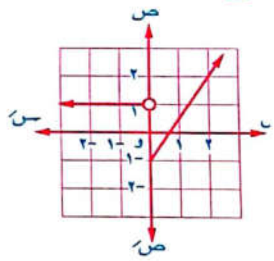

(أ)

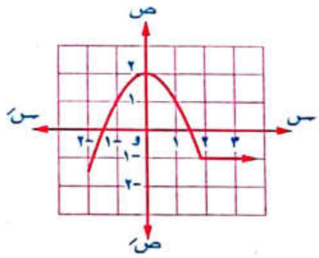

(ب)

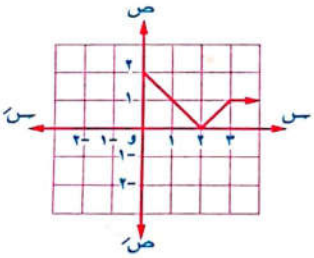

(جـ)

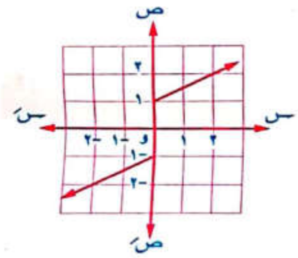

(د)

② أى الأشكال البيانية الآتية لا يمثل دالة فى س ؟


(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

③ جميع العلاقات الآتية تكون فيها ص دالة فى س ما عدا العلاقة ....

(أ) ص = ٣ س + ١ (ب) ص = س^{٢} − ٤

(جـ) س = ص^{٢} − ٢ (د) ص = جا س

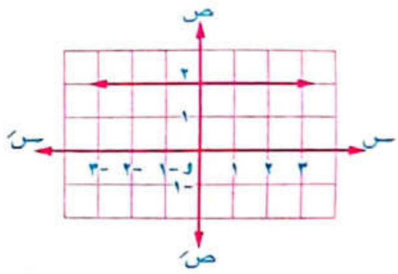
④ إذا كان مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٢}{س^{٢} - ٦ س + ك}$ هو ح − {٣}

فإن : ك = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ± ٩ (د) ١٨

٣٠ عين مجال ومدى ثم ابحث اطراد كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية :

①



المجال = ...

المدى = ...

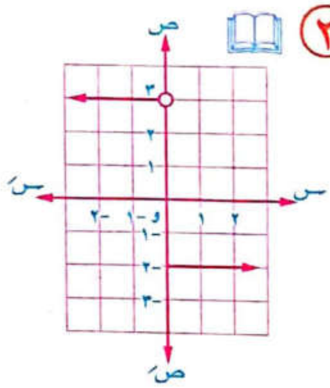
الإطراد :

....

....

....

②



المجال = ...

المدى = ...

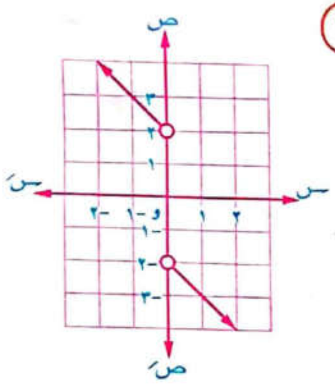
الإطراد :

....

....

....

③



المجال = ...

المدى = ...

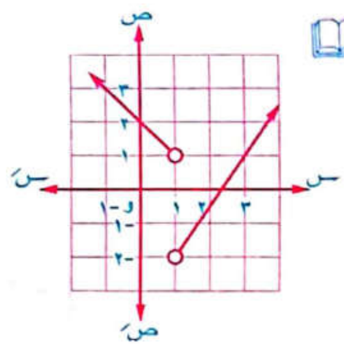
الإطراد :

....

....

....

④



المجال = ...

المدى = ...

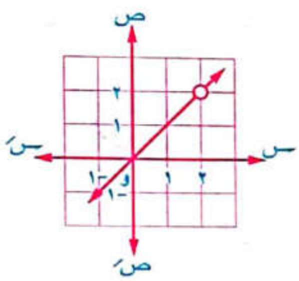
الإطراد :

....

....

....

⑤



المجال = ...

المدى = ...

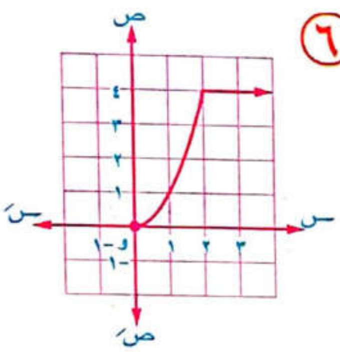
الإطراد :

....

....

....

⑥



المجال = ...

المدى = ...

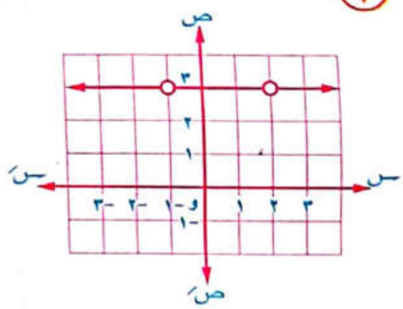
الإطراد :

....

....

....

٧



المجال = ...

المدى = ...

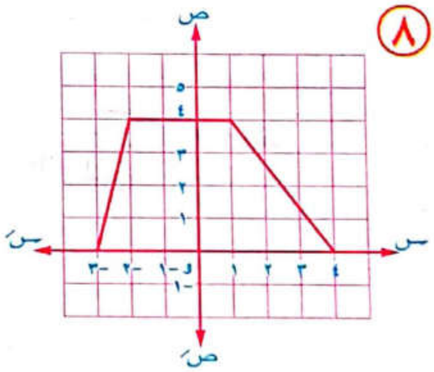
الإطراد :

....

....

....

٨



المجال = ...

المدى = ...

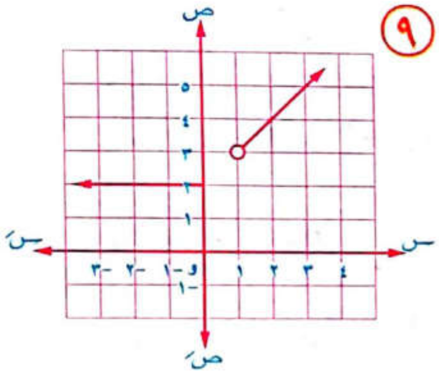
الإطراد :

....

....

....

٩



المجال = ...

المدى = ...

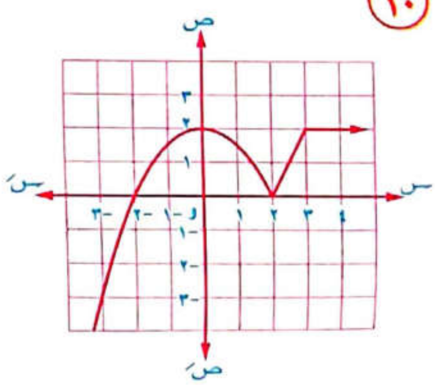
الإطراد :

....

....

....

١٠



المجال = ...

المدى = ...

الإطراد :

....

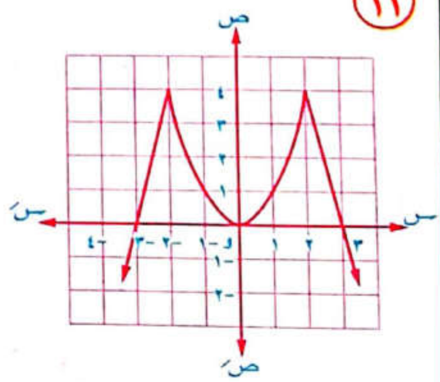
....

....

....

....

١١



المجال = ...

المدى = ...

الإطراد :

....

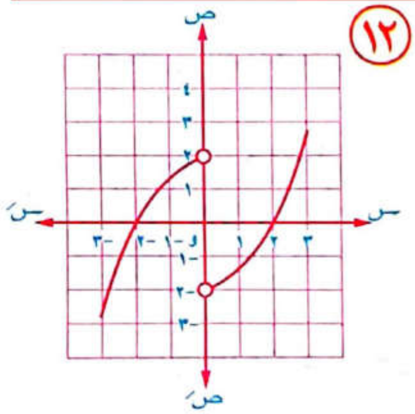
....

....

....

....

١٢



المجال = ...

المدى = ...

الإطراد :

....

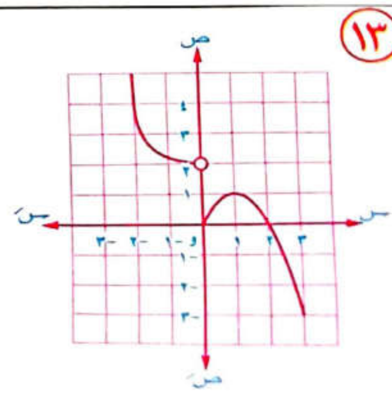
....

....

....

....

(١٣)



المجال = ...

المدى = ...

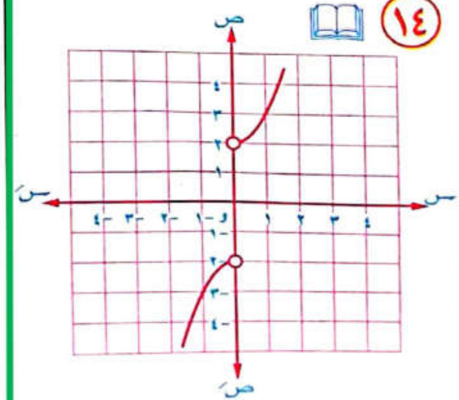
الإطراد :

....

....

....

(١٤)



المجال = ...

المدى = ...

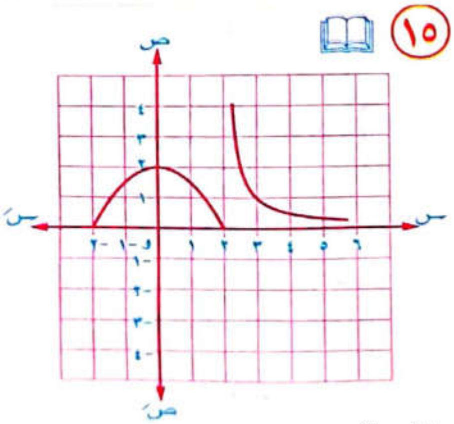
الإطراد :

....

....

....

(١٥)



المجال = ...

المدى = ...

الإطراد :

....

....

....

تعيين مجال بعض الدوال من خلال قاعدتها

أولاً : دوال كثيرات الحدود

مجالها هو ح ما لم تكن الدالة معرفة على مجموعة جزئية منها

فمثلاً

(١) د(س)=٤

دالة كثيرة الحدود ثابتة مجالها= ح

==========

(٢) د(س)=٢س-١

دالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى

مجالها = ح

==========

(٣) د (س)=س٢ -٢س + ٣

دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية

مجالها = ح

==========

ثانياً :الدالة الكسرية

الدالة د: د (س) = $\frac{ر(س)}{ن(س)}$

حيث كلاً من البسط والمقام كثيرتى حدود تسمى دالةكسرية مجالها = ح - { أصفار المقام }

مثـــال (١)

عين مجال كلاً من الدوال الآتية :

(١) د(س)= $\frac{١}{٢س - ٥}$

الحـــل

∵ د(س) دالة كسرية

مجالها = ح - { أصفار المقام }

نوجد أصفار المقام :

بوضع : ٢س-٥=٠

∴ س = $\frac{٥}{٢}$

∴ المجال = ح - { $\frac{٥}{٢}$ }

==========

(٢) د(س)= $\frac{س}{س^٣ - ٤س}$

الحـــل

∵د(س) دالة كسرية

∴ مجالها = ح - { أصفار المقام }

نوجد أصفار المقام :

بوضع : س٣ - ٤س=٠

بأخذ س عامل مشترك

س (س٢-٤)=٠

∴ $س(س-٢)(س+٢)=٠$

إما $س=٠$ | أو $س-٢=٠$ | أو $س+٢=٠$

∴ $س=٠$ ، $س=٢$ ، $س=-٢$

∴ المجال = ح - { ٠ ، ٢ ، -٢ }

---

③ $د(س) = \frac{س+٢}{س^{٢}-٣س+٢}$

الحل

∵ د(س) دالة كسرية

مجالها = ح - { أصفار المقام }

بوضع المقام = ٠

∴ $س^{٢}-٣س+٢=٠$

∴ $(س-٢)(س-١)=٠$

إما $س-٢=٠$ | أو $س-٣=٠$

∴ $س=٢$ | $س=١$

∴ المجال = ح - {٢ ، ١}

---

④ $د(س) = \frac{٣س+٥}{س^{٢}+٤}$

الحل

∵ د(س) دالة كسرية .

مجالها = ح - { أصفار المقام }

بوضع $س^{٢}+٤=٠$

∴ $س^{٢}=-٤$

(لايوجد عدد حقيقى مربعه = عدد سالب)

∴ مجموعة أصفار المقام = ∅

∴ المجال = ح - ∅ = ح

---

③ $د(س) = \frac{س^{٢}-٢س+١}{س^{٣}+٨}$

الحل

∵ د(س) دالة كسرية .

مجالها = ح - { أصفار المقام }

بوضع $س^{٣}+٨ = ٠$

(بتحليل مجموع مكعبين)

∴ $(س+٢)(س^{٢}-٢س+٤) = ٠$

إما $س+٢=٠$ | أو $س^{٢}-٢س+٤=٠$

∴ $س=-٢$ | ليس له أصفار فى ح

∴ المجال = ح - { -٢ }

ثالثاً : تعيين مجال الدالة الجذرية على الصورة : د (س) = $\sqrt[م]{ر(س)}$

١ إذا كانت م عدد فردي فإن :

مجال د = مجال ر

---

٢ إذا كانت م عدد زوجي فإن :

مجال د هو قيم س التى تجعل

ر (س) ≥ ٠

مثال ٢

عين مجال كلاً من الدوال الآتية :

١ د (س) = $\sqrt{س - ٣}$

الحل

∵ دليل الجذر زوجى

∴ نوجد قيم س التى تجعل :

س - ٣ ≥ ٠

∴ س ≥ ٣

∴ المجال = [٣ ، ∞ [

---

٢ د (س) = $\sqrt[٣]{س + ٥}$

الحل

∵ دليل الجذر فردى

مجال د = مجال ر

، ر (س) = س + ٥ دالة كثيرة

الحدود من الدرجة الأولى مجالها = ح

∴ مجال الدالة د = ح

---

٣ د (س) = $\sqrt{٣ - س}$

الحل

∵ دليل الجذر زوجى

∴ نوجد قيم س التى تجعل :

٣ - س ≥ ٠

∴ - س ≥ - ٣

بالضرب × (-١) للطرفين

∴ س ≤ ٣

∴ المجال =] - ∞ ، ٣]

---

٤ د (س) = $\sqrt{س^٢ - ٥س + ٦}$

الحل

∵ دليل الجذر زوجى

مجا ل هو قيم س التى تجعل :

س^٢ - ٥س + ٦ ≥ ٠

نوجـــد جذري المعادلة :

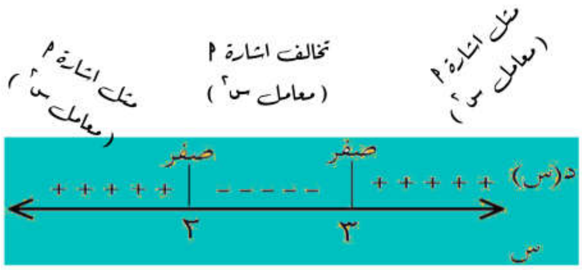
$س^٢ - ٥س + ٦ = ٠$

$\therefore$ (س-٢)(س-٣) = ٠

إما س-٢ = ٠ | أو س-٣ = ٠

$\therefore$ س = ٢ | س = ٣

نبحث اشارة المقدار ($س^٢ - ٥س + ٦$)



$\therefore$ المقدار : $س^٢ - ٥س + ٦ \geq ٠$

عندما س ∈ ح -] ٢ ، ٣ [

$\therefore$ المجال = ح -] ٢ ، ٣ [

---

٥ د(س) = $\sqrt[3]{\frac{٣س + ٥}{س - ١}}$

الحل

$\because$ دليل الجذر فردى = ٣

$\therefore$ مجال د = مجال الدالة تحت الجذر

وهى دالة كسر جبرى مجاله

= ح - { أصفار المقام }

$\therefore$ المجال = ح - {١}

٦ ن(س) = $\sqrt[4]{\frac{س^٢ - ٥س + ٦}{٤س - س^٢}}$

الحل

مجال الدالة س هو قيم س التى تجعل

كلاً من البسط والمقام موجبين معاً أو سالبين معاً

بفرض أن

دالة البسط : د(س) = $س^٢ - ٥س + ٦$

دالة المقام : ر(س) = $٤س - س^٢$

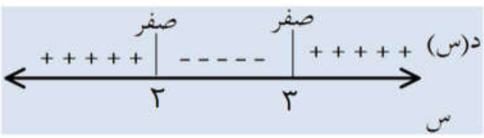
بتعيين الفترات التى تكون فيها

الدالتين موجبتين معا أوسالبتين معا

نبحث إشارة الدالة د:

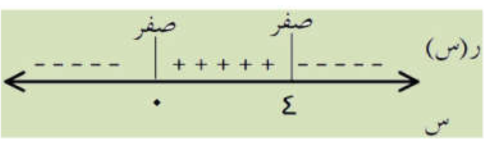
جذرا المعادلة الأولى هما : ٢ ، ٣

$\therefore$ إشارة دالة المقام



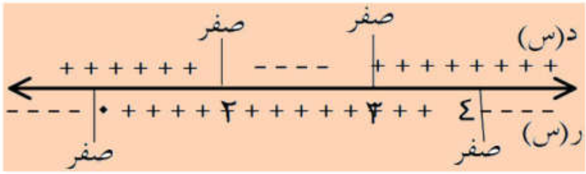
جذرا المعادلة الثانية هما : ٠ ، ٤

$\therefore$ إشارة دالة المقام



ببحث إشارة الدالتين على خط أعداد

واحد كما بالشكل :



نلاحظ أن الدالتين موجبتين معاً فى

] ٠ ، ٢ [،] ٣ ، ٤ [

يكون فيها الدالتان موجبتان معاً

وأيضاً تكون معرفة عند أصفار البسط

∴ المجال = الفترات التى تكون فيها

الدالتين موجبتين معاً ∪ مجموعة

أصفار البسط

∴ **مجـــال الدالـــــة** ω

=] ٠ ، ٢ [∪] ٣ ، ٤ [∪ { ٢ ، ٣ }

= [٠ ، ٢] ∪] ٣ ، ٤]

تدريب

١ عين مجال الدالة د: د (س) = $\sqrt[3]{٢س + ١}$

الحـــل

٢ عين مجال الدالة د: د (س) = ٢ س + ١

الحـــل

٣ عين مجال الدالة د: د (س) = $\sqrt{س - ٥}$

الحـــل

٤ عين مجال الدالة د:

$د(س) = \sqrt{س^٢ - ٥س + ٤}$

الحـــــل

٥ عين مجال الدالة د:

$د(س) = \sqrt{٤ - س^٢}$

الحـــــل

٥ عين مجال الدالة د:

$د(س) = \sqrt{\frac{س^٢ - ٥س - ٦}{س^٢ - ٤}}$

الحـــــل

سلسلة الفاروق

في

(٢)

كشكول الواجب

للصف الثانى الثانوي

الفصل الدراسي الأول

واجب الحصة الأولي

اسم الطالب / ------------------------------------

١ عين مجال كلاً من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية

① $د(س) = \frac{٢س + ١}{س - ٢}$

الحــــل

② $د(س) = \frac{س + ٣}{س^{٢} - ٩}$

الحــــل

③ $د(س) = \frac{٢س + ٣}{س^{٢} - ٣س + ٢}$

الحــــل

④ $د(س) = \frac{س^{٢} + ١}{س^{٢} + ٤س}$

الحــــل

⑤ $د(س) = \frac{س^{٢} - ١}{٣س^{٣} + ١٢س}$

الحــــل

⑥ $د(س) = \frac{٥ + ٢س}{س^{٢} + س + ١}$

الحــــل

⑦ $د(س) = \frac{٧}{س^{٣} - س}$

الحــــل

⑧ $د(س) = \frac{٨}{س^٢ - ٦ س + ٩}$

الحـــل

⑨ $د(س) = \frac{س + ٣}{٣ س^٢ - س - ٢}$

الحـــل

⑩ $د(س) = \frac{س + ١}{س^٣ + ١}$

الحـــل

② عين مجال كلاً من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية

① $د(س) = \sqrt{س - ٣}$

الحـــل

② $د(س) = \sqrt{٢ - س}$

الحـــل

③ $د(س) = \sqrt[٣]{س - ٥}$

الحـــل

④ $د(س) = \sqrt[4]{س^{٢} + ٤}$

الحـــل

---

⑤ $د(س) = \frac{٤}{\sqrt[3]{٢س - ٥}}$

الحـــل

---

⑥ $د(س) = \frac{٣}{\sqrt{س - ٣}}$

الحـــل

---

⑦ $د(س) = \frac{٧}{س^{٣} - س}$

الحـــل

---

⑧ $د(س) = \sqrt{س^{٢} - ١٦}$

الحـــل

---

⑨ $د(س) = \sqrt{٤ - س^{٢}}$

الحـــل

---

⑩ $د(س) = \frac{٥}{\sqrt{٩ - س^{٢}}}$

الحـــل

(١١) د (س) = $\sqrt{س^{٢} + ٢ س + ٥}$

الحـــــل

(١٢) د (س) = $\frac{١}{\sqrt{س^{٢} - ٥ س - ٦}}$

الحـــــل

(١٣) د (س) = $\frac{١}{\sqrt{س^{٢} - ٤ س + ٤}}$

الحـــــل

(١٤) د (س) = $\frac{٥}{\sqrt{س} - ١}$

الحـــــل

٣ عين مجال كلاً من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية

(١) د (س) = $\begin{cases} -٢ & ، س > ٢ \\ ٣ & ، س < ٢ \end{cases}$

الحـــــل

(٢) د (س) = $\begin{cases} -٣ & ، س > ٣ \\ ٥ - س & ، س \leq ٣ \end{cases}$

الحـــــل

③ $د(س) = \begin{cases} س & ، \ ٠ \le س \le ١ \\ ٢ - س & ، \ ١ < س \le ٢ \end{cases}$

الحل

----

④ $د(س) = \begin{cases} س^{٢} - ١ & ، \ س \le ٢ \\ -٥ & ، \ ٢ < س < ٤ \end{cases}$

الحل

----

⑤ $د(س) = \begin{cases} ٣س & ، \ س \in [٠ ، ٢] \\ ٦ & ، \ س \in]٢ ، ٤] \\ س + ٢ & ، \ س \in [٤ ، ٦] \end{cases}$

الحل

----

٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

① إذا كانت العلاقة بين قياسات زوايا المضلع (ص) ، عدد أضلاع المضلع (س) هي ص = π (س − ٢) فإن مجال الدالة ص = ...

(أ) $ح^{+}$ (ب) ح − {٢}

(جـ) $ص^{+}$ (د) $ص^{+}$ − {١ ، ٢}

الحل

----

② مجال الدالة $د(س) = \frac{س}{\sqrt[٣]{س - ٢}}$ هو ....

(أ) ح   (ب) ح − {٢}

(جـ) ح − {٠ ، ٢}   (د) ح − {٨}

الحل

----

③ مجال الدالة $د(س) = \frac{س}{\sqrt{٣س - س}}$ هو ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٠]

(جـ)]٠ ، ∞[− {١}   (د)]٠ ، ∞[− {٣}

الحل

----

④ مجال الدالة $د(س) = \frac{٥}{\sqrt{س - ١} - ٣}$ هو ....

(أ) [١ ، ∞[(ب) [١ ، ∞[− {٣}

(جـ) [١ ، ∞[− {١٠}   (د) [−٣ ، ∞[

الحل

⑤ مجال الدالة د (س) = $\frac{٧}{\sqrt{\text{س} - ١} + ٣}$ هو ....

(أ) [١ ، ∞[(ب) [١ ، ∞[− {−٣}

(ج) [١ ، ∞[− {١٠} (د) [٣ ، ∞[

الحـــــل

---

⑥ مجال الدالة د (س) = $\sqrt{٦\text{س} - ٩ - \text{س}^٢}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٣}

(جـ) [٣ ، ∞[(د) {٣}

الحـــــل

---

⑦ إذا كانت الدالة د حيث د : ح − {٢} ⟵ ح د(س) = $\frac{٣\text{س} - ١}{\text{س} - \text{أ} + ١}$ ،

فإن د(أ) = ...

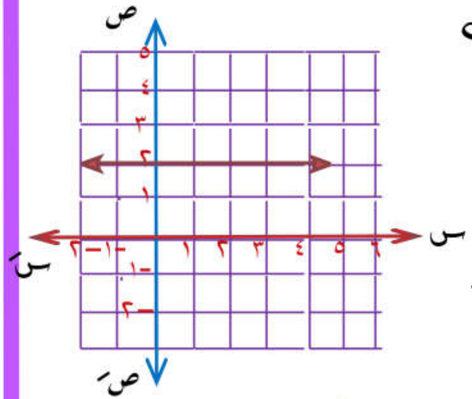
(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٧ (د) ٨

الحـــــل

اختبار رقم (١) جبر ثانية ثانوي

في كل من الأشكال الآتية عين المجال والمدى

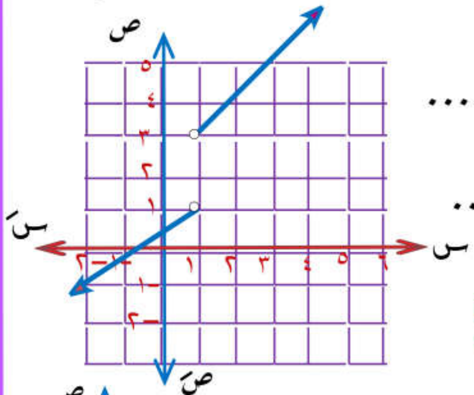
①



المجال =.....

المدى =.....

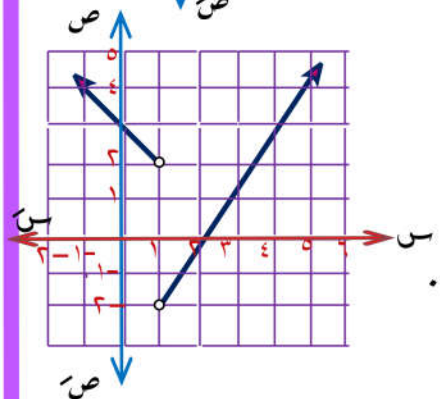
②



المجال =.....

المدى =.....

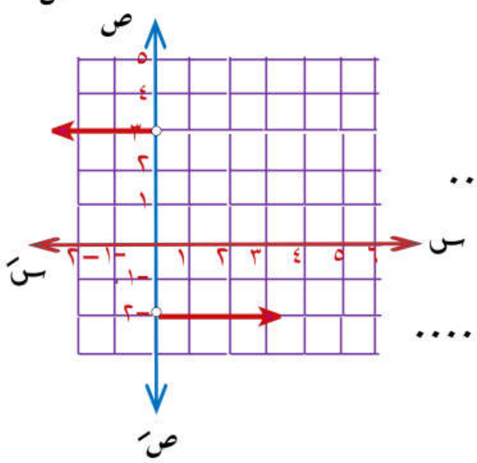
③



المجال =.....

المدى =.....

④



المجال =.....

المدى =.....

٥ إذا كانت

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \text{٣ - س} & \text{عندما } \text{-٢} \leqslant \text{س} < \text{٢} \\ \text{س} & \text{عندما } \text{٢} \leqslant \text{س} \leqslant \text{٥} \end{cases}$$

ارسم الشكل البيانى للدالة واستنتج

من الرسم مجال الدالة ومداها.

العمليات على الدوال ــ تركيب دالتين

أولاً : العمليات على الدوال
[جمع - طرح - ضرب - قسمة] دالتين

إذا كان د١ ، د٢ دالتين مجالهما م١ ، م٢

حيث :

م١ ∩ م٢ ≠ ∅

فإن :

١ جمع وطرح دالتين

(د١ + د٢) (س) = د١ (س) + د٢ (س)

مجال (د١ + د٢) = م١ ∩ م٢

أى أن جمع دالتين هو دالة جديدة :

قاعدتها = مجموع قاعدتى الدالتين

ومجالها = تقاطع مجالى الدالتين

مثال ١

إذا كانت د١ (س) = ٣س + ١ ومجالها = [١ ، ٥]

، د٢ (س) = س٢ + س + ٢ ومجالها = [٣ ، ٧]

فأوجد :

١ د١ + د٢ ثم أوجد

(د١ + د٢) (٤) ، (د١ + د٢) (٧)

إن أمكن

٢ د١ - د٢

الحـــل

∵ م١ = [١ ، ٥] ، م٢ = [٣ ، ٧]

نوجد تقاطع مجالي الدالتين

∴ م١ ∩ م٢ = [١ ، ٥] ∩ [٣ ، ٧] = [٣ ، ٥]

١

∵ (د١ + د٢) (س) = د١ (س) + د٢ (س)

= (٣س + ١) + (س٢ + س + ٢)

= س٢ + ٤س + ٣

ومجال (د١ + د٢) = م١ ∩ م٢

= [١ ، ٥] ∩ [٣ ، ٧]

= [٣ ، ٥]

∴ (د١ + د٢) (س) = س٢ + ٤س + ٣

ومجال (د١ + د٢) = [٣ ، ٥]

، ∵ ٣ ∈ لمجال (د١ + د٢)

∴ (د١ + د٢) (٣) = (٣)٢ + ٤ × ٣ + ٣

= ٩ + ١٢ + ٣ = ٢٤

، ∵ ٧ ∉ [٣ ، ٥]

∴ (د١ + د٢) (٧) غير معرفة

② ∵ $(\text{د}_١ - \text{د}_٢)(\text{س}) = \text{د}_١(\text{س}) - \text{د}_٢(\text{س})$

$= (٣\text{س} + ١) - (\text{س}^٢ + \text{س} + ٢)$

$= ٣\text{س} + ١ - \text{س}^٢ - \text{س} - ٢$

$= -\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ١$

ومجال $(\text{د}_١ - \text{د}_٢) = \text{م}_١ \cap \text{م}_٢$

$= [١ ، ٥] \cap [٣ ، ٧]$

$= [٣ ، ٥]$

∴ $(\text{د}_١ - \text{د}_٢)(\text{س}) = -\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ١$

، ومجال $(\text{د}_١ - \text{د}_٢) = [٣ ، ٥]$

ملحوظة مهمة

الدالة التى تساوى مجموع دالتين

مجالها = تقاطع مجالى الدالتين

مثال ٢

عين مجال كلاً من الدوال الآتية

① $\text{د}(\text{س}) = \text{س} + \frac{١}{\text{س}}$

الحل

الدالة $\text{ر}(\text{س}) = \text{س}$ **مجالها هو** $\text{م}_١ = \text{ع}$

الدالة : $\text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}}$ **مجالها** $\text{م}_٢ = \text{ع} - \{٠\}$

② $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^٢ + \sqrt{\text{س} - ١}$

الحل

∵ د تتكون من مجموع دالتين

$\text{ر}(\text{س}) = \text{س}^٢$ هو $\text{م}_١ = \text{ع}$

الدالة $\text{ن}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} - ١}$

∵ دليل الجذر زوجى

∴ الدالة معرفة عندما $\text{س} - ١ \geq ٠$

∴ $\text{س} \geq ١$

∴ مجال الدالة ن هو: $\text{م}_٢ = [١ ، \infty[$

∴ مجال د $= \text{م}_١ \cap \text{م}_٢$

$= \text{ع} \cap [١ ، \infty[$

$= [١ ، \infty[$

③ $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{٧ - \text{س}} - \sqrt{\text{س} - ٢}$

الحل

الدالة د تتكون من طرح دالتين

الدالة ر : $\text{ر}(\text{س}) = \sqrt{٧ - \text{س}}$

∵ دليل الجذر زوجى

∴ ر تكون معرفة عندما

$٧ - \text{س} \geq ٠$

∴ - س ≥ -٧ بالضرب × (-١) للطرفين

∴ س ≤ ٧

∴ مجال الدالة ر هو م١ =]-∞، ٧]

الدالة ى : ى(س) = √(س-٢)

∵ دليل الجذر زوجي

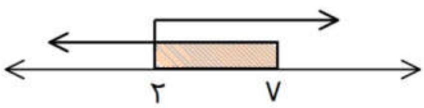
∴ ى تكون معرفة عندما

س - ٢ ≥ ٠   ∴ س ≥ ٢

∴ مجال الدالة ى هو م٢ = [٢، ∞[

∴ مجال د = م١ ∩ م٢

=]-∞، ٧] ∩ [٢، ∞[



∴ مجال د = [٢، ٧]

---

٤ د(س) = ∛(س-٣) + √(س²-٣س-٤)

الحل

∵ د تساوي مجموع دالتين هما :

ر حيث ر(س) = ∛(س-٣)

∴ مجال ر هو م١ = ح

، الدالة ى حيث :

ى(س) = √(س²-٣س-٤)

∵ دليل الجذر زوجي

∵ الدالة تكون معرفة عندما

س²-٣س-٤ ≥ ٠

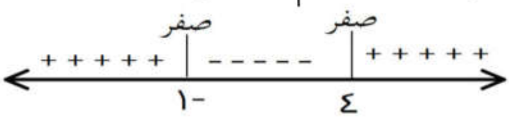
بوضع : س²-٣س-٤ = ٠

∴ (س - ٤)(س + ١) = ٠

إما

س-٤ = ٠ | أو س + ١ = ٠

∴ س = ٤ | س = -١



الدالة تكون معرفة عندما

س ∈ ح -]-١، ٤[

∴ مجال ى هو م٢ = ح -]-١، ٤[

∴ مجال د = م١ ∩ م٢

= ح ∩ (ح -]-١، ٤[)

= ح -]-١، ٤[

---

٥ د(س) = √(س-١) + √(٤-س²)

الحل

الدالة د تتكون من مجموع دالتين

الدالة ر حيث ر(س) = √(س-١)

∵ دليل الجذر زوجى

∴ الدالة تكون معرفة

$\text{س}-١ \geq ٠$ ∴ $\text{س} \geq ١$

∴ مجال ر هو م_1 = [١، ∞[

، الدالة ى حيث

ى(س) = $\sqrt{٤ - \text{س}^2}$

∵ دليل الجذر زوجى

∵ الدالة تكون معرفة عندما

$٤ - \text{س}^2 \geq ٠$

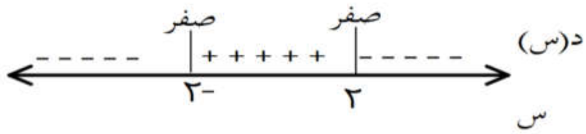
بوضع : $٤ - \text{س}^2 = ٠$

∴ (٢ - س)(٢ + س) = ٠

إما ٢ - س = ٠ | أو ٢ + س = ٠

∴ س = ٢ | س = -٢

نبحث إشارة المقدار $(٤ - \text{س}^2)$

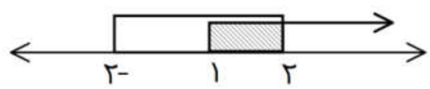


الدالة تكون معرفة

عندما س ∈ [-٢، ٢]

∴ مجال ى هو م_2 = [-٢، ٢]

∴ مجال د = $\text{م}_1 \cap \text{م}_2$



= [١، ∞[∩ ([-٢، ٢])

= [١، ٢]

∴ مجال د = [١، ٢]

٢ جمع وطرح دالتين

$(\text{د}_1.\text{د}_2)(\text{س}) = \text{د}_1(\text{س}) \times \text{د}_2(\text{س})$

ومجال $(\text{د}_1.\text{د}_2) = \text{م}_1 \cap \text{م}_2$

مثال ٣

عين مجال كلاً من الدوال الآتية

١ د(س) = س $\sqrt{\text{س}-٣}$

الحل

الدالة تتكون من حاصل ضرب

∴ مجالها = تقاطع مجالى الدالتين

مجال ر : ر(س) = س

هو م_1 = ح

، مجال الدالة ى : ى(س) = $\sqrt{\text{س}-٣}$

بوضع : $\text{س}-٣ \geq ٠$ ∴ $\text{س} \geq ٣$

∴ مجال الدالة ى هو م_2 = [٣، ∞[

∴ مجال الدالة د = $\text{م}_1 \cap \text{م}_2$

= ح ∩ [٣، ∞[

= [٣، ∞[

② د(س) = (س² - ٤س) √(٤-س)

الحل

∵ د(س) = حاصل ضرب دالتين

∴ مجال د = تقاطع مجالى هاتين الدالتين

الدالة ر: ر(س) = س² - ٤س

دالة كثيرة الحدود مجالها هو م١ = ح

الدالة ن: ن(س) = √(٤-س)

تكون معرفة عندما: ٤-س ≥ ٠

∴ -س ≥ ٤ بالضرب فى (-١)

∴ س ≤ -٤

∴ مجال الدالة ن هو

م٢ =]-∞ ، ٤]

∴ مجال الدالة د = م١ ∩ م٢

= ح ∩]-∞ ، ٤]

=]-∞ ، ٤]

****

③ قسمة دالتين

$(\frac{د}{ر})(س) = \frac{د(س)}{ر(س)}$

، مجال $(\frac{د}{ر})$

= مجال د ∩ مجال ر − {أصفار الدالة ر}

∴ قسمة دالتين = دالة جديدة

قاعدتها = خارج قسمة الدالتين

مجالها = تقاطع مجالى الدالتين - {أصفار دالة المقام}

مثال ④

عين مجال كلاً من الدوال الآتية

① د(س) = $\frac{\sqrt{س-١}}{\sqrt{٧-س}}$

الحل

دالة البسط: ر(س) = √(س-١)

تكون معرفة عندما: س-١ ≥ ٠

∴ س ≥ ١

∴ مجال دالة البسط = [١ ، ∞[

دالة المقام : ع (س) = $\sqrt{٧ - س}$

تكون معرفة عندما : ٧ - س ≥ ٠

∴ - س ≥ -٧ بالضرب × (-١) للطرفين

∴ س ≤ ٧

∴ مجال دالة المقام =]-∞، ٧]

أصفار دالة المقام

بوضع : $\sqrt{٧ - س}$ = ٠

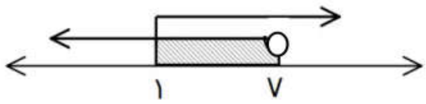
بالتربيع للطرفين

∴ ٧ - س = ٠

∴ س = ٧

مجال الدالة :

= مجال ر ∩ مجال ع - {أصفار الدالة ع}



= [١، ∞[∩]-∞، ٧] - {٧}

= [١، ٧] - {٧} = [١، ٧[

---

٢ د(س) = $\frac{\sqrt{س - ١}}{\sqrt{٩ - س^٢}}$

الحــــل

دالة البسط : ر (س) = $\sqrt{س - ١}$

تكون معرفة عندما : س - ١ ≥ ٠

∴ س ≥ ١

∴ مجال دالة البسط = [١، ∞[

دالة المقام : ع (س) = $\sqrt{٩ - س^٢}$

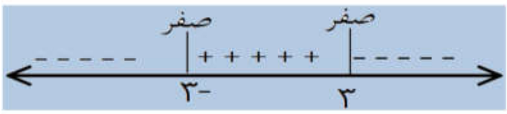
تكون معرفة عندما : ٩ - س^٢ ≥ ٠

نبحث إشارة المقدار (٩ - س^٢)

بوضع : ٩ - س^٢ = ٠

(٣ - س) (٣ + س) = ٠

إما ٣ - س = ٠ ∴ س = ٣ | أو ٣ + س = ٠ س = -٣



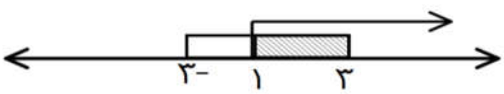
∴ مجال دالة المقام = [-٣، ٣]

= أصفار دالة المقام = {٣، -٣}

مجال د

مجال ع ∩ مجال ر - {أصفار الدالة ر}

= (



[١، ∞[∩ [-٣، ٣]) - {٣، -٣}

= [١، ٣[

ثانيا : تركيب دالتين

إذا كانت : د ، ر دالتين و كان مدى الدالة ر تقاطع مجال الدالة د لا يساوى ∅ فإنه يمكن استنتاج دالة جديدة ع تتركب من الدالتين السابقتين

ع = (د ∘ ر) وتقرأ [د تركيب ر] أو [د بعد ر]

ويكون :

(د ∘ ر) (س) = د [ر (س)]

مجال :(د ∘ ر) يتكون من مجموعة قيم س التى فى الدالة ر والتى تجعل ر (س) فى مجال الدالة د

مجال :(د ∘ ر)

= { س : س ∈ مجال ر ، ر (س) ∈ مجال د }

لإيجاد مجال (د ∘ ر)

(١) نوجد م١ = مجال الدالة ر

(٢) نعين قيم س التى تجعل قيم س التى فى الدالة ر والتى تجعل ر (س) فى مجال الدالة د فتكون مجموعة القيم هى م٢

(٣) مجال (د ∘ ر) = م١ ∩ م٢

مثال (٥)

إذا كانت :

د (س) = $س^٣$ ، ر (س) = س + ١

فأوجد :

١) (د ∘ ر) (١) ، (د ∘ ر) (-١)

٢) (ر ∘ د) (١) ، (ر ∘ د) (-١)

الحل

(١) نوجد (د ∘ ر) (س)

(د ∘ ر) = د [ر (س)]

(د ∘ ر) (س) = $(س + ١)^٣$

عند س = ١

(د ∘ ر) (١) = $(١ + ١)^٣$

= $(٢)^٣$

= ٨

عند س = - ١

(د ∘ ر) (-١) = $(-١ + ١)^٣$

= $(٠)^٣$

= ٠

---

٢ نوجد (ر ∘ د) (س)

(ر ∘ د) (س) = ر [د (س)]

(ر ∘ د) (س) = $س^٣$ + ١

عند س=١

(ر ٥ د) (١) = $(١)^{٣}$ + ١

= ١ + ١

= ٢

عند س=-١

(ر ٥ د) (١) = $(-١)^{٣}$ + ١

= -١+١

=٠

==

مثـــال ٦

إذا كان :

د(س) = $\sqrt{\text{س}-١}$ ، ر(س) = $\text{س}^{٢}$-٣

أوجد : (د ٥ ر) (س) موضحا المجال

ثم أوجد : (د ٥ ر) (٢)

الحـــل

(د ٥ ر) (س) = د[ر(س)]

= $\sqrt{\text{ر(س)}-١}$

= $\sqrt{\text{س}^{٢}-٣-١}$

= $\sqrt{\text{س}^{٢}-٤}$

∴ (د ٥ ر) (س) = $\sqrt{\text{س}^{٢}-٤}$

نعين مجال (د ٥ ر)

(١) نوجد مجال الدالة ر

حيث ر(س)=$\text{س}^{٢}$-٣ وهى دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية مجالها

$\text{م}_{١}$ = ح

(٢) نوجد مجال (د ٥ ر) (س)

∵ (د ٥ ر) = $\sqrt{\text{س}^{٢}-٤}$

∴ (د ٥ ر) تكون معرفة عندما

$\text{س}^{٢}$-٤ ≥ ٠

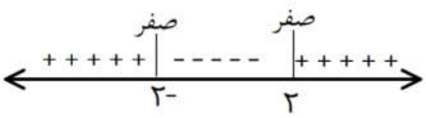
ببحث إشارة المقدار ($\text{س}^{٢}$-٤ ≥ ٠)

بوضع : $\text{س}^{٢}$-٤=٠

∴ (س-٢)(س+٢)=٠

إما

س-٢=٠	أو س+٢=٠
س= ٢	س= -٢



∴ الدالة (د ٥ ر) تكون معرفة

عندما س ∈ ح -] -٢، ٢ [

∴ $\text{م}_{٢}$ = ح-] -٢، ٢ [

٣) مجال الدالة :(د ٥ ر)

= $\text{م}_{١} \cap \text{م}_{٢}$

= ح ∩ (ح-] -٢، ٢ [ )

= ح-] -٢، ٢[

∵ ٢ ∈ لمجال الدالة :(د ٥ ر)

(د ٥ ر)(٢) = $\sqrt{(٢)^{٢}-٤}$ = ٤-٤ = ٠

مثـــال (٧)

إذا كانت د(س) = $\sqrt{س-٣}$ ،

ر(س) = $\sqrt{٥-س}$

فأوجد مجال (د ∘ ر)

الحـــل

(١) نوجد مجال الدالة ر :

ر(س) = $\sqrt{٥-س}$

ر(س) تكون معرفة عندما :

٥-س ≥ ٠

-س ≥ -٥ بالضرب × (-١) للطرفين

∴ س ≤ ٥

∴ $م_١$ =]-∞ ، ٥]

(٢) نوجد : (د ∘ ر)(س)

(د ∘ ر)(س) = $\sqrt{\sqrt{٥-س} -٣}$

نوجد قيم س التى تجعل :

$\sqrt{٥-س}$ -٣ ≥ ٠

∴ $\sqrt{٥-س}$ ≥ ٣ بتربيع الطرفين

∴ ٥ - س ≥ ٩

∴ -س ≥ ٩-٥

∴ -س ≥ ٤ بالضرب × (-١) للطرفين

∴ س ≤ -٤

∴ س ∈]-∞ ، -٤]

∴ $م_٢$ =]-∞، -٤]

(٣) مجال الدالة (د ∘ ر)

= $م_١ \cap م_٢$

=]-∞، ٥] ∩]-∞، -٤]

=]-∞، -٤]

بعض خواص الدوال
الدوال الزوجية والدوال الفردية - الدوال الإحادية

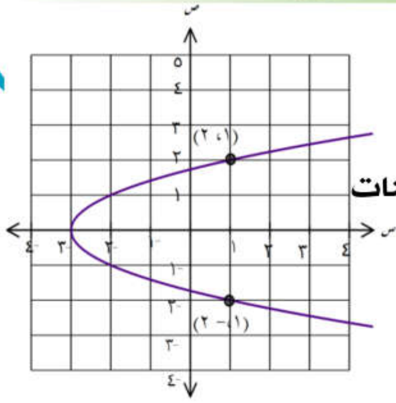
التماثل

أولاً : التماثل حول محور السينات

الشكل البيانى الممثل لعلاقة يكون متماثل حول محور السينات

إذا كان: لكل نقطة أ (س، ص) تقع على المنحنى توجد نقطة أخرى أ َ(س، -ص) تقع على هذا الشكل

الشكل المقابل :



متماثل حور محور السينات

هذا النوع من الأشكال البيانية لايمثل دالة لوجود خط رأسى يقطع المنحنى فى أكثر من نقطة

مثال ١

إذا كانت النقطة (٣ ، -١) تقع على شكل بيانى متماثل حول محور السينات فإن النقطة .... تقع على نفس الشكل البيانى

مثال ٢

شكل بيانى متماثل حول محور السينات ورسم خط رأسى فقطع الشكل فى النقطتين أ ، ب حيث أ = (٢ ، ٣) فإن طول أ ب = ...

مثال ٣

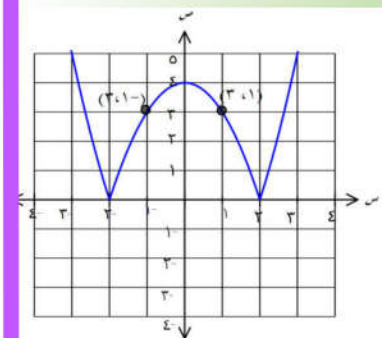
شكل بيانى متماثل حول محور السينات ورسم خط رأسى فقطع الشكل فى النقطتين أ ، ب حيث أ = (س ، ٣) وكان منتصف أ ب = (٨ ، ص) فإن :

س + ص = ...

ثانياً : التماثل حول محور الصادات

يكون الشكل البيانى متماثل حول محور الصادات إذا كان لكل نقطة أ (س، ص)تقع على هذا الشكل توجد نقطة أخرى أ َ(-س، ص) تقع أيضا على هذا الشكل

الشكل المقابل :



يمثل منحنى متماثل حول محور الصادات

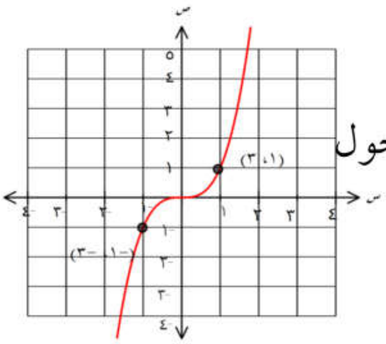
مثال ٤

إذا كانت النقطة (-٣ ، -٢) تقع على منحنى بيانى متماثل حول محور الصادات فإن النقطة .... تقع على هذا الشكل

ثالثاً: التماثل حول نقطة الأصل

يكون الشكل البيانى الممثل لعلاقة متماثل حول نقطة الأصل إذا كانت كل نقطة أ (س ، ص) توجد نقطة أَ (-س، -ص) تقع على هذا الشكل

الشكل المقابل: يمثل منحنى متماثل حول نقطة الأصل



الدوال الزوجية والدوال الفردية

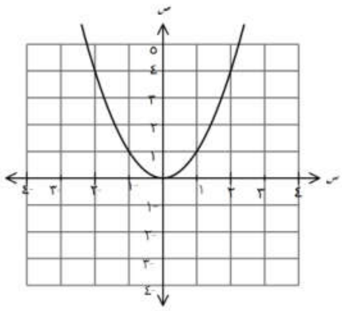
أولاً: الدالة الزوجية

بيانياً

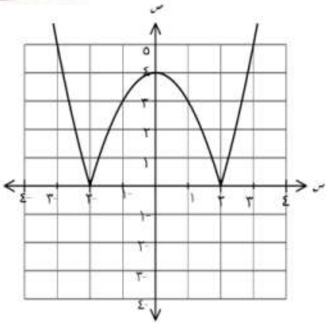
الدالة الممثلة بيانياً: تكون زوجية إذا كان منحناها متماثل حول محور الصادات

أى أن

- لأى نقطة (س، ص) تقع على منحنى الدالة يكون النقطة (-س، ص) تقع أيضا على منحنى هذه الدالة



دالة زوجية



دالة زوجية

جبريا:

يقال للدالة د بأنها زوجية إذا كان:

د(-س) = د(س)

لكل س، -س $\in$ لمجال د

مثال ٥

بين أن كلاً من الدوال الآتية هى دوال زوجية

١ د(س) = س^{٢} + ٣

٢ د(س) = (١ - س)^{٥} + (١ + س)^{٥}

٣ د(س) = $\left(\frac{\text{١ - س}}{\text{١ + س}}\right)^{٣}$ + $\left(\frac{\text{١ + س}}{\text{١ - س}}\right)^{٣}$

الحل

١ د(س) = س^{٢} + ٣

دالة كثيرة حدود مجالها = ح

$\therefore$ لكل س ، -س $\in$ مجال د فإن:

د(-س) = (-س)^{٢} + ٣

= س^{٢} + ٣

= د(س)

$\therefore$ الدالة زوجية

٢ الدالة د :

$د(س) = (١-س)^{٥} + (١+س)^{٥}$

مجالها = ح

∴ لكل س ، - س ∈ مجال د فإن :

∵ $د(-س) = (١-(-س))^{٥} + (١+(-س))^{٥}$

$= (١+س)^{٥} + (١-س)^{٥}$

$= (١-س)^{٥} + (١+س)^{٥}$

= د(س) ∴ الدالة زوجية

---

٣ $د(س) = \left(\frac{١-س}{١+س}\right)^{٣} + \left(\frac{١+س}{١-س}\right)^{٣}$

∴ مجال د = ح - {-١ ، ١}

∴ لكل س ، - س ∈ مجال د فإن :

∴ $د(-س) = \left(\frac{١-(-س)}{١+(-س)}\right)^{٣} + \left(\frac{١+(-س)}{١-(-س)}\right)^{٣}$

$= \left(\frac{١+س}{١-س}\right)^{٣} + \left(\frac{١-س}{١+س}\right)^{٣}$

= د(س) ∴ د دالة زوجية

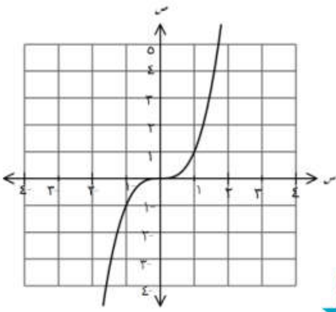
ثانياً : الدالة الفردية

بيانياً

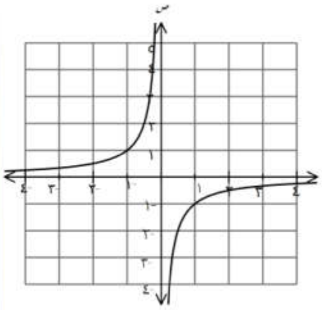
الدالة الممثلة بيانياً : تكون فردية إذا كان منحناها متماثل حول نقطة الأصل

أى أن

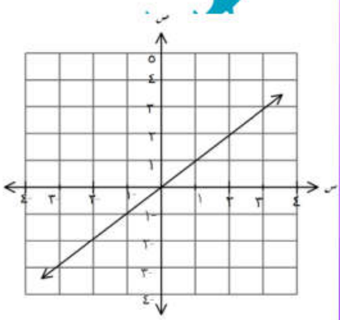
- لأى نقطة (س،ص) تقع على منحنى الدالة يكون النقطة (-س، -ص) تقع أيضا على منحنى هذه الدالة



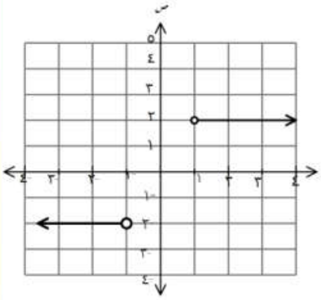
دالة فردية



دالة فردية



دالة فردية



دالة فردية

جبريا :

يقال للدالة د بأنها فردية إذا كان :

د(-س) = - د(س)

لكل س، -س ∈ لمجال د

مثال ٥

بين أن كلاً من الدوال الآتية هى دوال فردية

١) $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{3} + \text{س}$

٢) $\text{د}(\text{س}) = \left(\frac{1-\text{س}}{1+\text{س}}\right)^{3} - \left(\frac{1+\text{س}}{1-\text{س}}\right)^{3}$

٣) (٣) $\text{د}(\text{س}) = \left(\text{س} + \frac{1}{\text{س}}\right)^{5}$

الحل

١) مجال د = ح

∴ لكل س ∈ ، -س ∈ مجال د فإن :

$\text{د}(-\text{س}) = (-\text{س})^{3} + (-\text{س})$

$= -\text{س}^{3} - \text{س}$

$= -(\text{س}^{3} + \text{س})$

$= -\text{د}(\text{س})$

∴ الدالة فردية

---

٢) $\text{د}(\text{س}) = \left(\frac{1-\text{س}}{1+\text{س}}\right)^{3} - \left(\frac{1+\text{س}}{1-\text{س}}\right)^{3}$

∵ مجال د = ح - {-١ ، ١}

∴ لكل س ∈ ، -س ∈ مجال د فإن :

$\text{د}(-\text{س}) = \left(\frac{1-(-\text{س})}{1+(-\text{س})}\right)^{3} - \left(\frac{1+(-\text{س})}{1-(-\text{س})}\right)^{3}$

$= \left(\frac{1+\text{س}}{1-\text{س}}\right)^{3} - \left(\frac{1-\text{س}}{1+\text{س}}\right)^{3}$

$= -\left[\left(\frac{1-\text{س}}{1+\text{س}}\right)^{3} - \left(\frac{1+\text{س}}{1-\text{س}}\right)^{3}\right]$

$= -\text{د}(\text{س})$ ∴ الدالة فردية

---

(٣) $\text{د}(\text{س}) = \left(\text{س} + \frac{1}{\text{س}}\right)^{5}$

مجال د = ح - {٠}

∴ لكل س ∈ ، -س ∈ مجال د فإن :

$\text{د}(-\text{س}) = \left(-\text{س} + \frac{1}{-\text{س}}\right)^{5}$

$= \left(-\text{س} - \frac{1}{\text{س}}\right)^{5}$

$= \left(-\left(\text{س} + \frac{1}{\text{س}}\right)\right)^{5}$

$= -\left(\text{س} + \frac{1}{\text{س}}\right)^{5}$

$= -\text{د}(\text{س})$

∴ الدالة فردية

ملاحظات مهمة

١) إذا كانت : $\text{د}(-\text{س}) \neq \text{د}(\text{س})$

، $\text{د}(-\text{س}) \neq -\text{د}(\text{س})$

فى هذه الحالة تكون الدالة

ليست زوجية و لا فردية

مثال ٦

ابحث نوع الدالة د:
د (س) = $س^{٢}$ - ٣س + ٢ من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

الحل

∵ مجال د = ح

∴ لكل س ∈ ، -س ∈ مجال د فإن :

د (-س) = $(-س)^{٢}$ - ٣ (-س) + ٢

= $س^{٢}$ + ٣س + ٢ ≠ د (س)

∴ الدالة ليست زوجية

---

٢ إذا وجد س ∈ لمجال د
و وجد -س ∉ لمجال د
فإن الدالة تكون ليست زوجية ولافردية

مثال ٧

ابحث نوع الدالة د :
د (س) = $\sqrt{س - ١}$ من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

الحل

∵ مجال د هو قيم س التي تجعل :
س - ١ ≥ ٠

∴ س ≥ ١

∴ مجال د هو [١ ، ∞ [

، ∵ ٣ ∈ لمجال د ، -٣ ∉ لمجال د

∴ الدالة ليست زوجية لا فردية

مثال ١

ابحث نوع الدالة د :
د (س) = $س^{٢}$ ، س > ٠ من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

الحل

∵ س > ٠ ∴ مجال د =] ٠ ، ∞ [

∵ ١ ∈ لمجال د ، -١ ∉ لمجال د

∴ الدالة ليست زوجية ولافردية

مثال ٨

نوع الدالة د:
د : $ح^{+}$ ← ح ، د (س) = $س^{٢}$ من حيث كونها زوجية أو فردية أوغير ذلك

الحل

∵ مجال د = $ح^{+}$

∴ ١ ∈ لمجال د ، -١ ∉ لمجال د

∴ الدالة د ليست زوجيةولافردية

٣ الدوال المثلثية من حيث كونها زوجية أو فردية

(أ) حا(-س) = - حا(س)

قتا(-س) = - قتا(س)

∴ حاس ، قتاس دوال فردية

(ب) طا(-س) = - طا(س)

ظتا(-س) = - ظتا(س)

∴ طاس ، ظتاس دوال فردية

(حـ) حتا(-س) = حتا(س)

قا(-س) = قا(س)

∴ حتاس ، قاس دوال زوجية

مثال ٩

ابحث نوع كلاً من الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

١) د(س) = س^{٢} حاس

الحل

مجال د = ع

لأن د تساوى حاصل ضرب دالتين

مجال كلاً منهما يساوى ع

، د(-س) = (-س)^{٢} حا(-س)

= س^{٢} (-حا(س))

= - س^{٢} حاس

∴ الدالة فردية

٢) د(س) = (حاس + حتاس)^{٢} - ١

الحل

د(س) = حا^{٢}س + ٢ حاس حتاس + حتا^{٢}س - ١

∵ حا^{٢}س + حتا^{٢}س = ١

∴ د(س) = ~~١~~ + ٢حاس حتاس ~~-١~~

∴ د(س) = ٢حاس حتاس

∴ د(-س) = ٢حا(-س) حتا(-س)

∴ د(-س) = ٢(- حاس) حتاس

∴ د(-س) = -٢حاس حتاس

= - د(س)

∴ الدالة فردية

---

٤ الدالة التى تساوى :

- مجموع دالتين زوجيتين
- حاصل ضرب دالتين فرديتين أو زوجيتين
- خارج قسمة دالتين زوجيتين معاً أو فرديتين معا

تكون دالة فردية

---

٤ الدالة التى تساوى :

- مجموع دالتين فرديتين
- حاصل ضرب دالتين إحدهما فردية والأخرى زوجية
- خارج قسمة دالتين إحدهما فردية والأخرى زوجية

تكون دالة فردية

تدريب

ابحث نوع كلاً من الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

(١) د(س) = س^٢ + جتاس

(٢) د(س) = جاس + طاس

(٣) د(س) = قتاس + س^٢

(٤) د(س) = س^٣ جاس

(٥) د(س) = $\frac{\text{جتاس}}{\text{س}^2}$

(٦) د(س) = $\frac{\text{س}^3 - \text{س}}{\text{س}^2 - 4}$

(٧) د(س) = س جتاس

(٨) د(س) = س^٤ جاس

(٥) إذا كانت د: معرفة على الفترة [أ ، ب]
وكانت د دالة زوجية أو فردية فإن
أ = -ب أى أ + ب = ٠

مثال ١٠

إذا كانت الدالة د:
د: [-٣، ب] ← ح ، دالة زوجية فإن
ب = ...

مثال ١١

(١) إحدى الدوال المعرفة بالقواعد الآتية زوجية

(أ) د(س) = س^٣

(ب) د(س) = جاس

(حـ) د(س) = س جاس

(ء) د(س) = س جتاس

(٢) إحدى الدوال المعرفة بالقواعد الآتية فردية

(أ) د(س) = س^٣ جاس

(ب) د(س) = طا^٢ س

(حـ) د(س) = جتاس

(ء) د(س) = ١

٣ إذا كانت د دالةزوجية ، ٢ ∈ لمجال د

فإن :

د (٢) + د (-٢) = ...

ⓐ صفر ⓑ ٤

ⓒ ٢ ⓓ ٢ د (٢)

================================

٤ إذا كانت د دالةزوجية ، على الفترة

[-٢ ، ب] فإن : ب = ...

ⓐ صفر ⓑ ٤

ⓒ ٢ ⓓ -٢

================================

٥ إذا كانت د دالة فردية ، أ ∈ لمجال د

فإن :

د (أ) + د (-أ) = ...

ⓐ صفر ⓑ ٢ د (أ)

ⓒ أ ⓓ د (أ)

================================

٦ إذا كانت د دالة فردية ، د (١) = ٢

فأى من النقط الآتية تقع على منحنى الدالة د

ⓐ (-١ ، ٢) ⓑ (-١ ، -٢)

ⓒ (-١ ، ٢) ⓓ (-١ ، ٠)

٧ إذا كانت : د دالة فردية

فإن : $\frac{د(أ) + ٣د(-أ)}{د(-أ)}$ = ...

ⓐ ٢ ⓑ -٢

ⓒ ٤ ⓓ -٢د (أ)

================================

٨ إذا كانت د دالةدالة زوجية حيث

د (س) = $\frac{٨}{س^٢ + أ س + ٩}$ ، س ≠ ٠

فإن : أ = ...

ⓐ صفر ⓑ ٦

ⓒ ٢ ⓓ -٦

================================

مثال ١٢

ابحث نوع الدوال الآتية من حيث كونها أو زوجية أو فردية أو غير ذلك

الحل

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{س} & \text{عندما } س > ٠ \\ -\frac{١}{س} & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$$

مجال د = ح - {٠}

$$د(-س) = \begin{cases} -\frac{١}{س} & \text{عندما } -س > ٠ \\ \frac{١}{س} & \text{عندما } -س < ٠ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{١}{س} & \text{عندما } س < ٠ \\ \frac{١}{س} & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$$

= د(س) ∴ الدالة زوجية

الدالة الأحادية

الدالة د : س ← ص تسمى دالة أحادية إذا كان لكل :

أ ، ب ∈ س ، د(أ) = د(ب)

فإن : أ = ب

بمعنى :

أن كل عنصر من عناصر المدى يناظره قيمة وحيدة من عناصر المجال لا يوجد عنصران فى مجال الدالة الأحادية يكون لهما نفس الصورة

==========

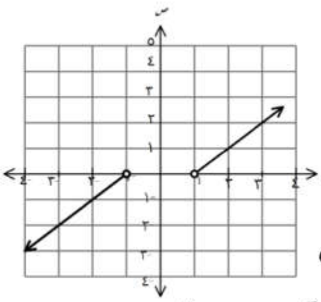
ونحدد الدالة الأحادية :

أولاً : بيانياً

اختبار الخط الأفقى :

إذا كان لكل خط أفقى (يوازى محور السينات) يقطع الدالة فى نقطة وحيدة فإن الدالة تكون إحادية

الشكل المقابل :



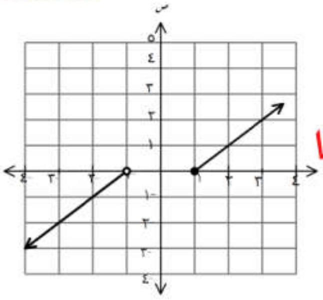
- يمثل دالة أحادية

لأن كل خط أفقى يقطع الدالة فى نقطة وحيدة

وهى دالة فردية

لأنها متماثلة حول نقطة الأصل

الشكل المقابل :



يمثل دالة أحادية ولكنها ليست فردية ولازوجية

∴ ليس كل دالة فردية تكون أحادية

==========

ثانياً : جبرياً

لإثبات أن الدالة د أحادية

نفرض أن :

أ ، ب ∈ لمجال د وأن :

د(أ) = د (ب) إذا تحقق أن :

(أ) لها قيمة وحيدة فإن الدالة تكون أحادية أ = ب

(ب) وإذا كانت أكثر من قيمة فإنها تكون ليست أحادية

==========

مثال (١)

أثبت أن الدالة :

د(س) = ٣س + ١ دالة أحادية

نفرض أن : أ ، ب ∈ لمجال د

وأن : د (أ)= د (ب)

٣ أ + ١ = ٣ ب + ١

∴ ٣ أ = ٣ ب بالقسمة على ٣ للطرفين

∴ أ = ب

∴ الدالة أحادية

==========

مثال ١

فى كل من الدوال الآتية : حدد ما إذا كانت الدالة إحادية أم لا

١) د (س) = س^{٢} - ١

الحل

نفرض أن : أ ، ب ∈ لمجال د

وأن : د(أ)= د(ب)

∴ أ^{٢} - ١ = ب^{٢} - ١

أ^{٢} = ب^{٢}

∴ أ = ± ب

∴ أ = ب أو أ = - ب

∴ أ لها قيمتان

∴ الدالة ليست أحادية

==========

٢) د (س) = $\frac{\text{٣س + ٥}}{\text{٤س + ١}}$

الحل

نفرض أن : أ ، ب ∈ لمجال د

وأن : د(أ)= د(ب)

∴ $\frac{\text{٣أ + ٥}}{\text{٤أ + ١}} = \frac{\text{٣ب + ٥}}{\text{٤ب + ١}}$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

(٣أ + ٥) (٤ب + ١) =
(٣ب + ٥) (٤أ + ١)

١٢ أ ب + ٣ أ + ٢٠ ب + $\cancel{٥}$

= ١٢ أ ب + ٣ ب + ٢٠ أ + $\cancel{٥}$

٣ أ + ٢٠ ب = ٣ ب + ٢٠ أ

٢٠ ب - ٣ ب = ٢٠ أ - ٣ أ

١٧ ب = ١٧ أ بالقسمة على ١٧

ب = أ

∴ أ لها قيمة أحادية

∴ الدالة الأحادية

==========

٣) د (س) = ٢ س^{٢} - س - ٣

الحل

نفرض أن : أ ، ب ∈ لمجال د

وأن : د(أ)= د(ب)

٢ أ^{٢} - أ - ٣ = ٢ ب^{٢} - ب - ٣

٢أ^{٢} − أ = ٢ب^{٢} − ب

٢أ^{٢} − ٢ب^{٢} − أ + ب = ٠

∴ ٢(أ^{٢} − ب^{٢}) − (أ − ب) = ٠

٢(أ − ب)(أ + ب) − (أ − ب) = ٠

بأخذ (أ − ب) عامل مشترك

(أ − ب)[٢(أ + ب) − ١] = ٠

إما (أ − ب) = ٠ أو ٢(أ + ب) − ١ = ٠

∴ أ = ب | ٢أ + ٢ب − ١ = ٠

٢أ = ١ − ٢ب

∴ أ = $\frac{١ − ٢ب}{٢}$

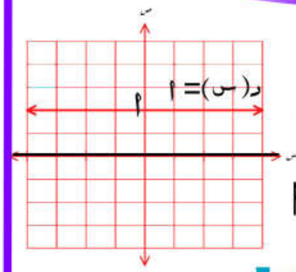
∴ أ لها قيمتان

∴ الدالة ليست أحادية

التمثيل البياني للدوال والتحويلات الهندسية

أولاً : دوال كثيرات الحدود

١ الدالة الثابتة



تسمى الدالة د:

د : ح ← ح ، د (س) = أ

حيث أ ∈ ح دالة ثابتة

وهى دالة تربط جميع الأعداد الحقيقية بالعدد أ

ويمثلها مستقيم يمر بالنقطة (٠ ، أ)

المجال = ح

، المدى = { أ }

، الإطراد : ثابتة فى ح

، النوع زوجية

، ليست أحادية

مثـــال ١

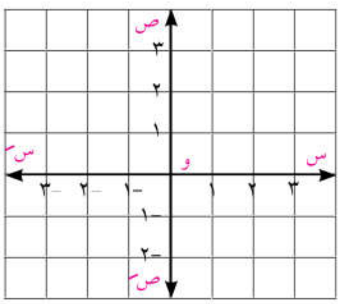
مثل بيانياً الدالة د :

د : ح ← ح ، د (س) = ٣

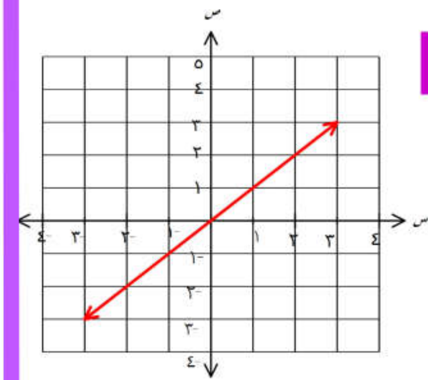
ومن الرسم عين المجال والمدى

والنوع من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

الحـــل



٢ الدالة الخطية



تسمى الدالة د:

د : ح ← ح

، د(س) = س

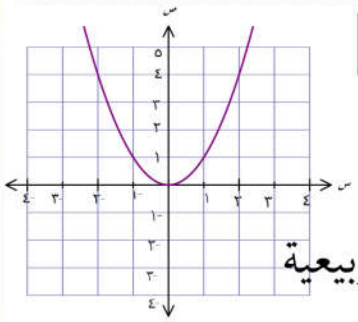
دالة خطية

وهى دالة تربط كل عدد حقيقى بنفسه

- المجال = ح
- المدى = ح
- النوع فردية
- والدالة أحادية

ويمثلها مستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ٠)

٣ الدالة التربيعية



تسمى الدالة د:

د : ح ← ح ،

د (س) = س٢ دالة تربيعية

المجال = ح ، المدى = ح

الإطراد : تزايدية في]٠، ∞[

وتناقصية فى]-∞، ٠[

النوع : زوجية   والدالة ليست أحادية

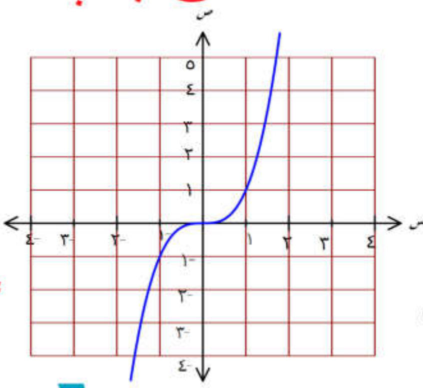
ونقطة رأس المنحنى (٠ ، ٠)

٤ الدالة التكعيبية

تسمى الدالة د:

د: ح ⟵ ح ، د(س)= س٣ تكعيبية

وهى دالة تربط كل عدد حقيقى بمكعبه



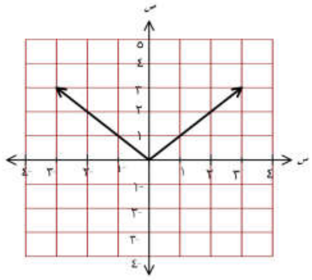
- المجال = ح
- المدى = ح
- الإطراد :

تزايدية على ح

- النوع : فردية
- والدالة : أحادية

==========

ثانياً :دالة المقياس (دالة القيمة المطلقة)



تسمى الدالة د:

د: ح ⟵ ح

، د(س)= | س |

بدالة المقياس

- المجال = ح   - المدى = [٠ ، ∞ [
- الإطراد : تزايدية فى :] ٠،∞ [

، تناقصية فى :] -∞ ، ٠ [

النوع : زوجية

والدالة ليست أحادية

ونقطة رأس المنحنى (٠ ، ٠)

إعادة تعريف دالة المقياس

* | س | = { س عندما س ≥ ٠ ، –س عندما س < ٠

* | س – ٢ | = { س – ٢ عندما س ≥ ٠ ، –(س – ٢) عندما س < ٠

= { س – ٢ عندما س ≥ ٢ ، ٢ – س عندما س < ٢

==========

تذكر أن

* | –٥ | = ٥ ، | ٥ | = ٥

* إذا كان : | س | = أ فإن س = ± أ

∴ مجموعة حل المعادلة : | س – ١ |= ٣

إما س – ١ = ٣ | أو س – ١ = –٣

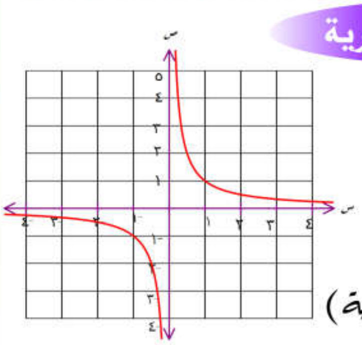
∴ س = ٣ + ١ | ∴ س = –٣ + ١

س = ٤ | س = –٢

∴ م . ح = { ٤ ، –٢ }

==========

ثالثاً : الدالة الكسرية



تسمى الدالة د:

د : ح – {٠} ⟵ ح

، د(س) = $\frac{١}{س}$

(أبسط صورة للدالة الكسرية)

وهى دالة تربط كل عدد بمعكوسه الضربى

الدالة متماثلة حول النقطة (٠ ، ٠)

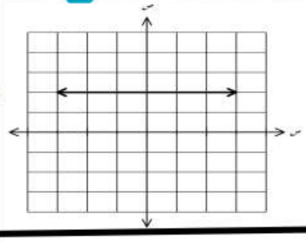
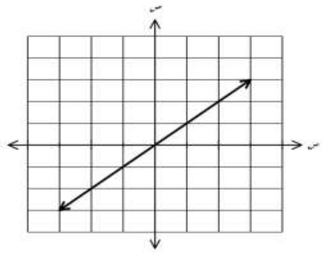
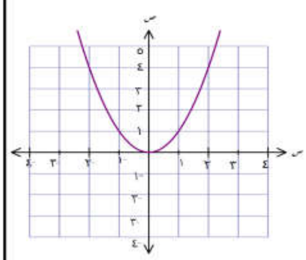
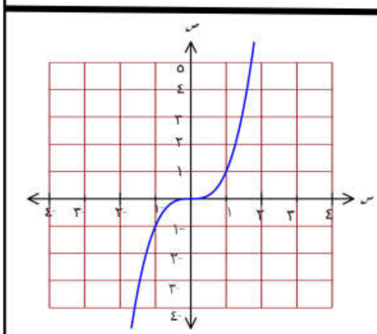
المجال = ح - {٠}   المدى = ح - {٠}

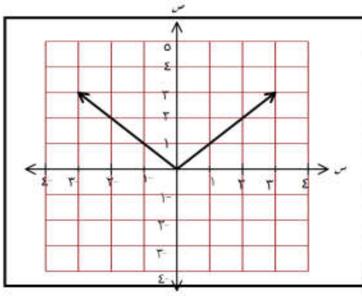
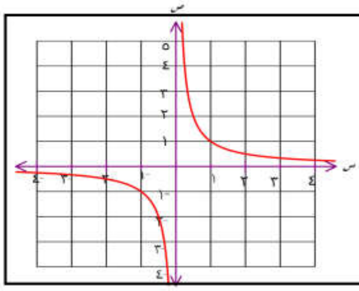
الدالة : أحادية

الدالة : فردية لأنها متماثلة حول نقطة الأصل

الإطراد : الدالة تناقصية على

]-∞،٠[،]٠، ∞[

الدالة	شكلها البيانى في أبسط صورة لها
الدالة الثابتة د(س) = م	
الدالة الخطية د(س) = س	
الدالة التربيعية د(س) = $س^{٢}$	
الدالة التكعيبية د(س) = $س^{٣}$	

دالة المقياس د(س) = |س|	
الدالة الكسرية د(س) = $\frac{١}{س}$	

مثال ٢

ارسم الشكل البيانى لكل من الدوال الآتية :
ومن الرسم عين المجال والمدى وابحث الإطراد

١) د(س) = $\begin{cases} س & \text{عندما } س \geq ٠ \\ س^{٢} & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$

الحل

١) ∵ د(س) = س عندما س ≥ ٠

∴ نرسم الدالة د(س) = س

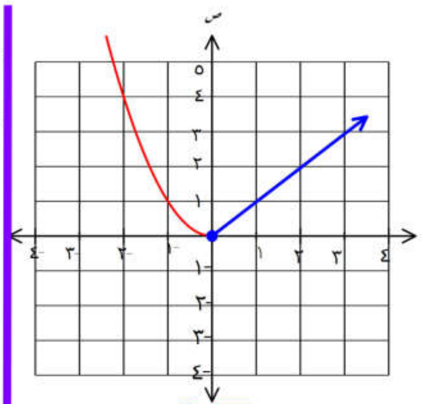
لكل س ∈ [٠، ∞[

٢) ∵ د(س) = $س^{٢}$ عندما س < ٠.

∴ نرسم الدالة د(س) = س

لكل س ∈]-∞، ٠[

- المجال = ح
- المدى = [٠ ، ∞[



الإطراد :

- تزايدية فى :]٠ ، ∞[
- وتناقصية]−∞ ، ٠[

النوع :

- ليست زوجية ولافردية
- ليست أحادية

(٢) د(س) = { |س| عندما س ≥ ٠ ، س³ عندما س < ٠ }

الحل

(١) ∵ د(س) = |س| عندما س ≥ ٠

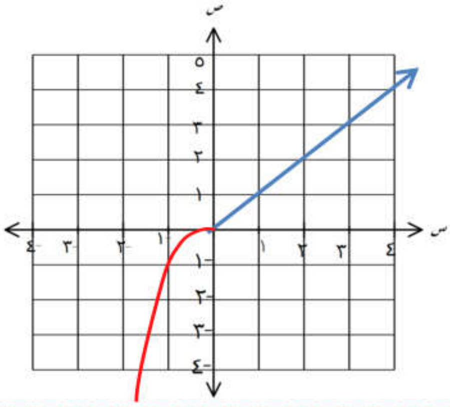
∴ نرسم الدالة د(س) = |س|

لكل س ∈ [٠ ، ∞[

(٢) ∵ د(س) = س³ عندما س < ٠

∴ نرسم الدالة د(س) = س³

لكل س ∈]−∞ ، ٠[



- المجال = ح
- المدى = ح
- الإطراد :

تزايدية فى ح

(٣) د(س) = { س² عندما س < ٢ ، ٤ عندما س > ٢ }

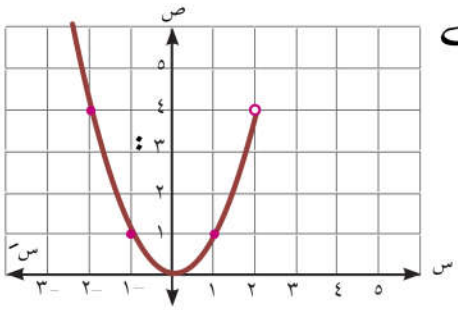
الحل

(١) عندما س < ٢ ، د(س) = س²

نرسم د(س) = س²

لكل س ∈]−∞ ، ٢[

كما بالشكل

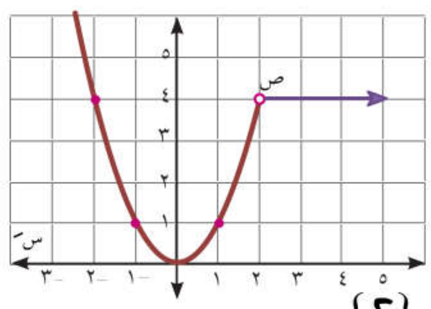


(٢) عندما س > ٢ ، د(س) = ٤

نرسم د(س) = ٤ وهى دالة ثابتة

لكل س ∈]٢ ، ∞[

كما بالشكل



المجال = ح − {٢}

المجال = ح

المدى =] ٠ ، ∞ [

الإطراد :

- تزايدية فى]-∞ ، ٠ [
- تناقصية فى] ٠ ، ٢ [
- ثابتة فى] ٢ ، ∞ [

النوع : ليست زوجية ولا فردية

والدالة ليست أحادية

مثال ٣

مثل بيانياً الدالة د :

د(س) = { ٣ عندما س > ١ ، ٢ عندما -١ ≤ س ≤ ١ ، ٣ عندما س < ١ }

ومن الرسم عين المدى والإطراد والنوع

الحل

∵ د(س) = ٣ عندما س > ١

وهى دالة ثابتة وتساوى ٣ لجميع قيم س

الأكبر من ١

د(س) = ٢ عندما -١ ≤ س < ١

(أى أن الدالة تربط كل

الأعداد الأكبر من أو تساوى -١ وأقل من ١ بالعدد ٢

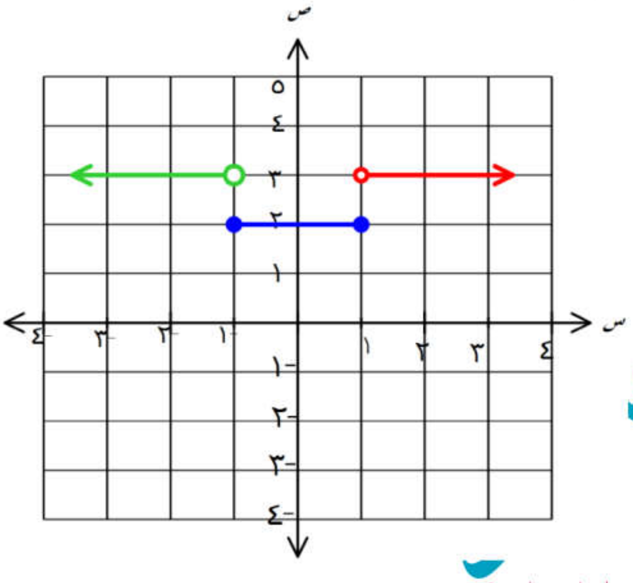
د(س) = ٣ عندما س < -١

(أى أن الدالة تربط كل

الأعداد الأقل من ١ بالعدد ٣)

المدى = { ٢ ، ٣ }

النوع زوجية



الإطراد ثابتة فى :

]-١ ، ∞[،]-١ ، ١[،]-∞ ، -١[

والدالة ليست أحادية

مثال ٤

مثل بيانيا الدالة د : د(س) = $\frac{٣س-٣}{س-١}$

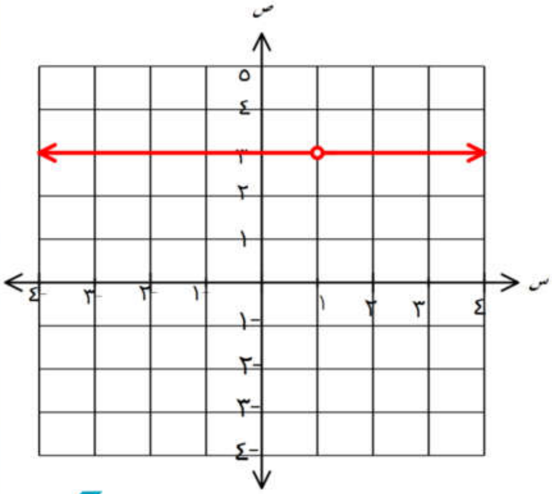
الحل

مجال الدالة = ح - {١}

د(س) = $\frac{٣(س-١)}{س-١}$ = ٣

المجال = ح - {١} ، المدى = { ٣ }

النوع ليست زوجية ولافردية



الإطراد ثابتة فى : ح - {١}

والدالة ليست أحادية

==

مثـــال ٤

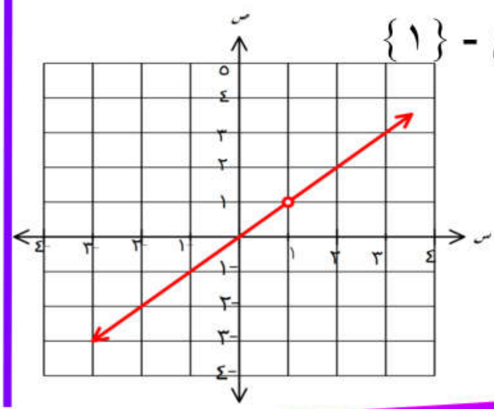
مثل بيانيا الدالة د : د(س) = $\frac{\text{٣س-٣}}{\text{س-١}}$

الحــل

∵ د(س) = $\frac{\text{س}\,\cancel{\text{(س-١)}}}{\cancel{\text{س-١}}}$ = س

∴ د(س) = س

المجال = ح - {١}



المدى = ح - {١}

الدالة : تزايدية فى : ح - {١}

الدالة : أحادية

الدالة ليست زوجية ولافردية

==

التحويلات الهندسية

أولاً : الإزاحة الرأسية

لأى دالة يكون المنحنى

ص = د(س) + أ ، أ ∈ ح - {٠} هو

نفس المنحنى : ص = د(س)

بإزاحة قدرها = |أ| وحدة

وتكون :

- فى اتجاه $\overrightarrow{\text{و ص}}$ إذا كان : أ > ٠
- فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}'}$ إذا كان : أ < ٠

===

مثال ١

ارسم الشكل البيانى لكل من الدوال الآتية

١ د(س) = س + ١

الحل

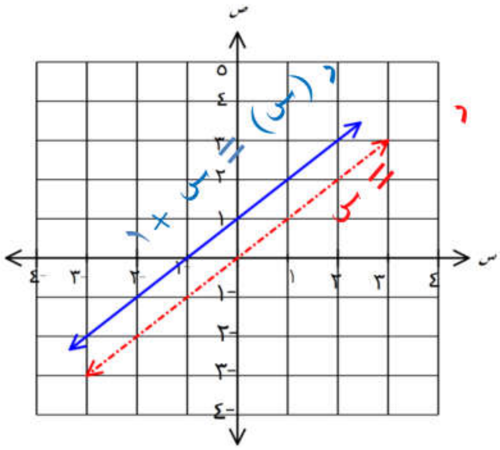
منحنى الدالة د: د(س) = س + ١

هو نفس منحنى الدالة :

د(س) = س بإزاحة قدرها وحدة

واحدة فى إتجاه $\overrightarrow{\text{و ص}}$

(رأسيا لأعلى وحدة واحدة)



المجال = ح ، المدى = ح

والإطراد : تزايدية فى ح

النوع : ليست زوجية ولا فردية

الدالة أحادية

===

٢ د(س) = س² + ١

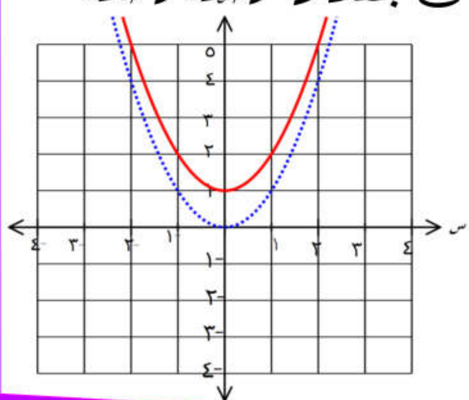
الحل

هو نفس منحنى الدالة :

د(س) = س² + ١ بإزاحة قدرها

وحدة فى إتجاه $\overrightarrow{\text{و ص}}$

(رأسيا لأعلى بمقدار وحدة واحدة



المجال = ح

، المدى = [١، ∞ [

والإطراد :

تزايدية فى] ٠، ∞ [

تناقصية فى] -∞، ٠ [

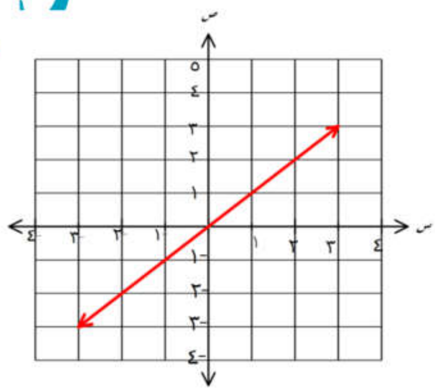
النوع: زوجية

(لأن الدالة متماثلة حول محور الصادات)

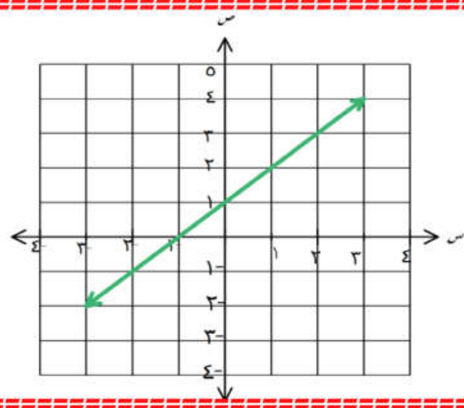
مثـــــال ٢

في كل من الأشكال البيانية الآتية أكتب قاعدة الدالة

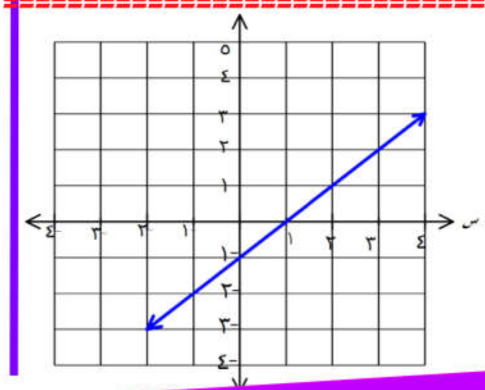
١



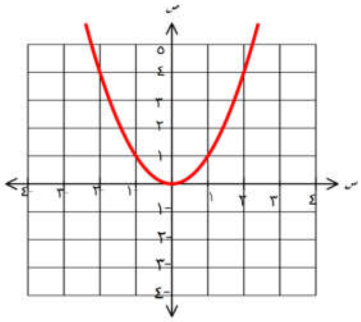
٢



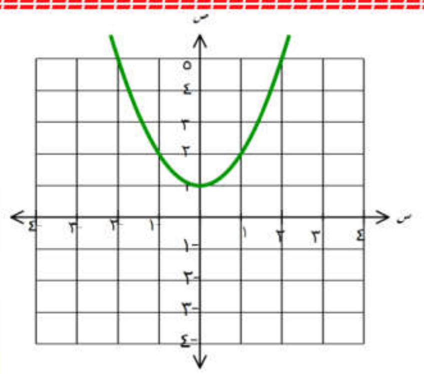
٣



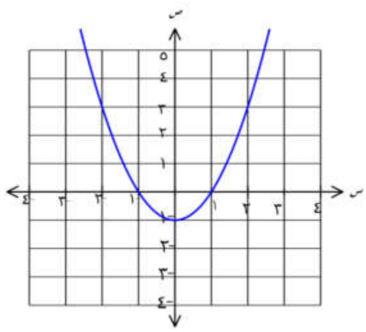
٤



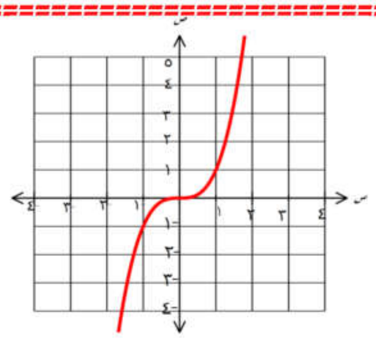
٥



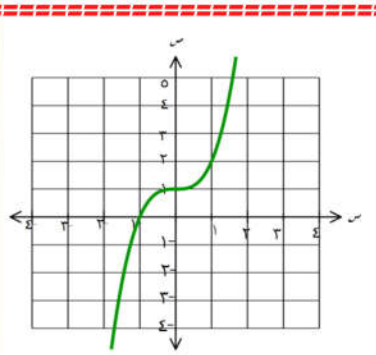
٦



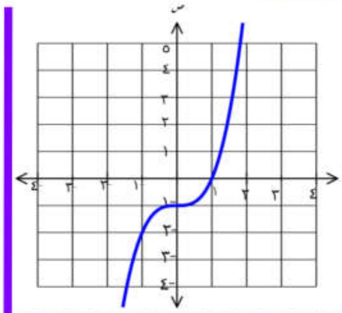
٧



٨

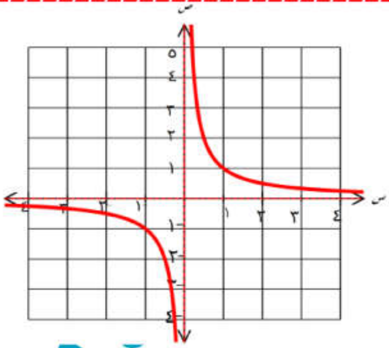


٩



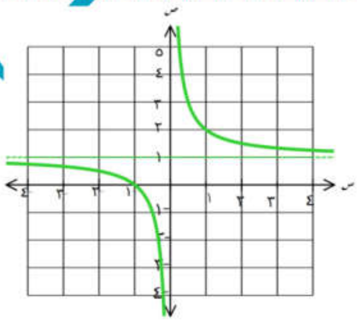
=====================================

١٠



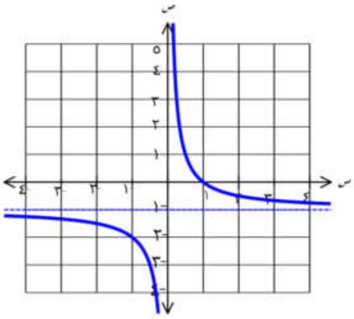
=====================================

١١



=====================================

١٢



=====================================

ثانيا: الإزاحة الأفقية

لأى دالة د يكون المنحنى :

ص = د (س + أ) هو نفس المنحنى

ص = د (س) بإزاحة أفقية

قدرها = |أ| وحدة طول

وتكون

- في اتجاه و س← إذا كان أ > ٠
- في اتجاه و س→ إذا كان أ < ٠

وهذا النوع من الإزاحات تكون فيه الدوال ليست زوجية ولا فردية

=====================================

مثال ٣

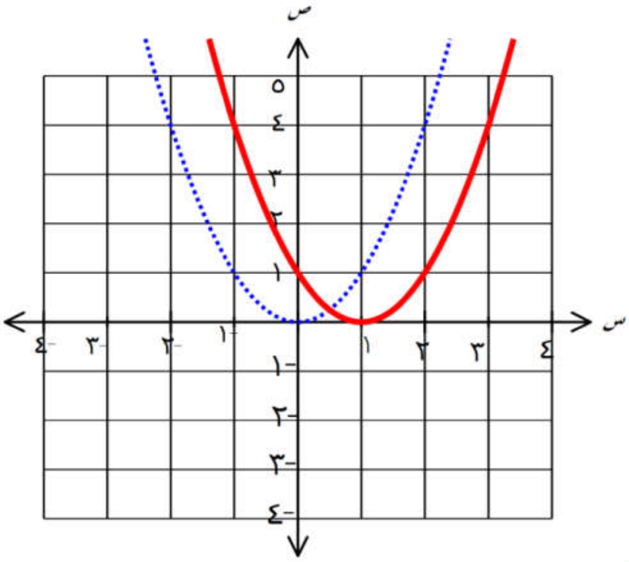
ارسم الشكل البيانى لكل من الدوال الآتية

١) د (س) = (س - ١)^{٢}

الحل

منحنى د هو نفس منحنى الدالة :

ص = س^{٢} بإزاحة قدرها وحدة واحدة في اتجاه و س→



المجال = ح

المدى = [٠ ، ∞ [

الإطراد :

- تزايدية في ؛]١ ، ∞ [
- تناقصية في :]-∞ ، ١ [

النوع

- ليست زوجية ولا فردية
- ليست أحادية

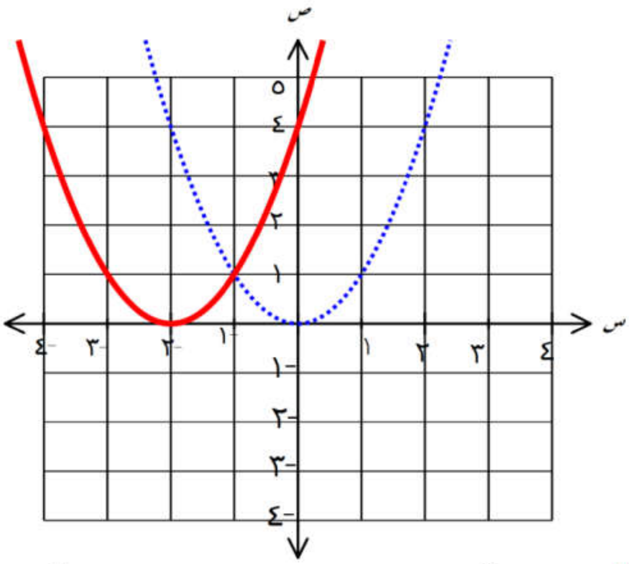
التماثل :

متماثلة حول المستقيم س = ١

---

(٢) د (س) = (س + ٢)^{٢}

الحل



المجال = ح ، **المدى** = [٠ ، ∞ [

الإطراد :

- تزايدية في ؛] -٢ ، ∞ [
- تناقصية في :]-∞ ، -٢ [

النوع :

- ليست زوجية ولا فردية
- ليست أحادية

التماثل :

متماثلة حول المستقيم س = -٢

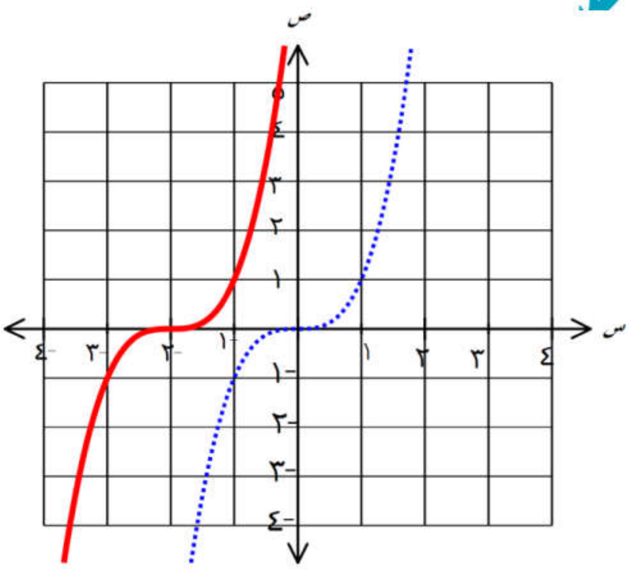
---

(٣) د (س) = (س + ٢)^{٣}

الحل

منحنى د هو نفس منحنى الدالة :

ص = س^{٣} بإزاحة قدرها وحدتان في اتجاه و س



المجال = ح ، **المدى** = ح

الإطراد : تزايدية في ح

النوع : ليست زوجية ولا فردية

أحادية

التماثل متماثلة حول النقطة (-٢ ، ٠)

أ/عشري فاروق
ت/ ٠١١٥٦٢٤٤٤٣١

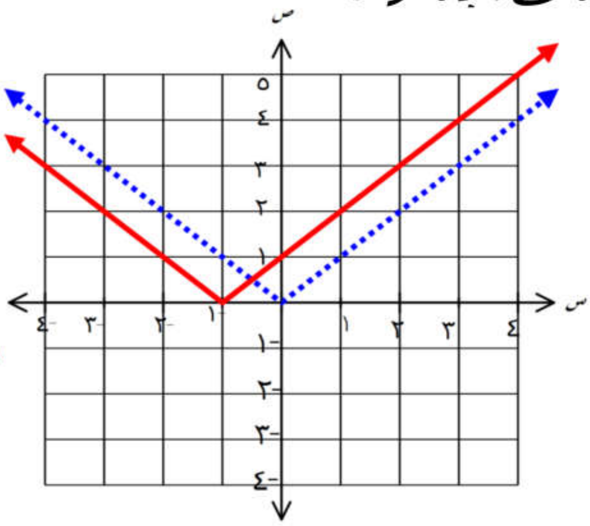
٤ د (س) = |س + ١|

الحـــــل

منحنى د هو نفس منحنى الدالة :

ص= |س| بإزاحة مقدارها وحدة

واحدة فى إتجاه $\overleftarrow{\text{وس}}$



المجال = ح ، المدى = [٠ ، ∞[

الإطراد :

– تزايدية في ؛]-١ ، ∞[

– تناقصية في :]-∞ ، -١[

النوع :

– ليست زوجية ولا فردية

– ليست أحادية

التماثل : متماثلة حول المستقيم س=-١

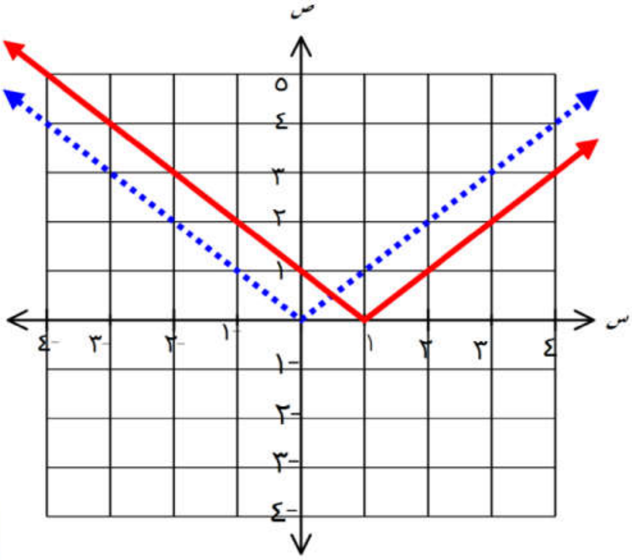
٥ د (س) = |س-١|

الحـــــل

منحنى د هو نفس منحنى الدالة :

ص= |س| بإزاحة مقدارها وحدة

واحدة فى إتجاه $\overrightarrow{\text{وس}}$



المجال = ح ، المدى = [٠ ، ∞[

الإطراد :

– تزايدية في ؛]١ ، ∞[

– تناقصية في :]-∞ ، ١[

النوع :

– ليست زوجية ولا فردية

– ليست أحادية

التماثل : متماثلة حول المستقيم س= ١

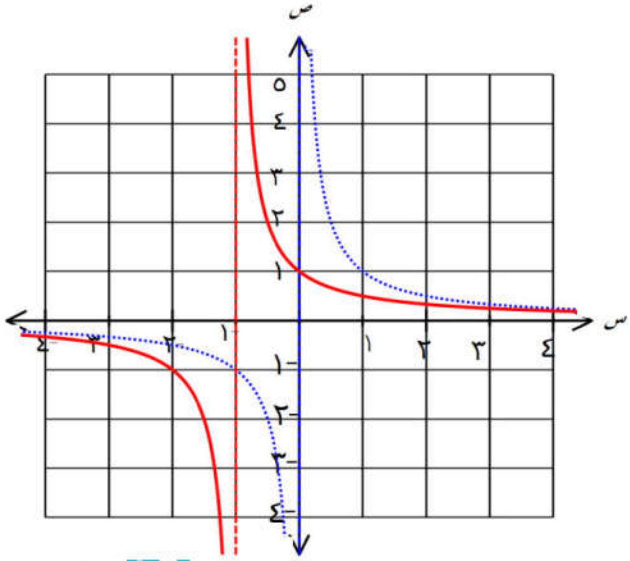
٦ د (س) = $\frac{١}{س + ١}$

الحـــــل

منحنى د هو نفس منحنى الدالة :

ص= $\frac{١}{س}$ بإزاحة مقدارها وحدة

واحدة فى إتجاه $\overleftarrow{\text{وس}}$



المجال = ح −{−١} ، **المدى** = ح −{٠}

الإطراد : تناقصية فى]−١ ، ∞[

تناقصية فى]−∞ ، −١[

النوع :

– ليست زوجية ولا فردية

– أحادية

التماثل : متماثلة حول النقطة (−١، ٠)

==

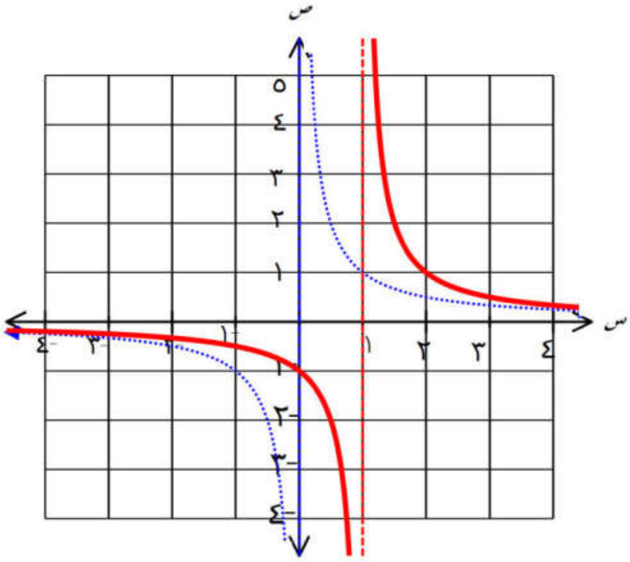
٧ د (س) = $\frac{١}{س-١}$

الحــــل

منحنى د هو نفس منحنى الدالة :

ص = $\frac{١}{س}$ بإزاحة مقدارها وحدة

واحدة فى إتجاه $\overleftarrow{\text{وس}}$



المجال = ح −{ ١ } ، **المدى** = ح −{٠}

الإطراد : تناقصية فى ؛]١ ، ∞[

تناقصية فى:]−∞ ، ١[

النوع :

– ليست زوجية ولا فردية

– أحادية

التماثل : متماثلة حول النقطة (١، ٠)

ثالثاً : الإزاحة الأفقية والرأسية

لأى دالة د يكون المنحنى

د (س) = (س + أ) + ب حيث

أ ، ب ∈ ح − {٠}

هو نفس منحنى الدالة ص = د(س)

متبوعا بإزاحة أفقية

- فى إتجاه وس إذا كانت أ سالبة
- فى إتجاه وسَ إذا كانت أ موجبة

ثم إزاحة رأسية

- فى إتجاه وص إذا كانت ب موجبة
- فى إتجاه وصَ إذا كانت ب سالبة

فمثلاً:

إذا كانت : د(س) = (س − ٢)^{٢} + ٣

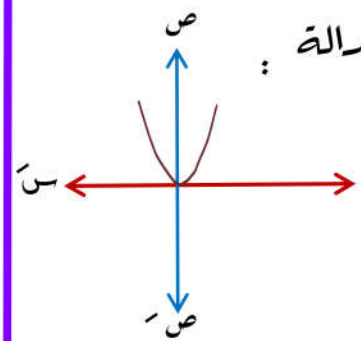
فمثلاً:

إذا كانت : د(س) = (س − ٢)^{٢} + ٣

لرسم منحنى هذه الدالة :

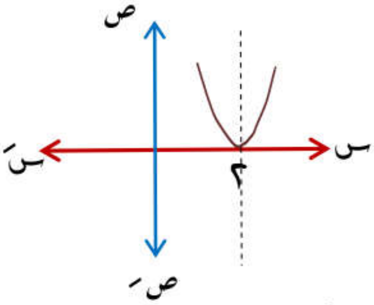
(١) نرسم الدالة :

ص = س^{٢}



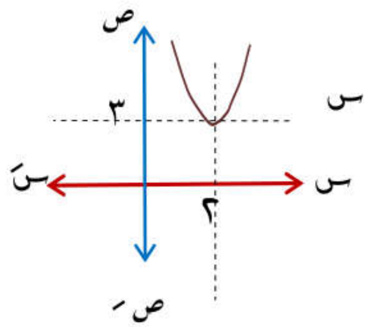
(٢) ∵ أ = −٢

نتحرك بالدالة أفقيا وحدتان جهة اليمين



(٢) ∵ ب = ٣ (موجبة)

نتحرك بالدالة ثلاث وحدات رأسيا لأعلى



ملحوظة

فى الدالة د : د (س) = (س + أ) + ب

تكون النقطة (−أ ، ب)

(أ) نقطة رأس المنحنى

فى حالة الدالة التربيعية والمقياس

(ب) نقطة التماثل

فى حالة الدالة الدالة التكعيبية والكسرية

مثال ٤

مثل بيانيا الدالة د :

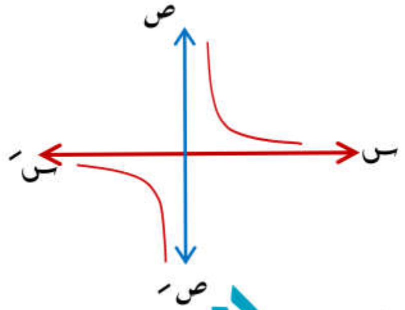
د (س) = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٢

ومن الرسم عين مجال ومدى الدالة

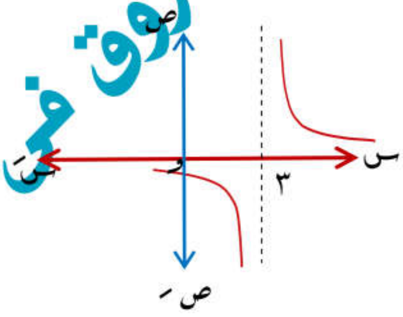
وابحث إطرادها

الحـــــل

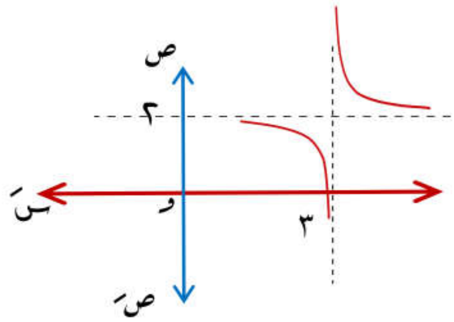
نمثل بيانيا منحنى الدالة ص = $\frac{١}{س}$



ثم نتبعه بإزاحة أفقية مقدارها ٣ وحدات في اتجاه و س



ثم نتبعه بإزاحة رأسية لأعلى مقدارها ٢ وحدات



المجال = ح − {٣} ، **المدى** = ح − {٢}

الإطراد :

– تناقصية في :]٣ ، ∞[

– تناقصية في:]−∞ ، ٣[

النوع : – ليست زوجية ولا فردية

– أحادية

التماثل : متماثلة حول النقطة (٣ ، ٢)

مثـــال ٤

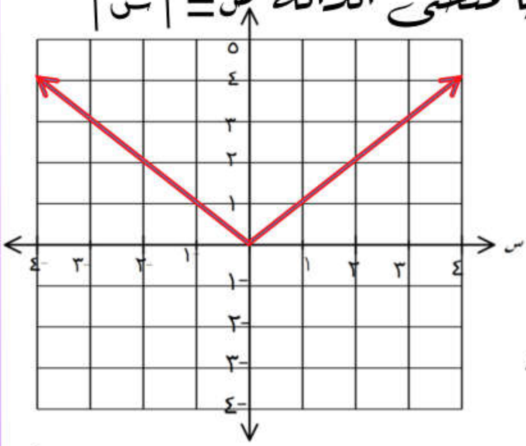
مثل بيانيا الدالة د :

د (س) = |س + ٢| − ١

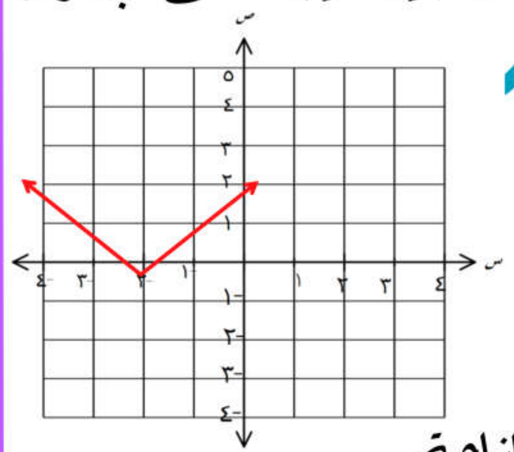
ومن الرسم عين مجال ومدى الدالة وابحث إطرادها

الحـــــل

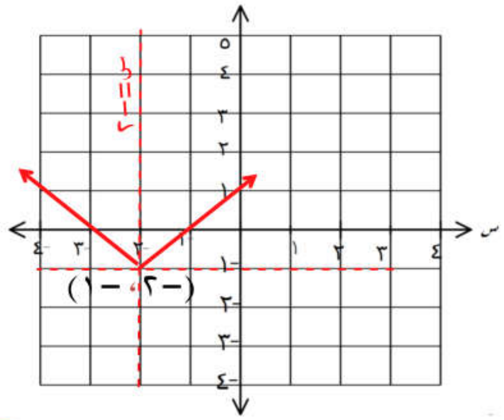
نمثل بيانيا منحنى الدالة ص = |س|



ثم نتبعه بإزاحة أفقية مقدارها ٢ وحدات في اتجاه و س



ثم نتبعه بإزاحة رأسية لأسفل مقدارها وحدة واحدة



المجال = ح ، المدى =]-١، ∞[

الإطراد :

- تزايدية فى :]-٢ ، ∞[
- تناقصية فى :]-∞ ، -٢[

النوع :

- ليست زوجية ولا فردية
- ليست أحادية

التماثل : متماثلة حول المستقيم س = -٢

رابعاً : الإنعكاس

لأى دالة د يكون المنحنى :

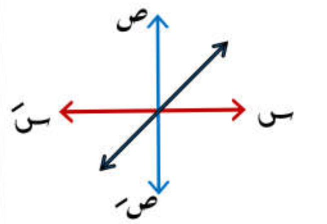
ص = -د (س)

هو نفس المنحنى : ص = د (س)

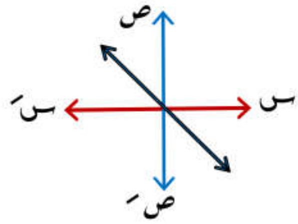
بالإنعكاس فى محور السينات

(١) الدالة الخطية

(أ) ص = س

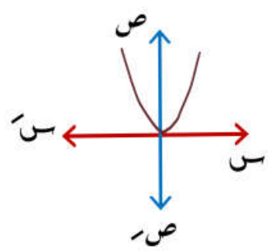


(ب) ص = - س

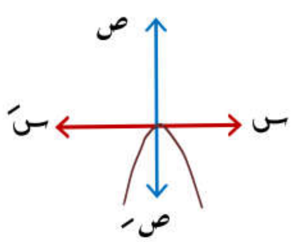


(٢) الدالة التربيعية

(أ) ص = س٢

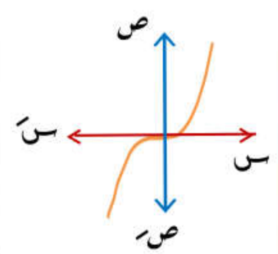


(ب) ص = - س٢

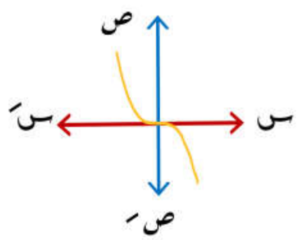


(٣) الدالة التكعيبية

(أ) ص = س٣

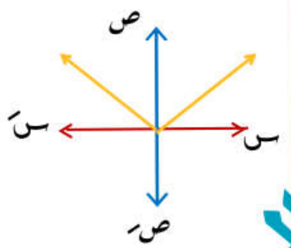


(ب) ص = - س٣

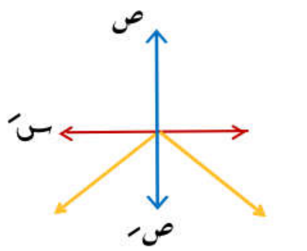


(٤) دالة المقياس

(أ) ص = |س|

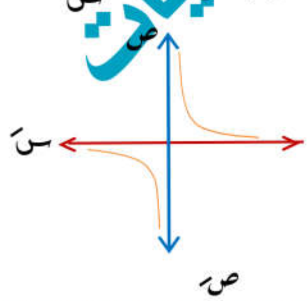


(ب) ص = - |س|

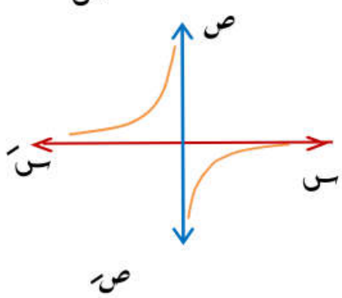


(٤) دالة المقياس

(أ) ص = $\frac{١}{س}$



(ب) ص = - $\frac{١}{س}$



إذا كانت :

د (س) = **-** (س + أ) + ب

- (١) - ← انعكاس
- (٢) أ ← إزاحة أفقية
- (٣) ب ← إزاحة رأسية

ويجب ترتيب اجراء التحويلات بنفس الترتيب السابق

مثال ٥

ارسم الشكل البيانى للدالة د :
د (س) = − س^{٢} + ٤ س − ٣
ومن الرسم عين المجال والمدى والنوع والإطراد وابحث نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

الحل

د (س) = − س^{٢} + ٤ س − ٣

∵ معامل س^{٢} عدد سالب

∴ نضع الدالة على الصورة :

د (س) = −(س + أ)^{٢} + ب

د (س) = − (س^{٢} − ٤ س + ٣)

∵ $\frac{١}{٢}$ معامل الحد الأوسط = −٢

∴ مربعه = ٤

بإضافة ٤ ، −٤ للمقدار

د (س) = − (س^{٢} − ٤ س + ٤ − ٤ + ٣)

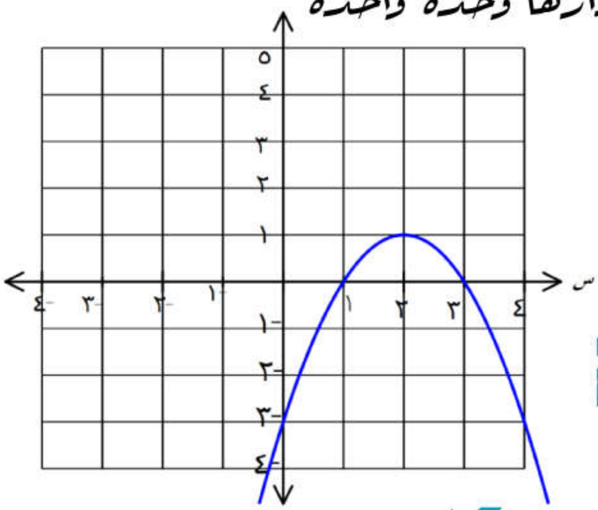
ثلاثى مربع كامل

د (س) = −[(س − ٢)^{٢} − ٤ + ٣]

∴ د (س) = −[(س − ٢)^{٢} − ١]

∴ د (س) = − (س − ٢)^{٢} + ١

∴ منحنى الدالة د هو نفس منحنى الدالة : ص = س^{٢}
بالإنعكاس فى محور السينات
متبوعا بإزاحة أفقية
− مقدارها ٢ وحدات − فى إتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$
ثم إزاحة رأسية لأعلى مقدارها وحدة واحدة



المجال = ح ، المدى =]−∞ ، ١]

الإطراد :
− تزايدية فى :]−∞ ، ٢]
− تناقصية فى : [٢ ، ∞[

النوع :
− ليست زوجية ولا فردية
− ليست أحادية

التماثل :
متماثلة حول المستقيم س = ٢

قاعدة مهمة

إذا كانت: $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{أ س} + \text{ب}}{\text{س} + \text{حـ}} + \text{أ}$

(حيث معامل س فى المقام=١)

فإن: $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{ب} - (\text{أ} \times \text{حـ})}{\text{س} + \text{حـ}} + \text{أ}$

مثال ٥

ارسم الشكل البيانى للدالة د: $\text{د}(\text{س}) = \frac{٢\text{س} - ٣}{\text{س} - ١}$

والإطراد وابحث نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غيرذلك

الحل

$\because \text{د}(\text{س}) = \frac{٢\text{س} - ٣}{\text{س} - ١}$

$\therefore \text{د}(\text{س}) = \frac{-٣ - [٢ \times (-١)]}{\text{س} - ١} + ٢$

$\therefore \text{د}(\text{س}) = \frac{-٣ - [-٢]}{\text{س} - ١} + ٢$

$\text{د}(\text{س}) = \frac{-٣ + ٢}{\text{س} - ١} + ٢$

$\therefore \text{د}(\text{س}) = \frac{-١}{\text{س} - ١} + ٢$

منحنى الدالة د هو نفس منحنى الدالة: $\text{ص} = \frac{١}{\text{س}}$

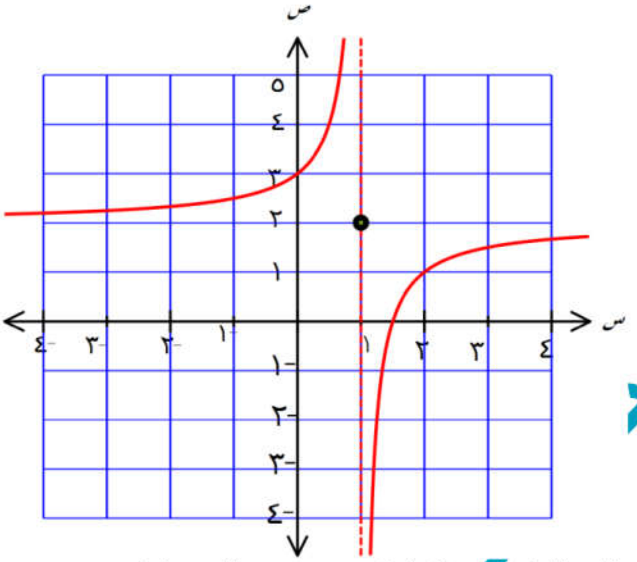
بالإنعكاس فى محور السينات

∴ متبوعا بإزاحة أفقية

− مقدارها وحدة واحدة − فى إتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

ثم إزاحة رأسية

− لأعلى − مقدارها ٢ واحدة



، الدالة متماثلة حول النقطة (١ ، ٢)

∴ المجال = ح − {١}

المدى = ح − {٢}

الإطراد: الدالة تناقصية فى]−∞ ، ١[،]١ ، ∞[

النوع: ليست زوجية ولا فردية

ملحوظة مهمة

** $\sqrt{\text{س}^٢} = |\text{س}|$ ، $\text{س} \in \text{ح}$

اى أن:

$\sqrt{\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٩} = \sqrt{(\text{س} - ٣)^٢}$

$= |\text{س} - ٣|$

مثـــال ٥

ارسم الشكل البيانى للدالة د :

$د(س) = \sqrt{س^2 - ٢س + ١} + ٢$

ومن الرسم عين المجال والمدى والإطراد وابحث نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

الحـــل

$\because د(س) = \sqrt{س^2 - ٢س + ١} + ٢$

$= \sqrt{(س-١)^2} + ٢$

$\therefore د(س) = |س - ١| + ٢$

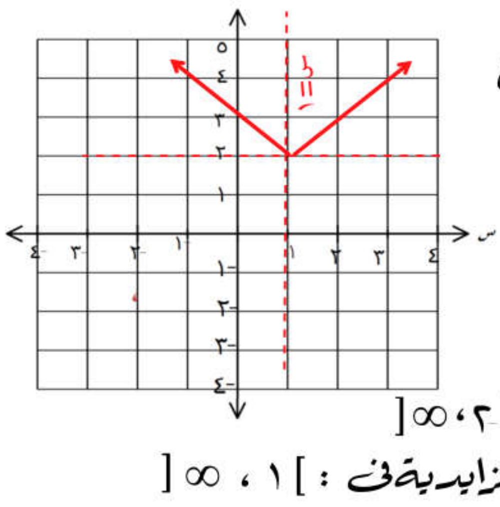
ومنحنى د هو نفس منحنى الدالة : ص = |س|

بإزاحة أفقية

مقدارها وحدة واحدة – فى إتجاه $\overleftarrow{وس}$

متبوعا بإزاحة رأسية

– مقدارها ٢ وحدة – لأعلى



المجال = ح

المدى = [٢ ، ∞[

الإطراد تزايدية فى :]١ ، ∞[

تناقصية فى:]-∞ ، ١[

النوع : ليست زوجية ولا فردية

ليست أحادية

التماثل : متماثلة حول المستقيم س = ١

خامساً :التمدد والإنكماش

* لأى دالة د يكون المنحنى

ص = أ د (س) حيث أ ∈ ح*

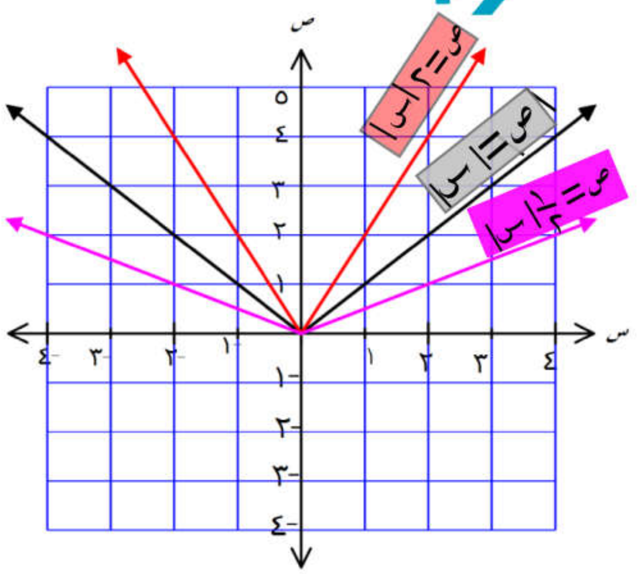
- هو تمدد رأسى لمنحنى الدالة

ص = د (س) عندما أ > ١

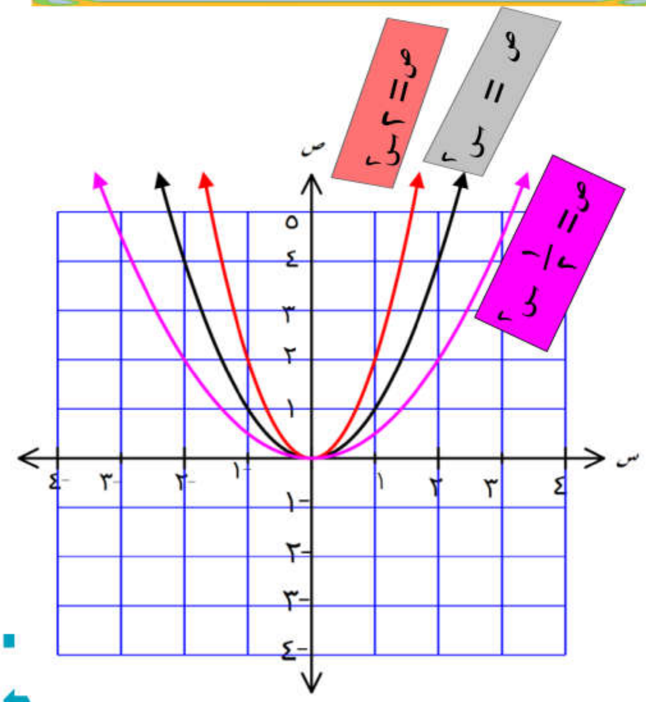
- هو انكماش رأسى لمنحنى الدالة

ص = د (س) عندما ٠ < أ < ١

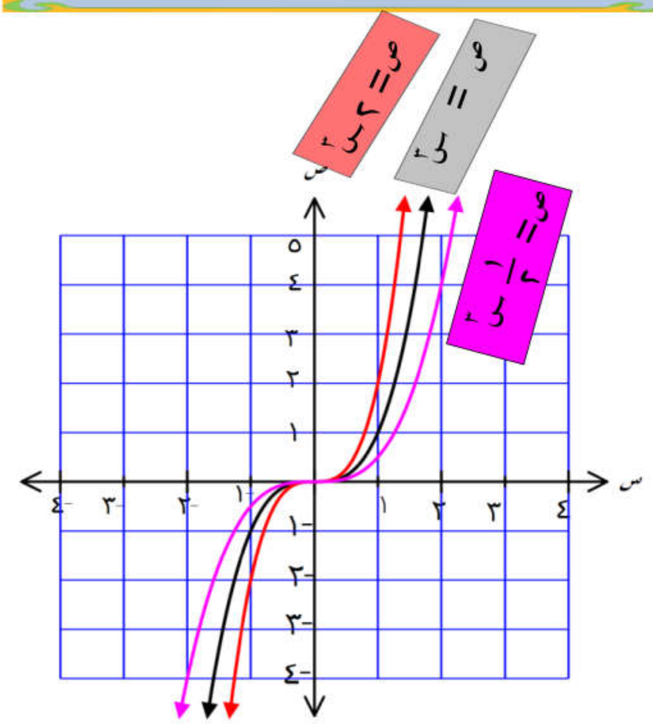
تمدد وانكماش المقياس



تمدد وانكماش الدالة التربيعية



تمدد وانكماش الدالة التكعيبية



ملحوظة مهمة

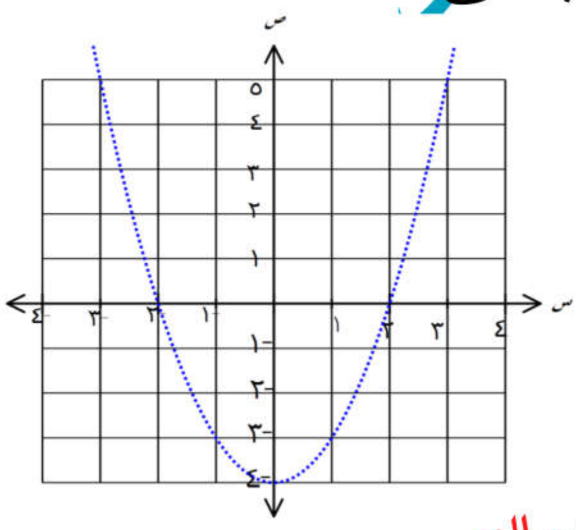
منحنى الدالة : ص = |د(س)|
حيث د كثيرة الحدود
يمثله بيانياً منحنى الدالة د مع
استبدال الجزء اسفل محور السينات
بصورته بالإنعكاس فى محور السينات

مثال ١

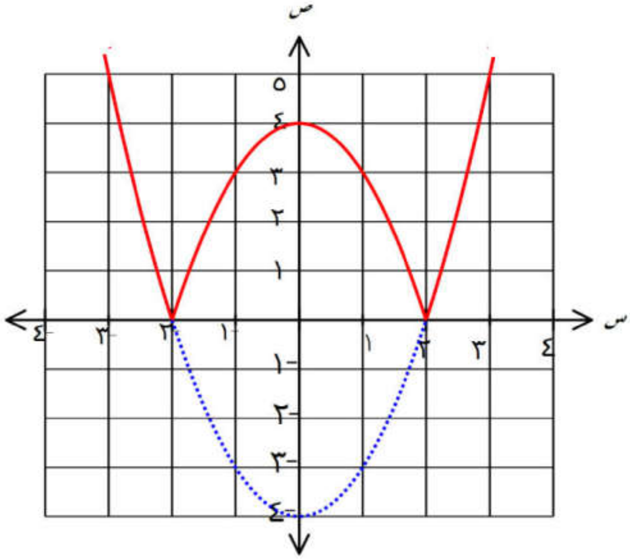
ارسم الشكل البيانى للدالة د :
د(س) = |س٢ − ٤|

الحل

نمثل الدالة : ص = س٢ − ٤
كما بالشكل



باستبدال
الجزء المرسوم من الدالة تحت
محور السينات بصورته بالانعكاس فى
محور السينات



مثـــــال ١

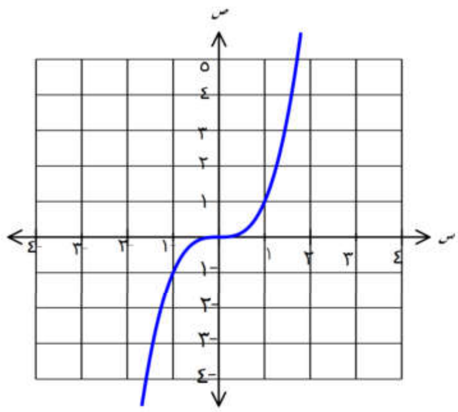
ارسم الشكل البيانى للدالة د :

$$د\,(س) = -|س^{٣}|$$

الحــــــل

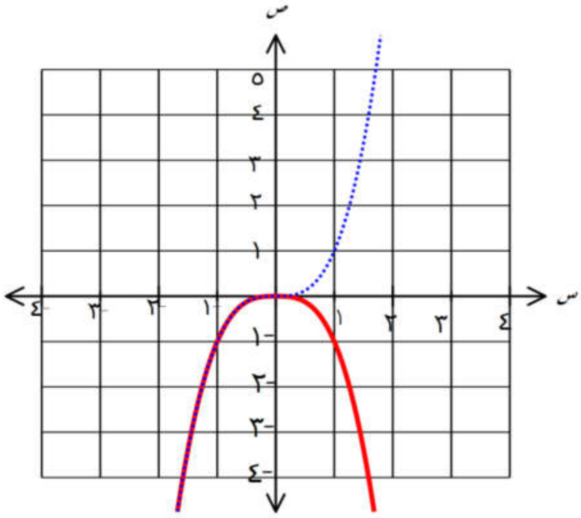
نمثل الدالة د : ص = $س^{٣}$

كما بالشكل :

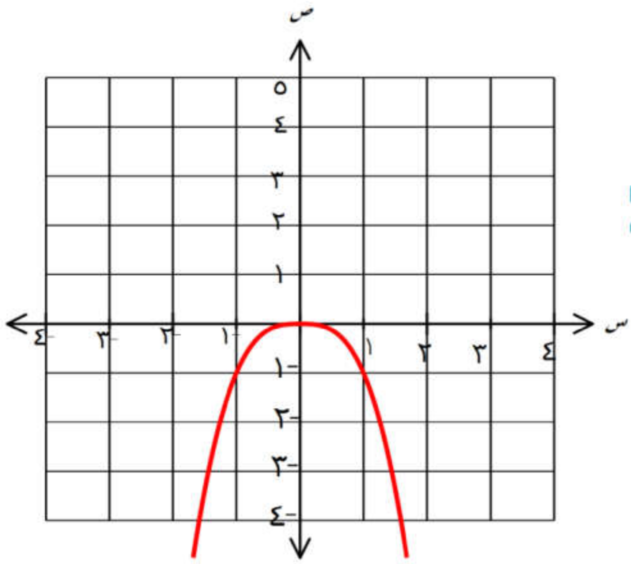


منحنى د يمثله بيانيا منحنى ص

الجزء المرسوم من الدالة فوق



وتكون الشكل النهائى للدالة



مسائل تمثل بإعادة تعريف دالة المقياس

ارسم الشكل البياني للدالة د :

$\text{د}(\text{س}) = \text{س}|\text{س}| - ١$

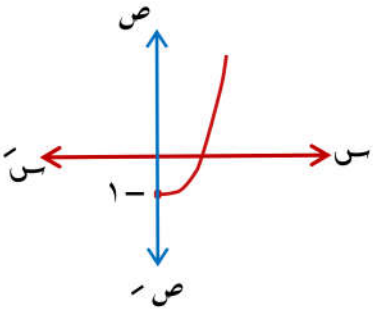
الحل :

$\because |\text{س}| = \begin{cases} \text{س} & \text{عندما } \text{س} \geq ٠ \\ -\text{س} & \text{عندما } \text{س} < ٠ \end{cases}$

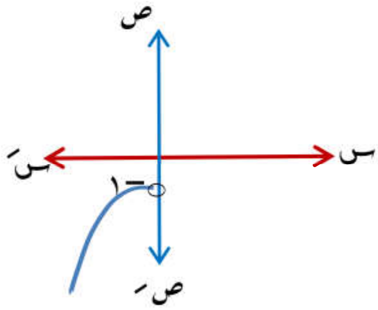
$\therefore \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}(\text{س}) - ١ & \text{عندما } \text{س} \geq ٠ \\ \text{س}(-\text{س}) - ١ & \text{عندما } \text{س} < ٠ \end{cases}$

$\therefore \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ - ١ & \text{عندما } \text{س} \geq ٠ \\ -\text{س}^٢ - ١ & \text{عندما } \text{س} < ٠ \end{cases}$

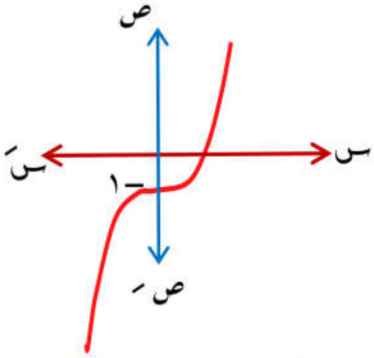
$\therefore \text{د}(\text{س}) = \text{س}^٢ - ١$ عندما $\text{س} \geq ٠$



$\text{د}(\text{س}) = -\text{س}^٢ - ١$ عندما $\text{س} < ٠$



التمثيل البياني للدالة د



تدريب

ارسم الشكل البياني للدالة د :

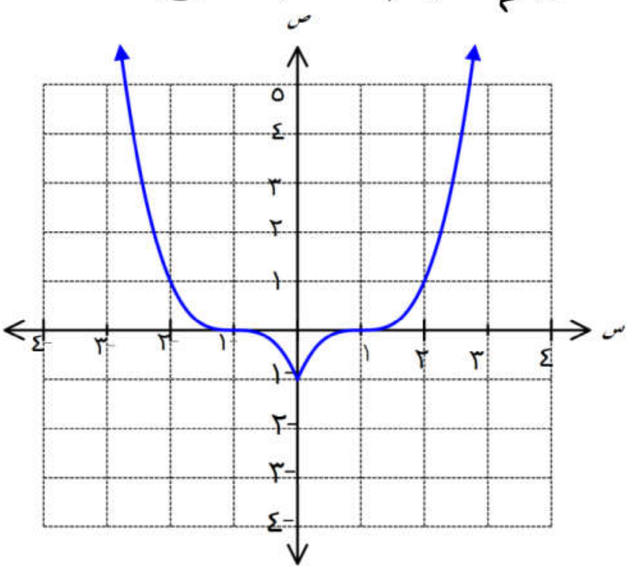
$\text{د}(\text{س}) = \left(|\text{س}| - ١\right)^٣$

الحل :

$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} (\text{س} - ١)^٣ & \text{عندما } \text{س} \geq ٠ \\ (-\text{س} - ١)^٣ & \text{عندما } \text{س} < ٠ \end{cases}$

$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} (\text{س} - ١)^٣ & \text{عندما } \text{س} \geq ٠ \\ -(\text{س} + ١)^٣ & \text{عندما } \text{س} < ٠ \end{cases}$

ويتم تمثيلها كما بالشكل



حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

أولاً : خواص القيمة المطلقة للعدد

الخاصية (١) |أ| ≥ ٠

مقياس العدد أ هو قيمة أكبر من أو تساوي الصفر

|−٥| = ٥

، |٣| = ٣

إذا كان : |أ| = صفر فإن أ = صفر

فمثلاً :

إذا كان : |س − ٢| = ٠ فإن

س − ٢ = ٠ ∴ س = ٢

مثال (١)

أوجد في ح مجموعة الحل للمعادلات الآتية

(١) |س + ٢| + ٣ = ٠

الحل

∵ |س + ٢| + ٣ = ٠

∴ |س + ٢| = −٣

، ∵ القيمة المطلقة لأى عدد ≥ ٠

∴ مجموعة الحل = φ

(٢) |س − ٥| = ٠

الحل

∵ القيمة المطلقة للعدد (س − ٥) = ٠

∴ س − ٥ = صفر ∴ س = ٥

∴ م . ح = {٥}

الخاصية (٢) |أ| = حـ ، حـ > ٠

فإن : أ = ± حـ

∵ |٣| = ٣

، |−٣| = ٣

∴ إذا كان: |س| = ٣

فإن: س = ± ٣

مثال (٢)

أوجد في ح مجموعة الحل للمعادلة الآتية

|٢س − ٣| = ٧

الحل

∵ |٢س − ٣| = ٧

إما ٢س − ٣ = ٧	أو ٢س − ٣ = −٧
٢س = ٧ + ٣	∴ ٢س = −٧ + ٣
٢س = ١٠	∴ ٢س = −٤
س = ٥	∴ س = −٢

∴ م . ح = {٥ ، −٢}

الخاصية ٣ |أ ب| = |أ| × |ب|

|٣ س - ٦| = |٣ (س-٢)|

= |٣| × |س-٢|

= ٣ |س-٢|

توزيع المقياس على حاصل الضرب

مثال ٣

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلة الآتية

|٢س - ١| + |٤س - ٢| = ٢١

الحل

∵ |٤س - ٢| = |٢(٢س - ١)|

= ٢ |٢س - ١|

∴ |٢س - ١| + ٢ |٢س - ١| = ٢١

∴ ٣ |٢س - ١| = ٢١

بالقسمة على ٣ للطرفين

∴ |٢س - ١| = ٧

إما ٢س - ١ = ٧	أو ٢س - ١ = -٧
∴ ٢س = ٧ + ١	∴ ٢س = -٧ + ١
∴ ٢س = ٨	∴ ٢س = -٦
∴ س = ٤	∴ س = -٣

∴ م . ح = {٥ ، -٣}

الخاصية ٤ |أ + ب| ≤ |أ| + |ب|

ويكون :

(أ) |أ + ب| = |أ| + |ب|

إذا كان : أ ، ب لهما نفس الإشارة

(ب) |أ + ب| < |أ| + |ب|

إذا كان : أ ، ب مختلفين في الإشارة

مثال ٤

إذا كان : |أ + ب| = |أ| + |ب|

حيث أ ، ب أعداد حقيقية

فإن : أ ب ...... صفر

الخاصية ٥ إذا كان : |أ| = |ب|

فإن : أ = ± ب

خاصية تساوي مقياسين

مثال ٥

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلة الآتية

|٣س + ٧| = |٢س + ٣|

الحل

∵ |٣ س + ٧| = |٢س + ٣|

∴ ٣ س + ٧ = ± (٢س + ٣)

إما

$$3\text{س} + 7 = 2\text{س} + 3$$

$$\therefore \boxed{\text{س} = -4}$$

أو

$$3\text{س} + 7 = -2\text{س} - 3$$

$$\therefore 3\text{س} + 2\text{س} = -7 - 3$$

$$\therefore 5\text{س} = -10$$

$$\therefore \boxed{\text{س} = -2}$$

$$\therefore \text{م.ح} = \{-4 ، -2\}$$

حـــل آخـــر

$$\because |3\text{س} + 7| = |2\text{س} + 3|$$

بالتربيع للطرفين

$$\therefore (3\text{س} + 7)^2 = (2\text{س} + 3)^2$$

$$9\text{س}^2 + 42\text{س} + 49 = 4\text{س}^2 + 12\text{س} + 9$$

$$\therefore 5\text{س}^2 + 30\text{س} + 40 = 0$$

بالقسمة على 5 للطرفين

$$\therefore \text{س}^2 + 6\text{س} + 8 = 0$$

$$(\text{س} + 2)(\text{س} + 4) = 0$$

إما $\text{س} + 2 = 0$ $\therefore \text{س} = -2$ | أو $\text{س} + 4 = 0$ $\therefore \text{س} = -4$

$$\text{م.ح} = \{-4 ، -2\}$$

الخاصية (6) $\sqrt{\text{أ}^2} = |\text{أ}|$

مثـــال (6)

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلة الآتية

$$\sqrt{\text{س}^2 - 6\text{س} + 9} = 17$$

الحـــل

المقدار $= \text{س}^2 - 6\text{س} + 9$ مربع كامل

$$= (\text{س} - 3)^2$$

$$\because \sqrt{\text{س}^2 - 6\text{س} + 9} = 17$$

$$\sqrt{(\text{س} - 3)^2} = 17$$

$$\therefore |\text{س} - 3| = 17$$

إما

$$\text{س} - 3 = 17$$

$$\therefore \text{س} = 17 + 3$$

$$\therefore \text{س} = 20$$

أو

$$\text{س} - 3 = -17$$

$$\therefore \text{س} = -17 + 3$$

$$\therefore \text{س} = -14$$

$$\text{م.ح} = \{-14 ، 20\}$$

حـــل آخـــر

$$\because \sqrt{\text{س}^2 - 6\text{س} + 9} = 17$$

بتربيع الطرفين

$$\therefore \text{س}^2 - 6\text{س} + 9 = 289$$

$$\therefore \text{س}^2 - 6\text{س} - 280 = 0$$

(س − ٢٠) (س + ١٤) = ٠

إما: س − ٢٠ = ٠ ∴ س = ٢٠

أو: س + ١٤ = ٠ ∴ س = −١٤

م . ح = {−١٤ ، ٢٠}

الخاصية ٧: أ^٢ = |أ|^٢

مثال ٧

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلة الآتية

س^٢ − ٥ |س| + ٦ = ٠

الحل

س^٢ − ٥ |س| + ٦ = ٠

∵ س^٢ = |س|^٢

∴ |س|^٢ − ٥ |س| + ٦ = ٠

(|س| − ٢) (|س| − ٣) = ٠

إما: |س| − ٢ = ٠ ∴ |س| = ٢ ∴ س = ± ٢

أو: |س| − ٣ = ٠ ∴ |س| = ٣ ∴ س = ± ٣

م . ح = {٢ ، −٢ ، ٣ ، −٣}

الخاصية ٨: |أ − ب| = |ب − أ|

مثال ٨

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلة الآتية

|س − ٢| + |٦ − ٣ س| = ١٢

الحل

∵ |٦ − ٣ س| = |٣ س − ٦|

∴ |س − ٢| + |٣ س − ٦| = ١٢

∴ |س − ٢| + ٣ |س − ٢| = ١٢

∴ ٤ |س − ٢| = ١٢

بالقسمة على ٤ للطرفين

∴ |س − ٢| = ٣

∴ س − ٢ = ± ٣

إما: س − ٢ = ٣ ∴ س = ٥

أو: س − ٢ = −٣ ∴ س = −١

∴ م . ح = {١ ، ٥}

الخاصية ٩

|س| = س عندما س ≥ ٠

|س| = −س عندما س < ٠

مثـــال ٩

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلة الآتية

|س − ٢| + ٢ س = ٨

الحـــل

∵ |س − ١| = { س − ١ عندما س ≥ ١ ، ١ − س عندما س < ١ }

، ∵ |س − ١| + ٢ س = ٨

∴ عندما س ≥ ١	عندما س < ١
س − ١ + ٢ س = ٨	١ − س + ٢ س = ٨
∴ ٣ س = ٩	∴ س + ١ = ٨
∴ س = ٣	∴ س = ٧ مرفوض لأن (س < ١)

م . ح = {٣}

مثـــال ١٠

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلة الآتية

|س − ٢| = س − ٢

الحـــل

عندما س ≥ ٢	عندما س < ٢
س − ٢ = س − ٢	− س + ٢ = س − ٢
بحذف (س − ٢)	٢ + ٢ = س + س
٠ = ٠	٢ س = ٤
∴ جميع قيم س ≥ ٢ تحقق المعادلة (جملة رياضية منطقية)	∴ س = ٢ مرفوض لأن س < ٢
س ∈ [٢ ، ∞[	

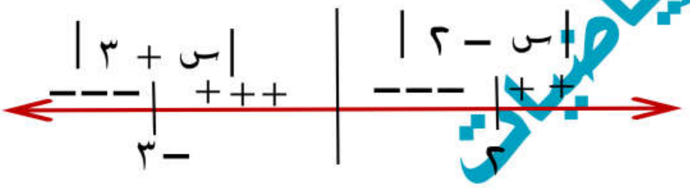
م . ح = [٢ ، ∞[

مثـــال ١١

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلة الآتية

|س − ٢| + |س + ٣| = ٥

الحـــل



نبحث عن الحل فى ٣ فترات

١ عندما س ≥ ٢

س − ٢ + س + ٣ = ٥

∴ ٢ س + ١ = ٥

∴ ٢ س = ٤ ∴ س = ٢

∴ س ∈ [٢ ، ∞[

∴ س = ٢ حلا للمعادلة

٢ عندما س ∈ [−٣ ، ٢[

− ~~س~~ + ٢ + ~~س~~ + ٣ = ٥

∴ ٥ = ٥

(جملة رياضية منطقية)

∴ [−٣ ، ٢[حلاً للمعادلة

③ عندما س < −٣

∴ − س + ٢ − س − ٣ =

∴ −٢س − ١ = ٥

∴ −٢س = ٦

∴ س = −٣ ∉]−∞ ، −٣[

∴ مجموعة الحل للمعادلة =

= {٢} ∪ [−٣ ، ٢[

= [−٣ ، ٢[

ثانياً : حل معادلات القيمة المطلقة بيانياً

تعتمد فكرة الحل على تقسيم المعادلة إلى دالتين إحداهما دالة قيمة مطلقة وتمثيلهما بيانيا وتكون مجموعة الحل = مجموعة الإحداثيات السينية لنقط التقاطع

مثال ١

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلة الآتية

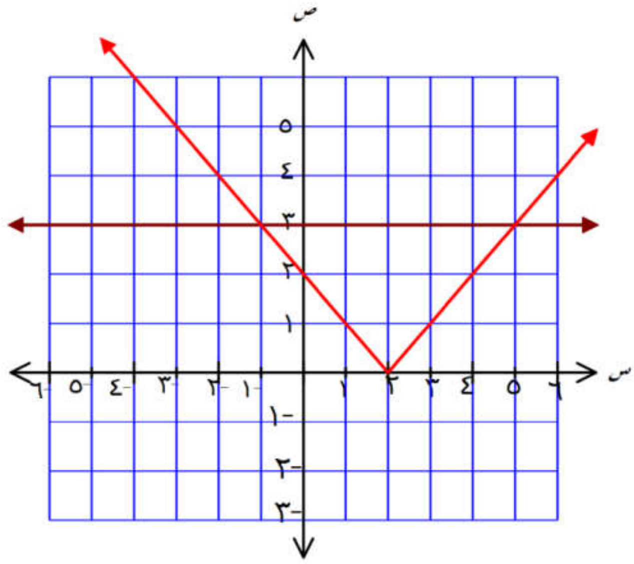
|س − ٢| = ٣ بيانيا

الحل

نفرض أن : د (س) = |س − ٢|

، ر (س) = ٣

نمثل كلا من : د، ر بيانيا



نجد أن منحني د، ر عند

(٥ ، ٣) ، (−١ ، ٣)

م . ح = {٥ ، −١}

مثال ٢

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلة الآتية

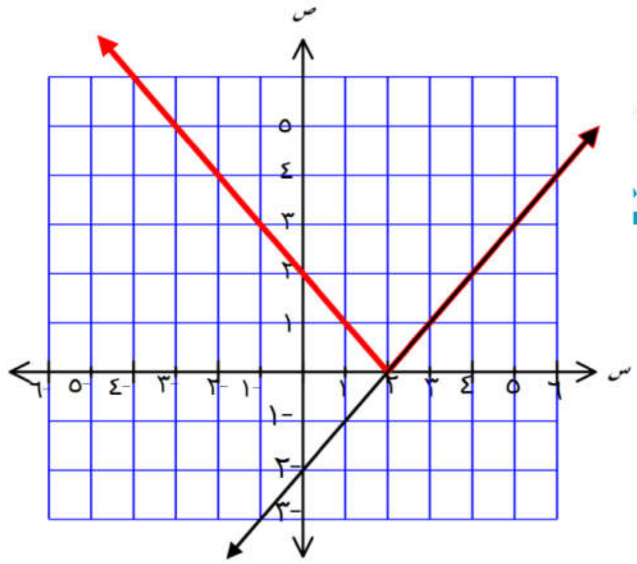
|س − ٢| = س − ٢ بيانيا

الحل

نفرض أن : د (س) = |س − ٢|

، ر (س) = س − ٢

نمثل كلا من : د، ر بيانيا



من الرسم نجد أن : منحنيا د، ر

يتقاطعان عندما س ∈ [٣ ، ∞[

م . ح = [٣ ، ∞[

مثال ٣

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلة الآتية

|س − ٢| + |س + ٣| = ٥ بيانيا

∵ |س − ٢| + |س + ٣| = ٥

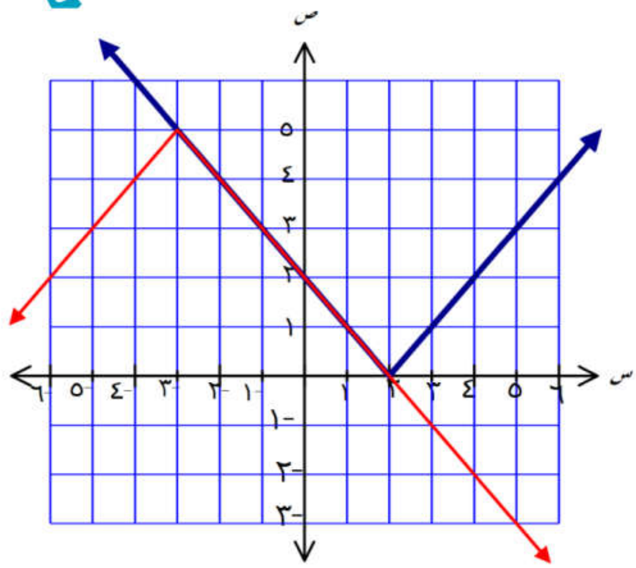
∴ |س − ٢| = ٥ − |س + ٣|

نفرض أن :

د (س) = |س − ٢|

، ر (س) = ٥ − |س + ٣|

نمثل كلا من : د، ر بيانيا



من الرسم نجد أن : منحنيا د، ر

يتقاطعان عندما س ∈ [−٣ ، ٢]

م . ح = [−٣ ، ٢]

==

مثــــال ٤

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلة الآتية

|س − ٢| + |س − ١| = ٥ بيانيا

الحـــــل

∵ |س − ٢| + |س − ١| = ٥

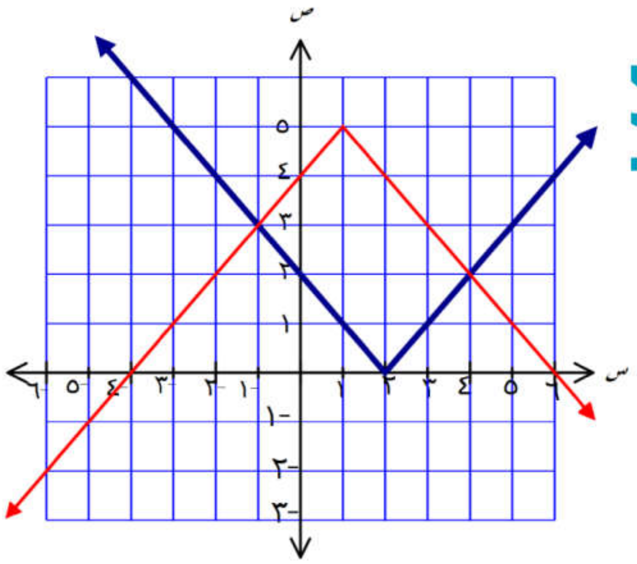
∴ |س − ٢| = ٥ − |س − ١|

نفرض أن:

د (س) = |س − ٢|

، ر (س) = ٥ − |س − ١|

نمثل كلا من د، ر بيانيا



من الرسم نجد أن : منحنيا د، ر

(٤ ، ٢) ، (−١ ، ٣)

م . ح = {٤ ، −١}

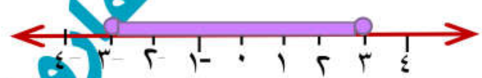
==

ثالثاً : حل متباينات القيمة المطلقة جبرياً

أولاً : المتباينة : $|س| \le ٣$

تعني جميع الأعداد الحقيقية التي قيمتها المطلقة أقل من أو تساوي ٣

وهي تمثل بالفترة [-٣ ، ٣]



أي أن : إذا كانت $|س| \le ٣$

فـــإن $-٣ \le س \le ٣$

مثـــال ١

أوجد فى ح مجموعة الحل للمتباينة الآتية

$|س - ٢| \le ٣$

الحـــل

$\because |س - ٢| \le ٣$

$\therefore -٣ \le س - ٢ \le ٣$

بإضافة ٢ للأطراف الثلاثة

$\therefore -٣ + ٢ \le س - ٢ + ٢ \le ٣ + ٢$

$-١ \le س \le ٥$

م . ح = [-٣ ، ٢]

مثـــال ٢

أوجد فى ح مجموعة الحل للمتباينة الآتية

$|س - ١| < ٤$

الحـــل

$\because |س - ١| < ٤$

$\therefore -٤ < س - ١ < ٤$

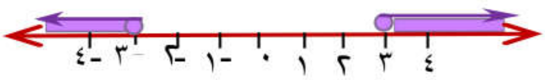
بإضافة ١ للأطراف الثلاثة

$\therefore -٤ + ١ \le س - ١ + ١ \le ٤ + ١$

$-٣ \le س \le ٥$

ثانياً : المتباينة $|س| \ge ٣$

تعني مجموعة الأعداد الحقيقية التي قيمتها المطلقة أكبر من أو تساوي ٣



أي أن إذا كان : $|س| \ge ٣$

فإن

$س \ge ٣$ أو $س \le -٣$

مثـــال ٣

أوجد فى ح مجموعة الحل للمتباينة الآتية

$|٢س - ١| \ge ٣$

الحـــــل

$\because \quad |٢س - ١| \geq ٣$

$\therefore \ ٢س - ١ \geq ٣$	$٢س - ١ \leq -٣$
$\therefore \ ٢س \geq ٣ + ١$	$٢س \leq -٣ + ١$
$\therefore \ ٢س \geq ٤$	$٢س \leq -٢$
$\therefore \ س \geq ٢$	$س \leq -١$

$\therefore$ م . ح $=$ ح $-$ $]-١ ، ٢[$

مثـــــال ٤

أوجد فى ح مجموعة الحل للمتباينة الآتية

$|٢س - ٣| > ٧$

الحـــــل

$\because \quad |٢س - ٣| > ٧$

$\therefore \ ٢س - ٣ > ٧$	$٢س - ٣ > -٧$
$\therefore \ ٢س > ٧ + ٣$	$٢س > -٧ + ٣$
$\therefore \ ٢س > ١٠$	$٢س > -٤$
$\therefore \ س > ٥$	$س > -٢$

$\therefore$ م . ح $=$ ح $-$ $[-٢ ، ٥]$

رابعاً : حل متباينات القيمة المطلقة بيانياً

لإيجاد مجموعة حل المتباينة :

$د(س) < ر(س)$

- نمثل الدالتان : د ، ر بيانيا
- نحدد الفترات التى تكون فيها الدالة : $د < ر$

مثـــــال ٥

أوجد فى ح مجموعة الحل للمتباينة الآتية

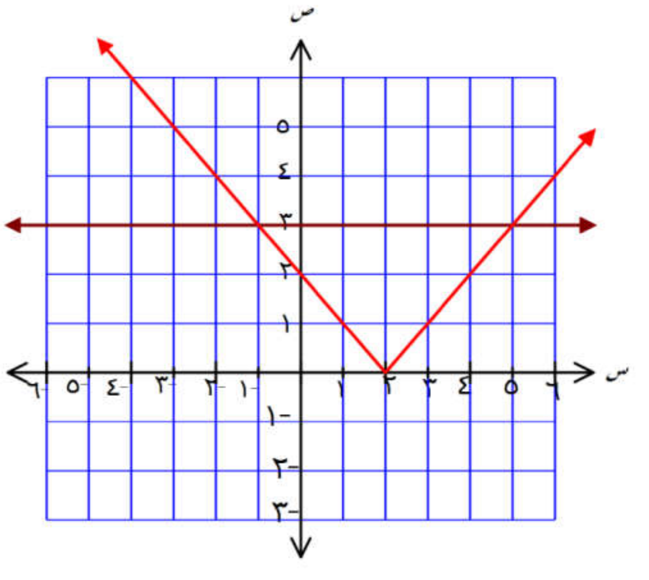
$|س - ٢| \leq ٣$ بيانيا

الحـــــل

نفرض أن : $د(س) = |س - ٢|$

، $ر(س) = ٣$

نمثل الدالتان : د ، ر بيانيا



من الرسم نجد أن دالة المقياس أكبر من الدالة الثابتة

فى الفترات :]٥، ∞[،]−∞، −١[

∴ م . ح = ح − [−١ ، ٥]

==

مثال ٦

أوجد فى ح مجموعة الحل للمتباينة الآتية

|س − ٢ |>|س − ١ | = ٥ بيانيا

الحل

∴ |س − ٢ |+|س − ١| > ٥

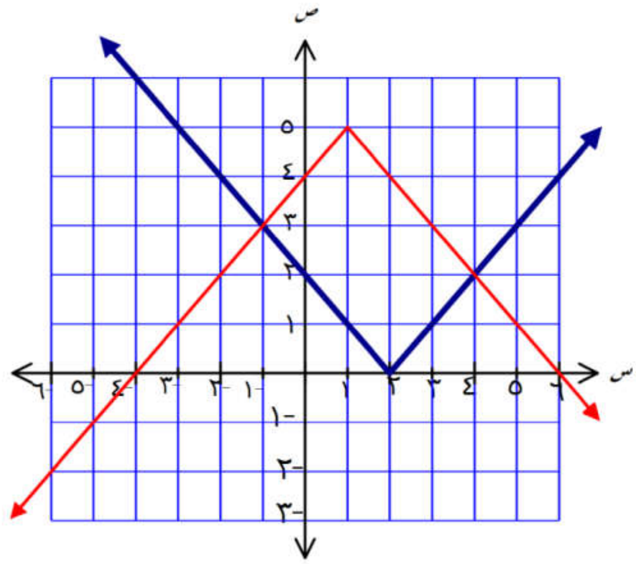
∴ |س − ٢ | > ٥ − | س − ١|

نفرض أن :

د (س) = |س − ٢|

، ر (س) = ٥ − |س − ١|

نمثل كلا من د ، ر بيانيا



من الرسم نجد أن منحنى د أعلى منحنى ر

:]٥، ∞[،]−∞، −١[

∴ م . ح = ح − [−١ ، ٥]

==

مثال ٧

أوجد فى ح مجموعة الحل للمتباينة الآتية

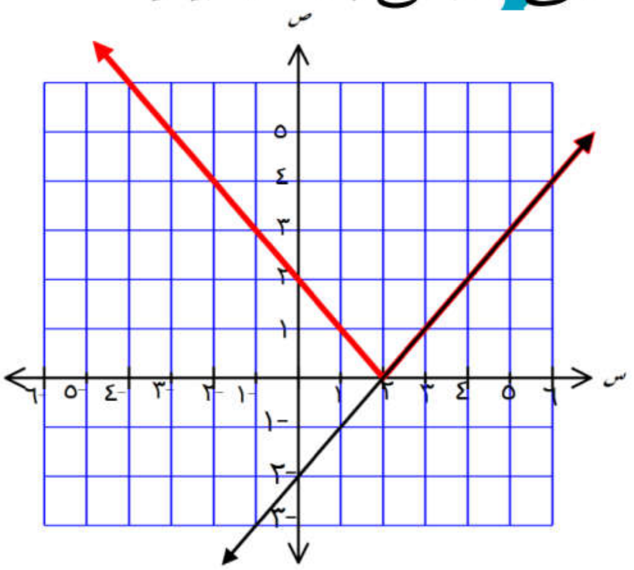
|س − ٢ |> س − ٢ بيانيا

الحل

نفرض أن : د (س) = |س − ٢ |

، ر(س) = س − ٢

نمثل كلا من : د ، ر بيانيا



د يقع أعلى منحنى ر

فى الفترة :]−∞ ، ٢[

∴ م . ح =]−∞ ، ٢[

مثـــــال ٦

أوجد فى ح مجموعة الحل للمتباينة الآتية

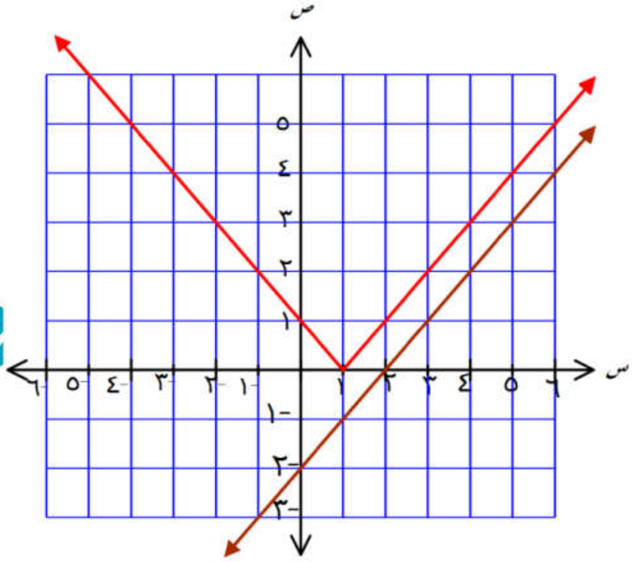
|س ـ ١| < س ـ ٢ بيانيا

الحــــل

نفرض أن : د (س) = |س ـ ١|

، ر(س) = س ـ ٢

نمثل كلا من : د ، ر بيانيا



من الرسم نجد أن :

منحنى د أعلى منحنى ر

لجميع قيم س الحقيقية

∴ مجموعة حل المتباينة

|س ـ ١| < س ـ ٢

فى ح هى ∅

تدريب

عين مجال الدالة د :

د (س) = $\sqrt{|س| - ٤}$

الفاروق

في

الجـــبر

الوحدة الثانية

الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

إعداد : أ/ عشرى فاروق

ت/ ٠١١٥٦٢٤٤٤٣١

الأسس الكسرية والمعادلات الأسية

تعريف

لأى $\text{أ} \in \text{ح}$ ، $\text{ن} \in \text{ص}^{+}$

فإن :

① $\text{أ}^{\text{ن}} = \text{أ} \times \text{أ} \times \text{أ} \times \cdots\cdots \times \text{أ}$

حيث أ مكرر إلى ن من العوامل

مثل :

$$(\sqrt{٢})^{٥} = \underbrace{\sqrt{٢} \times \sqrt{٢}} \times \underbrace{\sqrt{٢} \times \sqrt{٢}} \times \sqrt{٢}$$
$$= ٢ \times ٢ \times \sqrt{٢}$$
$$= ٤\sqrt{٢}$$

$$\left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{١ \times ١ \times ١}{٢ \times ٢ \times ٢} = \frac{١}{٨}$$

---

② $\text{أ}^{\text{صفر}} = ١$ حيث $\text{أ} \in \text{ح} - \{٠\}$

لاحظ :

$٣^{\text{صفر}} = ١$ ، $(-٣)^{\text{صفر}} = ١$ ، $-٣^{\text{صفر}} = -١$

$(\text{أ} - ٥)^{\text{صفر}} = ١$ عندما $\text{أ} \in \text{ح} - \{٥\}$

③ $\text{أ}^{-\text{ن}} = \frac{١}{\text{أ}^{\text{ن}}}$ حيث $\text{أ} \in \text{ح} - \{٠\}$

$$٢^{-٣} = \frac{١}{٢^{٣}} = \frac{١}{٨}$$

$$\frac{١}{٢^{-٣}} = ٢^{٣} = ٨$$

$$\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{-\text{ن}} = \left(\frac{\text{ب}}{\text{أ}}\right)^{\text{ن}}$$

قوانين الأسس الصحيحة

① $\text{أ}^{\text{م}} \times \text{أ}^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م}+\text{ن}}$

② $\text{أ}^{\text{م}} \div \text{أ}^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م}-\text{ن}}$

③ $(\text{أب})^{\text{م}} = \text{أ}^{\text{م}} \times \text{ب}^{\text{م}}$

④ $\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{م}} = \frac{\text{أ}^{\text{م}}}{\text{ب}^{\text{م}}}$

⑤ $(\text{أ}^{\text{م}})^{\text{ن}} = (\text{أ}^{\text{ن}})^{\text{م}} = \text{أ}^{\text{م ن}}$

مثال ①

إذا كان : $٢^{\text{س}} = ٣$ ، $٢^{\text{ص}} = ٥$

فإن : $٢^{\text{س}+\text{ص}} = \cdots\cdots\cdots$

الحل

$$\because ٢^{\text{س}+\text{ص}} = ٢^{\text{س}} \times ٢^{\text{ص}}$$
$$= ٣ \times ٥$$
$$= ١٥$$

مثـــال (٢)

إذا كان : $٣^{س} = ٢$

فإن : $٣^{س + ٢} = ...$

الحـــل

$\because ٣^{س + ٢} = ٣^{س} \times ٣^{٢}$

$= ٣^{س} \times ٩$

$= ٢ \times ٩$

$= ١٨$

مثـــال (٣)

إذا كان : $٢^{س} = ٣$ ، $٢^{ص} = ٥$

فإن : $٢^{س - ص} = ...$

الحـــل

$\because ٢^{س - ص} = \frac{٢^{س}}{٢^{ص}} = \frac{٣}{٥}$

مثـــال (٤)

إذا كان : $٢^{س} = ٣$ ، $٣^{ص} = ١٦$

فإن : س ص = ...

الحـــل

$\because ٣ = ٢^{س}$ ← (١)

، $٣^{ص} = ١٦$ ← (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢)

$\therefore (٢^{س})^{ص} = ١٦$

$\therefore ٢^{س ص} = ٢^{٤}$

$\therefore$ س ص $= ٤$

مثـــال (٥)

إختصر لأبسط صورة :

$$\frac{٨^{ن - ١} \times ٣٢^{٢ - ن}}{٣٢ \times ٤^{- ن}}$$

الحـــل

$$\text{المقدار} = \frac{(٢)^{٣ن - ٣} \times (٢^{٥})^{٢ - ن}}{٢^{٥} \times (٢^{٢})^{- ن}}$$

$$= \frac{٢^{٣ن - ٣} \times ٢^{١٠ - ٥ن}}{٢^{٥} \times ٢^{- ٢ن}}$$

$$= \frac{٢^{٧ - ٢ن}}{٢^{٥ - ٢ن}}$$

$$= ٢^{٧ - \cancel{٢ن} - ٥ + \cancel{٢ن}}$$

$$= ٢^{٢}$$

$$= ٤$$

مثـــال (٦)

إختصر لأبسط صورة :

$$\frac{٥ \times ٣^{٢ن} - ٤ \times ٣^{٢ن - ١}}{٢ \times ٣^{٢ن + ١} - ٣^{٢ن}}$$

الحـــل

$$\text{المقدار} = \frac{٥ \times ٣^{٢ن} - ٤ \times ٣^{٢ن} \times ٣^{-١}}{٢ \times ٣^{٢ن} \times ٣ - ٣^{٢ن}}$$

$$= \frac{\cancel{٣}^{٢ن}\left[٥ - ٤ \times ٣^{-١}\right]}{\cancel{٣}^{٢ن}\left[٢ \times ٣ - ١\right]}$$

$$= \frac{٥ - \frac{٤}{٣}}{٦ - ١}$$

$$= \frac{٥ - \frac{٤}{٣}}{٥}$$

بالضرب في ٣ بسطا ومقاما

$$= \frac{١٥ - ٤}{١٥}$$

$$= \frac{١١}{١٥}$$

الجذر النوني

المعادلة : $س^{ن} = أ$ حيث $أ \in ح$ ، $ن \in ص^{+}$

لحلها توجد عدة حالات :

١ إذا كان : ن عددا زوجيا والعدد أ موجبا

فإن المعادلة : $س^{ن} = أ$ توزع جذورها كما يلي

- جذران حقيقيان وهما : $س = \pm \sqrt[ن]{أ}$
- جذور مركبة غير حقيقية وعددها $= (ن - ٢)$ جذرا
- عدد الجذور المركبة = ن جذرا

∴ في المعادلة: $س^{٢} = ٤$ يكون :

عدد الجذور	عدد الجذور المركبة	عدد الجذور الحقيقية	عدد الجذور المركبة غير الحقيقية
٢	٢	٢	صفر

عند حل المعادلة : $س^{٤} = ١٦$ فإن :

$س^{٤} - ١٦ = ٠$

$(س^{٢} - ٤)(س^{٢} + ٤) = ٠$

$س^{٢} - ٤ = ٠$

∴ $س^{٢} = ٤$

∴ $س = \pm \sqrt{٤}$

∴ $س = \pm ٢$

$س^{٢} + ٤ = ٠$

$س^{٢} = -٤$

∴ $س = \pm \sqrt{-٤}$

∴ $س = \pm \sqrt{٤}\,ت$

∴ $س = \pm ٢ت$

∴ للمعادلة أربعة جذور ٢ حقيقية ، ٢غير حقيقية

∴ في المعادلة : $س^{٤} = ١٦$ يكون:

عدد الجذور	عدد الجذور المركبة	عدد الجذور الحقيقية	عدد الجذور المركبة غير الحقيقية
٤	٤	٢	٢

لاحظ

١ عدد الجذور المركبة

= الجذور المركبة غير الحقيقية + عدد الجذور الحقيقية

فى المعادلة : $س^{ن} = أ$

حيث $أ \in ع^{+}$، ن عدد زوجى موجب

٢ الجذرين الحقيقيين للمعادلة هما

$س = \pm \sqrt[ن]{أ}$

$\therefore$ المعادلة $س^{٨} = ٢٥٦$

لها جذران حقيقيان هما :

$س = \pm \sqrt[٨]{٢٥٦}$

$\therefore س = \pm ٢$

عدد الجذور المركبة غير الحقيقية = ٦

إذا كان ن عددا زوجيا والعدد أ سالبا

فإن المعادلة : $س^{ن} = أ$

- ليس لها جذور حقيقية
- وعدد الجذور = ن جذرا
- جميعهم جذور مركبة غير حقيقية

$\therefore$ المعادلة : $س^{٤} = -١٦$

عدد الجذور	عدد الجذور المركبة	عدد الجذور الحقيقية	عدد الجذور المركبة غير الحقيقية
٤	٤	٠	٤

٣ إذا كان : ن عددا فرديا والعدد $أ \in ع - \{٠\}$

فإن المعادلة : $س^{ن} = أ$ لها جذر حقيقى وحيد هو : $س = \sqrt[ن]{أ}$ وباقى الجذور

وباقى الجذور وعددها = (ن − ١) مركبة غير حقيقية

المعادلة : $س^{٣} = ٨$

لها جذر حقيقى وحيد هو : $س = \sqrt[٣]{٨} = ٢$

ولها جذران مركبان غير حقيقيان

والمعادلة : $س^{٥} = ٣٢$

لها جذر حقيقى وحيدهو : $س = \sqrt[٥]{٣٢} = ٢$

عدد جذورها المركبة غير الحقيقية = ٤

المعادلة : $س^{٣} = ٠$ لها ثلاث جذور حقيقية ومتساوية وكل منها يساوى صفر

الأسس الكسرية

١ إذا كان : $ن \in ص^{+} - \{١\}$ ، $أ \in ع^{+}$

فإن : $أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$

والعلاقة صحيحة أيضا فى حالة

أ عدد سالب

و ن عدد فردى موجب

$\therefore 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$

، $(-32)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-32} = -2$

لاحظ :

$(-5)^{\frac{1}{4}}$ ليس عددا حقيقيا

لأن أ سالب ، ن عدد زوجى

2 إذا كان : م ، ن عددان صحيحان موجبان مختلفان ، $\text{ن} > 1$

فإن $\text{أ}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{أ}^{\text{م}}}$

$\text{س}^{\frac{5}{3}} = (\sqrt[3]{\text{س}})^5 = \sqrt[3]{\text{س}^5}$

مثال 1

أكتب كلا مما يأتى على صورة أسية

(1) $\sqrt[5]{\text{س}^3}$ (2) $\sqrt[3]{\text{أ}^2\text{ب}^5}$

الحل

(1) $\sqrt[5]{\text{س}^3} = \text{س}^{\frac{3}{5}}$

(2) $\sqrt[3]{\text{أ}^2\text{ب}^5} = \text{أ}^{\frac{2}{3}}\,\text{ب}^{\frac{5}{3}}$

ملحوظة

$\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{ن}}} = |\text{س}|$ إذا كان : ن عدد زوجى

$\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{ن}}} = \text{س}$ إذا كان : ن عدد فردى

فمثلا :

$\sqrt[4]{\text{أ}^4} = |\text{أ}|$ ، $\sqrt[5]{\text{أ}^5} = \text{أ}$

تعميم قوانين الأسس

جميع قوانين الأسس الصحيحة يمكن تطبيقها على الأسس الكسرية

1. $\text{أ}^{\text{م}} \times \text{أ}^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م}+\text{ن}}$
2. $\text{أ}^{\text{م}} \div \text{أ}^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م}-\text{ن}}$
3. $(\text{أب})^{\text{م}} = \text{أ}^{\text{م}} \times \text{ب}^{\text{م}}$
4. $\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{م}} = \frac{\text{أ}^{\text{م}}}{\text{ب}^{\text{م}}}$
5. $(\text{أ}^{\text{م}})^{\text{ن}} = (\text{أ}^{\text{ن}})^{\text{م}} = \text{أ}^{\text{م}\text{ن}}$

مثال 2

أوجد ناتج : $\sqrt[5]{\text{أ}^3} \times \sqrt[3]{\text{أ}^5}$ فى أبسط صورة

الحل

$$\sqrt[5]{\text{أ}^3} \times \sqrt[3]{\text{أ}^5} = \text{أ}^{\frac{3}{5}} \times \text{أ}^{\frac{5}{3}}$$

$$= \text{أ}^{\frac{3}{5}+\frac{5}{3}}$$

$$= \text{أ}^{\frac{34}{15}}$$

خواص الجذور النونية

إذا كان : أ ، ب عددين حقيقيين ، $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}$ ، $\sqrt[\text{ن}]{\text{ب}} \in \text{ح}$ فإن :

1. $\sqrt[\text{ن}]{\text{أب}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{أ}} \times \sqrt[\text{ن}]{\text{ب}}$

② $\sqrt[\text{ن}]{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}} = \frac{\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}}{\sqrt[\text{ن}]{\text{ب}}}$

مثال ③

اختصر لأبسط صورة : $\sqrt[٤]{٨١\,\text{س}^{٤}\,\text{ص}^{١٦}}$

الحل

$\sqrt[٤]{٨١\,\text{س}^{٤}\,\text{ص}^{١٦}} = \sqrt[٤]{٨١} \times \sqrt[٤]{\text{س}^{٤}} \times \sqrt[٤]{\text{ص}^{١٦}}$

$= ٤ \times |\text{س}| \times \text{ص}^{٤}$

$= ٤\,|\text{س}|\,\text{ص}^{٤}$

ملحوظة

❋ إذا كان: $\text{س}^{\frac{\ }{\text{ن}}} = \text{أ}$ حيث م فردى

فإن : $\text{س} = \text{أ}^{\frac{\text{ن}}{\text{م}}}$

فمثلا : إذا كان $\text{س}^{\frac{٥}{٢}} = ٣٢$

فإن : $\text{س} = (٣٢)^{\frac{٢}{٥}}$

$= (٢^{٥})^{\frac{٢}{٥}}$

$= ٢^{٢}$

$\therefore \text{س} = ٤$

❋ إذا كان: $\text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}} = \text{أ}$ فإن $\text{س} = \pm\, \text{أ}^{\frac{\text{ن}}{\text{م}}}$

بشرط أن يكون م ، ن ليس بينهما عامل مشترك وإذا كان أحدهما زوجيا فيجب أن يكون أ $\geq$ ٠

إذا كان $\text{س}^{\frac{\ }{٣}} = ١٦$

فإن : $\text{س} = \pm (١٦)^{\frac{٣}{٤}}$

$= \pm (٢^{٤})^{\frac{٣}{٤}}$

$= \pm ٢^{٣}$

$\therefore \text{س} = \pm ٨$

مثال ④

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلات الآتية :

① $٢\,\text{س}^{٤} = ١٦٢$

الحل

$\because ٢\,\text{س}^{٤} = ١٦٢$

بالقسمة على ٢ للطرفين

$\therefore \text{س}^{٤} = ٨١$

$\therefore \text{س} = \pm \sqrt[٤]{٨١}$

$\therefore \text{س} = \pm ٣$

$\therefore$ م.ح = $\{٣ ، -٣\}$

② $\text{س}^{٤} = -١٦$

الحل

$\because$ الأس زوجى والعدد سالب

$\therefore$ ليس للمعادلة جذور حقيقية

$\therefore$ م.ح = $\varnothing$

٣ $(س - ١)^{٥} = -٣٢$

الحل

∵ الأس فردى

∴ $س - ١ = \sqrt[٥]{-٣٢}$

∴ $س - ١ = -٢$

∴ $س = -٢ + ١$

∴ $س = -١$

م.ح = {−١}

---

٤ $(٢س - ١)^{٤} = ١٦$

الحل

∴ $٢س - ١ = \pm \sqrt[٤]{١٦}$

∴ $٢س - ١ = \pm ٢$

إما $٢س - ١ = ٢$	أو $٢س - ١ = -٢$
$٢س = ٢ + ١$	$٢س = -٢ + ١$
$٢س = ٣$	$٢س = -١$
$= \frac{٣}{٢}$	$س = \frac{-١}{٢}$

∴ م.ح = $\{\frac{٣}{٢} ، \frac{-١}{٢}\}$

---

٥ $س^{\frac{٣}{٤}} = ٢٧$

الحل

∵ م فردية

∴ $س = (٢٧)^{\frac{٤}{٣}}$

∴ $س = (٣^{٣})^{\frac{٤}{٣}}$

∴ $س = ٣^{٤}$

∴ $س = ٨١$

م.ح = {٨١}

---

٦ $\sqrt[٥]{س^{٢}} = ١$

الحل

$س^{\frac{٢}{٥}} = ١$ ∵ م زوجية

∴ $س = \pm (١)^{\frac{٥}{٢}}$

∴ $س = \pm ١$ م.ح = {١ ، −١}

---

٧ $(٢س - ١)^{\frac{٤}{٣}} = ٨١$

الحل

∵ م زوجية

∴ $٢س - ١ = \pm (٨١)^{\frac{٣}{٤}}$

∴ $٢س - ١ = \pm (٣^{٤})^{\frac{٣}{٤}}$

∴ $٢س - ١ = \pm ٣^{٣}$

∴ $٢س - ١ = \pm ٢٧$

إما | أو

$٢س - ١ = ٢٧$ | $٢س - ١ = -٢٧$

$٢س = ٢٧ + ١$ | $٢س = -٢٧ + ١$

$٢س = ٢٨$ | $٢س = -٢٦$

بالقسمة على ٢ للطرفين

∴ $س = ١٤$ | ∴ $س = -١٣$

∴ م.ح = $\{١٤ ، -١٣\}$

---

٨ $س^{\frac{٤}{٣}} - ٥ س^{\frac{٢}{٣}} + ٤ = ٠$

الحل

∴ $(س^{\frac{٢}{٣}} - ١)(س^{\frac{٢}{٣}} - ٤) = ٠$

إما $س^{\frac{٢}{٣}} - ١ = ٠$ | أو $س^{\frac{٢}{٣}} - ٤ = ٠$

$س^{\frac{٢}{٣}} = ١$ | $س^{\frac{٢}{٣}} = ٤$

∴ $س = \pm (١)^{\frac{٣}{٢}}$ | ∴ $س = \pm (٤)^{\frac{٣}{٢}}$

∴ $س = \pm ١$ | ∴ $س = \pm ٨$

∴ م.ح = $\{١ ، -١ ، ٨ ، -٨\}$

---

٩ $\sqrt[٣]{س^٢} - ٢٥ \sqrt[٣]{س} - ٥٤ = ٠$

الحل

$س^{\frac{٢}{٣}} - ٢٥ س^{\frac{١}{٣}} - ٥٤ = ٠$

$(س^{\frac{١}{٣}} - ٢)(س^{\frac{١}{٣}} - ٢٧) = ٠$

إما $س^{\frac{١}{٣}} - \quad = ٠$ | أو $س^{\frac{١}{٣}} - ٢٧ = ٠$

$س^{\frac{١}{٣}} = ٢$ | $س^{\frac{١}{٣}} = ٢٧$

$س = (٢)^٣$ | $س = (٢٧)^٣$

$س = ٨$ | $س = ١٩٦٨٣$

∴ م.ح = $\{٨ ، ١٩٦٨٣\}$

مثال ٥

أثبت أن:

$$\frac{٢٧^{ص - \frac{١}{٣}} \times \sqrt[ص]{٧^{ص^٢ + ٣ص}}}{٨١^{ص - ١} \times ٢١^{٥ - ص} \times ٤٩^{ص - ١}} = \frac{١}{٩}$$

الحل

الأيمن

$$= \frac{(٣^٣)^{ص - \frac{١}{٣}} \times (٧)^{\frac{ص^٢ + ٣ص}{ص}}}{(٣^٤)^{ص - ١} \times (٣ \times ٧)^{٥ - ص} \times (٧^٢)^{ص - ١}}$$

$$= \frac{٣^{٣ص - ١} \times ٧^{ص + ٣}}{٣^{٤ص - ٤} \times ٣^{٥ - ص} \times ٧^{٥ - ص} \times ٧^{٢ص - ٢}}$$

$$= \frac{٣^{٣ص - ١} \times ٧^{ص + ٣}}{٣^{٤ص - ٤ + ٥ - ص} \times ٧^{٥ - ص + ٢ص - ٢}}$$

$$= \frac{٣^{٣ص - ١} \times \cancel{٧^{ص + ٣}}}{٣^{٣ص + ١} \times \cancel{٧^{ص + ٣}}}$$

$$= \frac{٣^{٣ص - ١}}{٣^{٣ص + ١}}$$

$$= ٣^{٣ص - ١ - ٣ص -} = ٣^{-٢}$$

$= \frac{١}{٩} =$ الأيسر

الدرس الثاني

الدالة الأسية وتطبيقاتها

تعريف :

إذا كان $أ \in ح^+ - \{١\}$ فإن :

$د : ح \longrightarrow ح^+$ ، $د(س) = أ^س$

تسمى دالة أسية أساسها = أ

الدالة د : $د(س) = ٣^س$

تسمى دالة أسية أساسها = ٣

الدالة د : $د(س) = \left(\frac{١}{٢}\right)^{س+١}$

تسمى دالة أسية أساسها = $\frac{١}{٢}$

الدالة د : $د(س) = (-٣)^س$

ليست دالة أسية

مثـــال ١

إذا كانت الدالة د : $د(س) = \left(\frac{١}{٢}\right)^{س+١}$

فأوجد كلا مما يأتى

١ $د(١)$

$د(١) = \left(\frac{١}{٢}\right)^{١+١} = \left(\frac{١}{٢}\right)^٢ = \frac{١}{٤}$

٢ $د(-١)$

الحـــل

$د(-١) = \left(\frac{١}{٢}\right)^{-١+١} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{صفر} = ١$

٣ $د(٠)$

الحـــل

$د(٠) = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٠+١} = \frac{١}{٢}$

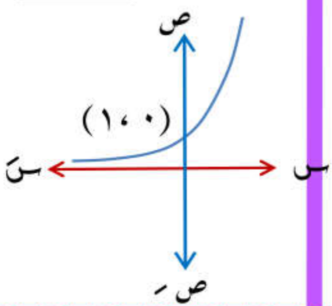
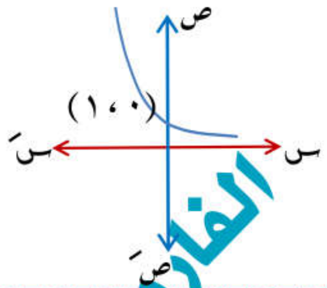
٤ $د(-٣)$

الحـــل

$د(-٣) = \left(\frac{١}{٢}\right)^{-٣+١} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{-٢} = ٤$

التمثيل البياني للدالة الأسية

الشكل البيانى للدالة: د (س) = أ^س

عندما: $\boxed{أ > ١}$	عندما: $\boxed{٠ < أ < ١}$
	
مجالها = ح	مجالها = ح
مداها = ح^+	مداها = ح^+
أ > ١	∵ $\boxed{٠ < أ < ١}$
∴ الدالة تزايدية على مجالها ح	∴ الدالة تناقصية على مجالها ح
وتسمى دالة نمو أسى معامله = أ	وتسمى دالة أسى معامله = أ
منحنى الدالة يمر بالنقطة (٠، ١)	منحنى الدالة يمر بالنقطة (٠، ١)
- منحنى الدالة يقترب من محور قيمة س	- منحنى الدالة يقترب من محور السينات كلما زادت قيمة س

منحنى الدالة : ص = $(\frac{١}{٢})^{س}$

هوصورة منحنى الدالة : ص = $(٢)^{س}$

بالإنعكاس فى محور الصادات

مثال ٢

أرسم منحنى الدالة د : ح ← ح^+

، د (س) = ٢^س متخذا س ∈ [-٣، ٤]

ومن الرسم أوجد قيمة تقريبية

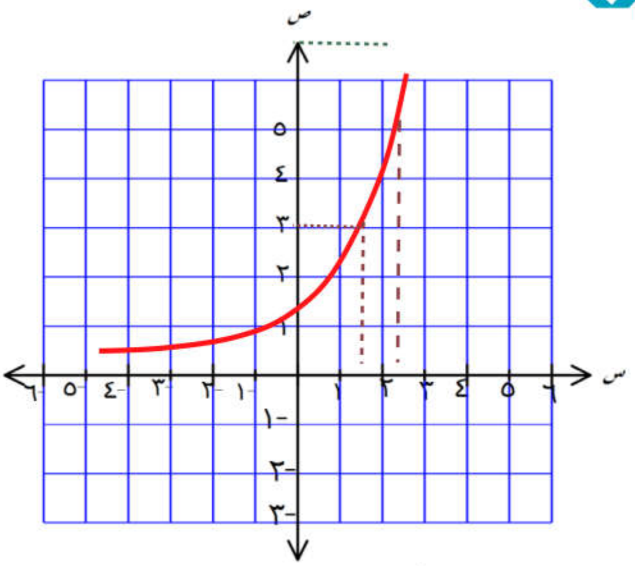
① د (١,٥)

② قيمة س عندما د (س) = ٥

الحل

∵ د (س) = ٢^س ، س ∈ [-٣، ٤]

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
د(س)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨	١٦



① د (١,٥)

من الرسم نجد أنه

د (١,٥) ≃ ٢,٨

② قيمة س عندما د (س) = ٥

من الرسم نجد أن

د (س) = ٥ عندما س ≃ ٢,٣

الإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة الأسية

إذا كانت $د(س) = أ^{س}$ فإن المنحنى

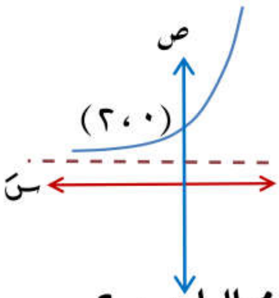
$ص = د(س) + ح = أ^{س} + ح$ يمثله بيانيا

المنحنى $ص = أ^{س}$ بإزاحة رأسية

مقدارها $= |ح|$

- لأعلى إذا كانت ح موجبة
- لأسفل إذا كانت ح سالبة

$د(س) = ٢^{س} + ١$



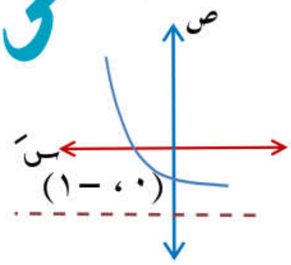
مجالها = ح

مداها =]١، ∞[

أ > ١

على مجالها ح

$د(س) = (\frac{١}{٢})^{س} - ٢$



مداها =]-٢، ∞[

٠ < أ < ١

الدالة تناقصية

على مجالها ح

الإزاحة الأفقية لمنحنى الدالة الأسية

إذا كانت $د(س) = أ^{س}$ فإن المنحنى

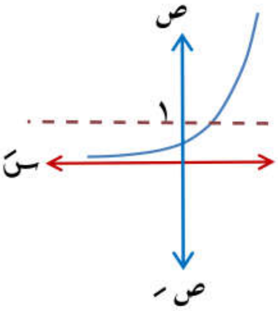
$ص = د(س + ب) = أ^{س + ب}$

المنحنى $ص = أ^{س}$ بإزاحة أفقية

مقدارها $= |ب|$ وفى اتجاه

- $\overrightarrow{و س}$ إذا كانت ب سالبة
- $\overleftarrow{و س َ}$ إذا كانت ب موجبة

$د(س) = ٢^{س - ١}$



مجالها = ح

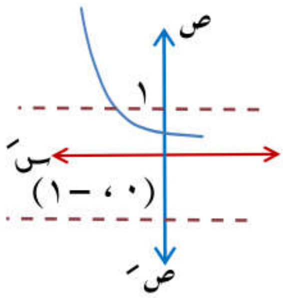
مداها =]٠، ∞[

أ > ١

الدالة تزايدية

على مجالها ح

$د(س) = (\frac{١}{٢})^{س + ١}$



مجالها = ح

مداها =]-٢، ∞[

٠ < أ < ١

الدالة تناقصية

على مجالها ح

انكاس منحنى الدالة الأسية فى محور السنات

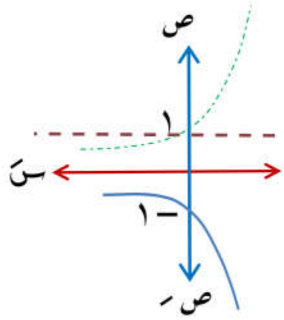
إذا كانت : $د(س) = أ^{س}$ فإن منحنى

الدالة $ص = - د(س) = - أ^{س}$ هو صورة

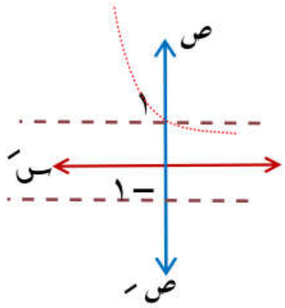
المنحنى $ص = أ^{س}$ بالإنعكاس فى محور

السينات

$د(س) = - ٢^{س}$



$د(س) = -(\frac{١}{٢})^{س}$



مثال ٣

مثل الدالة د : $د(س) = -٣^{١-س} + ٢$

ومن الرسم أوجد المجال والمدى ثم بين هل الدالة تزايدية أم تناقصية

الحل

$د(س) = -٣^{١-س} + ٢$

$د(س) = -(\frac{١}{٣})^{س-١} + ٢$

وهو نفس منحنى الدالة

$= (\frac{١}{٣})^{س}$

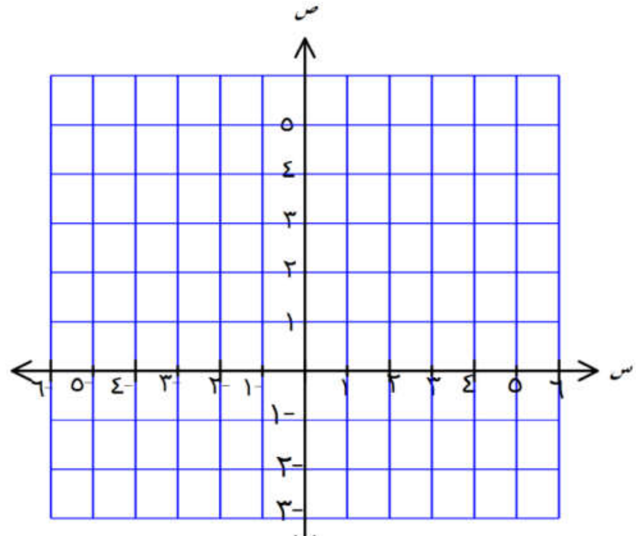
فى محور السينات

ثم إزاحة أفقية مقدارها وحدة واحدة

فى إتجاه $\overleftarrow{وس}$

إزاحة رأسية مقداره وحدتين فى إتجاه

$\overleftarrow{وص}$



المجال = ح

المدى = $]-\infty ، ٢[$

والدالة تزايدية على مجالها

النمو والتضاؤل الأسي

تطبيقات حياتية على الدالة الأسية

① النمو الأسى :

تستخدم لتمثيله الدالة د :

$د(ن) = أ(١ + ر)^{ن}$ حيث

- أ القيمة الإبتدائية
- ن الفترة الزمنية
- ر النسبة المئوية للنمو فى الفترة الزمنية الواحدة

مثال ٤

بلغ عدد الأبقار فى إحدى مزارع الماشية ٨٠ بقرة فإذا كان معدل التكاثر لهذه الأبقار يبلغ نحو ١٨٪ سنويا تقريبا فأوجد عدد هذه الأبقار فى المزرعة بعد ٤ سنوات

الحل

أ = ٨٠ ، ر = ١٨ ٪ = $\frac{١٨}{١٠٠}$

= ٠,١٨

$أ = ٨٠$ ، $ر = ١٨ \% = \frac{١٨}{١٠٠}$
$= ٠,١٨$

دالة النمو الأسى

$د(ن) = أ(١ + ر)^ن$

$د(ن) = ٨٠(١ + ٠,١٨)^ن$

بعد ٤ سنوات

$د(٤) = ٨٠(١ + ٠,١٨)^٤$

$\simeq ١٥٥$ بقرة

② التضاؤل الأسى :

تستخدم لتمثيله الدالة د :

$د(ن) = أ(١ - \quad)^ن$ حيث

- أ القيمة الإبتدائية ■ ن الفترة الزمنية
- ر النسبة المئوية للتضاؤل فى الفترة الزمنية الواحدة

مثـــال ٥

يتناقص عدد المرضى بفيروس الالتهاب الكبدى الوبائى ح بمعدل ١٥٪ سنويا نتيجة اكتشاف علاج له فإذا كان عدد المرضى فى إحدى الدول ٨٠٠٠٠٠٠ مريض فاكتب دالة أسية تمثل عدد المرضى بعد مرور ن سنة من اكتشاف المرض ثم قدر عدد المرضى بعد مرور ٨ سنوات

الحـــل

$أ = ٨٠٠٠٠٠٠$

، $ر = ١٥ \% = \frac{١٥}{١٠٠}$
$= ٠,١٥$

دالة التضاؤل الأسى

$د(ن) = أ(١ - ر)^ن$

$د(ن) = ٨٠٠٠٠٠٠(١ - ٠,١٥)^ن$

وعند $ن = ٨$

فإن

عدد المرضى $= ٨٠٠٠٠٠٠(٠,٨٥)^٨$

$= ٢١٧٩٩٣٤$ مريض

الربح المركب

$ح = أ(١ - \frac{ر}{س})^{ن س}$

س فترات تقسيم العائد السنوى

مثـــال ٣

أودع رجل مبلغ ٥٠٠٠ جنيه فى أحد البنوك تعطي فائدة سنوية مركبة قدرها ٨ ٪
أوجد جملة المبلغ بعد مرور عشرة أعوام فى كل من الحالات الآتية

١) العائد السنوي
٢) العائد الربع سنوي
٣) العائد الشهري

الحـــل

باستخدام العلاقة $ج = أ\left(1 + \frac{ر}{س}\right)$

(١) العائد السنوي

∴ س = ١

ج = ٥٠٠٠ (١ + ٠,٠٨)١٠ = ١٠٧٩٤,٦٢ جنيه

(٢) العائد الربع سنوي

∴ س = ٤

$ج = ٥٠٠٠ \left(١ + \frac{٠,٠٨}{٤}\right)^{١٠ \times ٤}$

= ١١٠٤٠,٢ جنيه

(٣) العائد الشهري

∴ س = ١٢

$ج = ٥٠٠٠ \left(١ + \frac{٠,٠٨}{١٢}\right)^{١٠ \times ١٢}$

= ١١٠٩٨,٢ جنيه

المعادلات الأسية

هى معادلات تتضمن متغيرا (مجهولا) فى الأس مثل : ($٣^{س} = ٩$)

أولاً حل المعادلات الأسية جبرياً

قوانين الأسس

لكل م ، ن ∈ ص ، أ ، ب ∈ ح - {-١ ، ٠ ، ١}

١) إذا كان : $أ^{ن} = ١$ فإن : ن = صفر

٢) إذا كان : $أ^{م} = أ^{ن}$ فإن : م = ن

٣) إذا كان : $أ^{ن} = ب^{ن}$ فإن :

أ = ب عندما ن فردى

أ = ± ب عندما ن زوجى

ن = صفر عندما أ ≠ ب

مثال ١

أوجد قيمة س التى تحقق كل من المعادلات الآتية

١) $٢^{س + ٥} = ٨$

الحل

∵ $٢^{س + ٥} = ٢^{٣}$

∴ س + ٥ = ٣ ∴ س = ٣ - ٥

∴ س = -٢

٢) $٣^{س - ١} = \frac{١}{٩}$

الحل

∵ $٣^{س - ١} = ٣^{-٢}$

∴ س - ١ = -٢

∴ س = -٢ + ١ ∴ س = -١

---

٣) $٥^{س - ١} = ٤^{س - ١}$

الحل

∵ الأساس ≠ الأساس

∴ الأس = صفر

∴ س - ١ = صفر

∴ س = ١

٤) $٥^{س + ٢} = ٤^{س + ٢}$

الحل

إما الاساس = الاساس ∴ س = ٥

أو الاس = ٠

س + ٢ = ٠

∴ س = -٢

---

٥ $\dfrac{12^{3س-2} \times 9^{س+1}}{18^{2س} \times 4^{2س-2}} = 9$

الحـــل

$\therefore \dfrac{(3 \times 2^2)^{3س-2} \times (3^2)^{س+1}}{(2 \times 3^2)^{2س} \times (2^2)^{2س-2}}$

$\therefore \dfrac{3^{3س-2} \times 2^{6س-4} \times 3^{2س+2}}{2^{2س} \times 3^{4س} \times 2^{4س-4}} = 9$

$\therefore \dfrac{3^{3س\cancel{-2}+2س\cancel{+2}} \times 2^{6س-4}}{3^{4س} \times 2^{2س+4س-4}} = 9$

$\therefore \dfrac{3^{5س} \times \cancel{2^{6س-4}}}{3^{4س} \times \cancel{2^{6س-4}}} = 9$

$\therefore 3^{5س-4س} = 9$

$\therefore 3^{س} = 3^2$

$\therefore س = 2$

---

٦ $5^{س-1} \times 7^{1-س} = \dfrac{25}{49}$

الحـــل

$\dfrac{5^{س-1}}{7^{س-1}} = \left(\dfrac{5}{7}\right)^2$

$\left(\dfrac{5}{7}\right)^{س-1} = \left(\dfrac{5}{7}\right)^2$

$\therefore س - 1 = 2$

$\therefore س = 2 + 1$ $\therefore س = 3$

---

٧ $9^{س^2-1} = \left(\dfrac{1}{27}\right)^{س}$

الحـــل

$\therefore (3^2)^{س^2-1} = \dfrac{1}{3^{3س}}$

$\therefore 3^{2س^2-2} = 3^{-3س}$

$\therefore 2س^2 - 2 = -3س$

$\therefore 2س^2 + 3س - 2 = 0$

$$\begin{array}{ccc} 2س & - & 1 \\ س & + & 2 \end{array}$$

$(2س - 1)(س + 2) = 0$

إما

$2س - 1 = 0$

$\therefore 2س = 1$

$س = \dfrac{1}{2}$

أو

$س + 2 = 0$

$س = -2$

---

٨ $س^{س^2-25} = 3^{س^2-25}$

الحـــل

لوجود مجهول في الأس نأخذ الإحتمالات الآتية

- إما الأساس = الأساس

$\therefore س = 3$

- أو الأس = ٠

$\therefore س^2 - 25 = 0$

$\therefore (س + ٥)(س - ٥) = ٠$

$\therefore س + ٥ = ٠ \qquad س - ٥ = ٠$

$\therefore س = -٥ \qquad \therefore س = ٥$

أو - الأساس = − الأساس

ويتم التحقق من هذا الحل

بوضع $س = -٣$

الأيمن $= (-٣)^{(-٣)^{٢} - ٢٥}$

$= (-٣)^{٩ - ٢٥}$

$= (-٣)^{-١٦} \longrightarrow$ (١)

الأيسر $= (٣)^{-١٦} \longrightarrow$ (٢)

من (١) ، (٢)

ينتج أن الطرفان متساويان

$\therefore س = -٣$

حلاً للمعادلة

$\therefore س \in \{٣ ، -٣ ، ٥ ، -٥\}$

مثال (٢)

أوجد فى ع مجموعة الحل للمعادلات الآتية

(١) $٥^{س+١} + ٥^{س-١} = ٢٦$

الحل

بأخذ $٥^{س-١}$ عامل مشترك

$\therefore ٥^{س-١}(٥^{٢} + ١) = ٢٦$

$\therefore ٥^{س-١} \times (٢٦) = ٢٦$

بالقسمة على ٢٦ للطرفين

$\therefore ٥^{س-١} = ١$

$\therefore س - ١ = ٠ \qquad \therefore س = ١$

$\therefore$ م . ح $= \{١\}$

حل آخر

$٥^{س+١} + ٥^{س-١} = ٢٦$

$٥^{س} \times ٥^{١} + ٥^{س} \times ٥^{-١} = ٢٦$

$\therefore ٥^{س}(٥ + ٥^{-١}) = ٢٦$

$\therefore ٥^{س}(٥ + \frac{١}{٥}) = ٢٦$

$\therefore ٥^{س}(\frac{٢٦}{٥}) = ٢٦$

$\therefore ٥^{س} = \cancel{٢٦} \times \frac{٥}{\cancel{٢٦}}$

$\therefore ٥^{س} = ٥$

$\therefore س = ١$

$\therefore$ م . ح $= \{١\}$

---

(٢) $٢^{س} + ٢^{٥-س} = ١٢$

الحل

$٢^{س} + \frac{٢^{٥}}{٢^{س}} = ١٢$ بالضرب $\times ٢^{س}$

$\therefore ٢^{٢س} + ٢^{٥} = ١٢ \times ٢^{س}$

$\therefore ٢^{٢س} + ٣٢ = ١٢ \times ٢^{س}$

$\therefore ٢^{٢س} - ١٢ \times ٢^{س} + ٣٢ = ٠$

$\therefore (٢^{س} - ٤)(٢^{س} - ٨) = ٠$

إما $٢^{س} - ٤ = ٠$ | أو $٢^{س} - ٨ = ٠$

$\therefore ٢^{س} = ٤$ | $٢^{س} = ٨$

$\therefore ٢^{س} = ٢^{٢}$ | $٢^{س} = ٢^{٣}$

$\therefore س = ٢$ | $\therefore س = ٣$

$\therefore م . ح = \{٢ ، ٣\}$

---

٣ $٤^{س^٢+٢} - ٩ \times ٢^{س^٢+٢} + ٨ = ٠$

الحل

$(٢^{س^٢+٢} - ١)(٢^{س^٢+٢} - ٨) = ٠$

إما $٢^{س^٢+٢} - ١ = ٠$

$٢^{س^٢+٢} = ١$

$\therefore س^٢ + ٢ = ٠$

$\therefore س^٢ = -٢$

مرفوض لا يوجد عدد حقيقى مربعه سالب

أو $٢^{س^٢+٢} - ٨ = ٠$

$٢^{س^٢+٢} = ٨$

$٢^{س^٢+٢} = ٢^{٣}$

$\therefore س^٢ + ٢ = ٣$

$\therefore س^٢ = ٣ - ٢$

$\therefore س^٢ = ١$

$\therefore س = \pm ١$

$\therefore م . ح = \{١ ، -١\}$

---

٤ $٧^{٢-س} + ٧^{-س} = ٥٠$

الحل

$\because ٧^{٢-س} + ٧^{-س} = ٥٠$

$\therefore ٧^{-س}(٧^{٢} + ١) = ٥٠$

$\therefore ٧^{-س}(٤٩ + ١) = ٥٠$

$\therefore ٧^{-س}(٥٠) = ٥٠$

بالقسمة على ٥٠ للطرفين

$\therefore ٧^{-س} = ١$

$\therefore س = ٠$ $\therefore م . ح = \{٠\}$

مثال ٣

أوجد فى ح × ح مجموعة الحل للمعادلة

$٤^{س+ص} = ١٢٨$ ، $٥^{س-٢ص-٣} = ١$

الحل

$\because (٢^{٢})^{س+ص} = ٢^{٧}$

$\therefore ٢^{٢س+٢ص} = ٢^{٧}$

$٢س + ٢ص = ٧ \leftarrow (١)$

، $\because ٥^{س-٢ص-٣} = ١$

$س - ٢ص - ٣ = ٠$

$\therefore س - ٢ص = ٣ \leftarrow (٢)$

بجمع المعادلتين (١) ، (٢)

$٣س = ١٠$ $\therefore س = \frac{١٠}{٣}$

بالتعويض فى (١)

$\therefore ٢ \times \frac{١٠}{٣} + ٢ص = ٧$

$\therefore \frac{٢٠}{٣} + ٢\text{ص} = ٧$

$\therefore ٢\text{ص} = ٧ - \frac{٢٠}{٣}$

$\therefore ٢\text{ص} = \frac{١}{٣}$

$\therefore \text{ص} = \frac{١}{٦}$

$\therefore \text{م.ح} = \{ (\frac{١٠}{٣} ، \frac{١}{٦}) \}$

مثـــال ٤

إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = ٥^{\text{س}}$ فأوجد قيمة

$$\frac{\text{د}(\text{س}+٤) - \text{د}(\text{س}+٣)}{\text{د}(\text{س}+٥) - \text{د}(\text{س}+٤)}$$

الحـــل

المقدار $= \dfrac{٥^{\text{س}+٤} - ٥^{\text{س}+٣}}{٥^{\text{س}+٥} - ٥^{\text{س}+٤}}$

$= \dfrac{٥^{\text{س}+٣}(٥^{١} \cancel{-} ١)}{٥^{\text{س}+٤}(٥^{١} \cancel{-} ١)}$

$= \dfrac{٥^{\text{س}+٣}}{٥^{\text{س}+٤}}$

$= ٥^{\cancel{\text{س}}+٣-\cancel{\text{س}}-٤}$

$= ٥^{-١}$

$= \frac{١}{٥}$

مثـــال ٥

إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = ٧^{\text{س}+١}$ فأوجد قيمة س التى تحقق

$\text{د}(٢\text{س}-١) + \text{د}(\text{س}-٢) = ٥٠$

الحـــل

$\because \text{د}(٢\text{س}-١) + \text{د}(\text{س}-٢) = ٥٠$

$\therefore ٧^{٢\text{س}-١+١} + ٧^{\text{س}-٢+١} = ٥٠$

$\therefore ٧^{٢\text{س}} + ٧^{\text{س}-١} = ٥٠$

$\therefore ٧^{٢\text{س}} + \frac{٧^{\text{س}}}{٧} = ٥٠$

بالضرب × ٧ للطرفين

$٧ \times ٧^{٢\text{س}} + ٧^{\text{س}} = ٣٥٠$

$٧ \times ٧^{٢\text{س}} + ٧^{\text{س}} - ٣٥٠ = ٠$

$$\begin{array}{ccc} ٧ \times ٧^{\text{س}} & + & ٥٠ \\ ٧^{\text{س}} & - & ٧ \end{array}$$

$(٧ \times ٧^{\text{س}} + ٥٠)(٧^{\text{س}} - ٧) = ٠$

إما

$٧ \times ٧^{\text{س}} + ٥٠ = ٠$

$٧ \times ٧^{\text{س}} = -٥٠$

$٧^{\text{س}} = \frac{-٥٠}{٧}$

مرفوض

العدد الموجب مرفوع لأى قوة حقيقية لايساوى سالب

أو $٧^{\text{س}} - ٧ = ٠$

$٧^{\text{س}} = ٧$

$\therefore \text{س} = ١$

$\therefore \text{م.ح} = \{١\}$

مثال ٦

إذا كانت $د(س) = ٢^{س}$ فأثبت أن

$$\frac{د(س+١)}{د(س-١)} + \frac{د(س-١)}{د(س+١)} = \frac{١٧}{٤}$$

الحل

$$\because \text{الأيمن} = \frac{د(س+١)}{د(س-١)} + \frac{د(س-١)}{د(س+١)}$$

$$= \frac{٢^{س+١}}{٢^{س-١}} + \frac{٢^{س-١}}{٢^{س+١}}$$

$$= ٢^{\cancel{س}+١-\cancel{س}+١} + ٢^{\cancel{س}-١-\cancel{س}-١}$$

$$= ٢^{٢} + ٢^{-٢}$$

$$= ٤ + \frac{١}{٤}$$

$$= \frac{١٧}{٤} = \text{الأيسر}$$

مثال ٧

إذا كانت: $د(س) = ٢^{س}$

فأوجد مجموعة الحل للمعادلة

$$د(٢س) - ٦\,د(س) + د(٣) = ٠$$

الحل

$$\because د(٣) = ٢^{٣} = ٨$$

$$،\ د(٢س) - ٦\,د(س) + د(٣) = ٠$$

$$\therefore ٢^{٢س} - ٦ \times ٢^{س} + ٨ = ٠$$

$$\therefore (٢^{س} - ٢)(٢^{س} - ٤) = ٠$$

إما $٢^{س} - ٢ = ٠$	أو $٢^{س} - ٤ = ٠$
$\therefore ٢^{س} = ٢$	$\therefore ٢^{س} = ٤$
$\therefore س = ١$	$\therefore س = ٢$

$$\therefore م.ح = \{١ ، ٢\}$$

ثانياً : الحل البياني

يعتمد على جعل الدالة الأسية في طرف والطرف الآخر دالة أخرى ونمثل بيانيا الدالتين في شكل واحد وتسمى المجموعة الناتجة من الإحداثيات السينية لنقط التقاطع بمجموعة الحل

مثال ٨

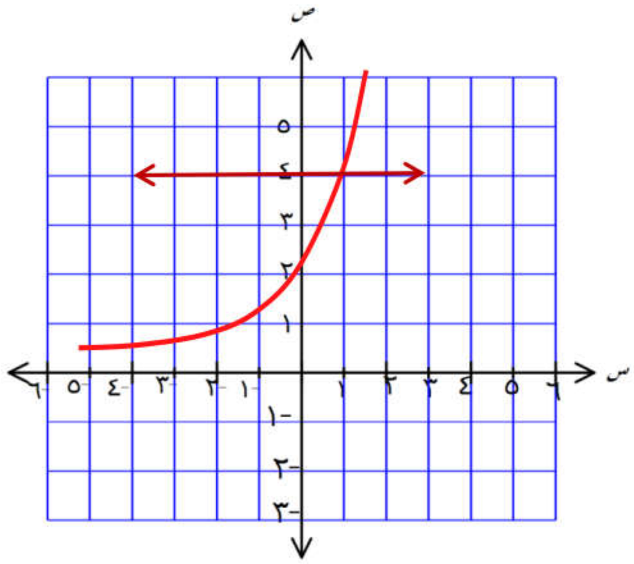
أوجد في ح مجموعة حل المعادلة

$٢^{س+١} = ٤$ بيانيا

الحل

نفرض أن $د(س) = ٢^{س+١}$

، $ر(س) = ٤$



من الرسم نجد أن نقطة التقاطع هى النقطة (١ ، ٤)

∴ م . ح = {١}

مثـــال ٨

أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة

$٣^{س} = ٢س + ١$ بيانيا

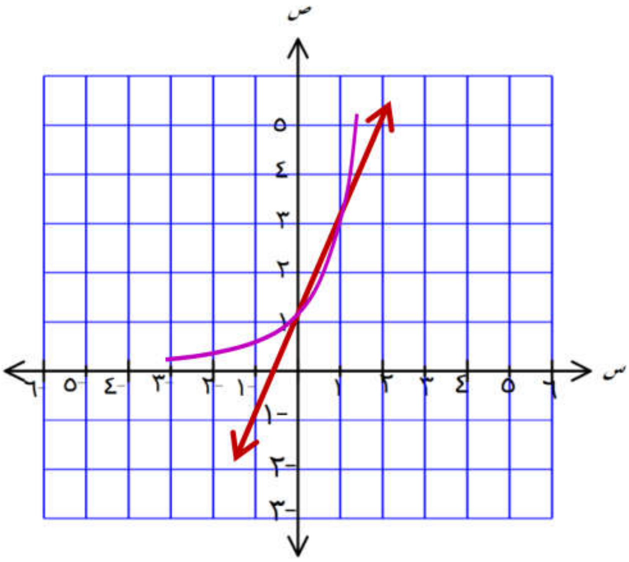
الحــــل

نفرض أن

د(س) = $٣^{س}$

، ر(س) = ٢س + ١

نمثل الدالتين بيانيا فى شكل واحد



من الرسم نجد أن نقط التقاطع هى

(٠ ، ١) (١ ، ٣)

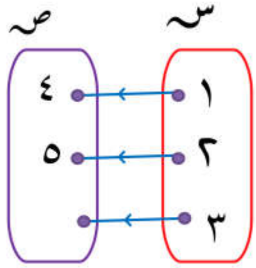
∴ م . ح = {٠ ، ١}

الدالة العكسية

إذا كانت د دالة أحادية من س إلى ص فإن $د^{-1}$ تسمى دالة عكسية للدالة د من ص إلى س

إذا كان لكل (أ ، ب) ∈ لبيان د فإن (ب ، أ) ∈ لبيان $د^{-1}$

فى الشكل المقابل :



بيان د = {(١ ، ٤) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٦)}

بيان $د^{-1}$ = {(٤ ، ١) ، (٥ ، ٢) ، (٦ ، ٣)}

مثـــال :

أوجد الدالة العكسية للدالة د :

د(س) = ٣ س − ٢ ومثل هذه الدالة ومعكوسها فى شكل واحد

===

مثـــال (١)

أوجد الدالة العكسية للدالة د :

د(س) = ٣ س − ٢ ومثل هذه الدالة ومعكوسها فى شكل واحد

الحـــل

∵ ص = ٣ س − ٢

∴ المجال = ح ، المدى = ح

س	١	٢	٠
ص	١	٤	−٢

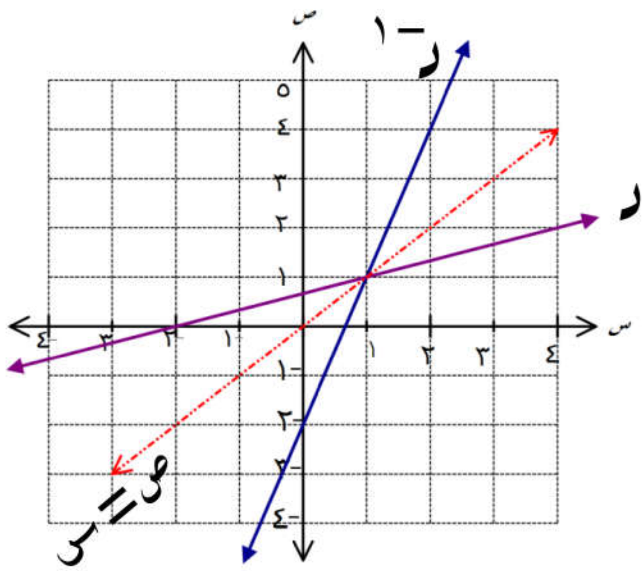
الدالة العكسية :

بتبديل المتغيرات

∴ س = ص − ٢

∴ ص = $\frac{س + ٢}{٣}$

س	٤	١	−٢
ص	٣	١	٠



ونلاحظ :

- أن كل من د ، $د^{-1}$ متماثلتان حول المستقيم ص = س
- إذا تقاطع منحنى د ، $د^{-1}$ فى نقطة (س ، ص) فإنها تقع على المستقيم ص = س
- صورة النقطة (س ، ص) بالانعكاس فى المستقيم ص = س هى (ص ، س)

خواص الدالة العكسية

١ يقال أن الدالتين : د ، ر عكسية للأخرى إذا كان :

$(\text{د} \circ \text{ر})(\text{س}) = \text{س}$

، $(\text{ر} \circ \text{د})(\text{س}) = \text{س}$

٢ مجال د = مدى د^{-1}

مجال د^{-1} = مدى د

مثال ٢

حقق أن كلاً من : د ، ر حيث $\text{د}(\text{س}) = ٣\text{س} + ١$ ، $\text{ر}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ١}{٣}$ عكسية للأخرى

الحل

∵ $(\text{د} \circ \text{ر})(\text{س}) = \text{د}\left[\text{ر}(\text{س})\right]$

$= \cancel{٣}\left(\frac{\text{س} - ١}{\cancel{٣}}\right) + ١$

$= \text{س} - \cancel{١} + \cancel{١}$

$= \text{س} \leftarrow$ ①

، $(\text{ر} \circ \text{د})(\text{س}) = \text{ر}\left[\text{د}(\text{س})\right]$

$= \frac{(٣\text{س} + ١) - ١}{٣}$

$= \frac{٣\text{س} + \cancel{١} - \cancel{١}}{٣}$

$= \frac{\cancel{٣}\text{س}}{\cancel{٣}}$

$= \text{س} \leftarrow$ ②

من ① و ② نجد أن

$(\text{د} \circ \text{ر})(\text{س}) = (\text{ر} \circ \text{د})(\text{س}) = \text{س}$

∴ كلاً من الدالتين : د ، ر دالة عكسية للأخرى

مثال ٢

إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س} - ٢} + ١$ فأوجد ① مجال ومدى د

② $\text{د}^{-1}(\text{س})$ وعين مجالها ومداها

الحل

① ∵ $\text{د}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س} - ٢} + ١$

∴ مجال د = ح - {٢}

، مدى د = ح - {١}

② بوضع $\text{ص} = \frac{١}{\text{س} - ٢} + ١$

بتبديل المتغيرات

∴ $\text{س} = \frac{١}{\text{ص} - ٢} + ١$

∴ $\text{س} - ١ = \frac{١}{\text{ص} - ٢}$

$\text{ص} = \frac{١}{\text{س} - ١}$

∴ $\text{ص} = \frac{١}{\text{س} - ١} + ٢$

∴ $\text{د}^{-1}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س} - ١} + ٢$

∴ مجال د^{-1} = ح - {١}

، مدى د^{-1} = ح - {٢}

مثال ٣

أوجد الدالة العكسية للدالة

$\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٧ \quad ، \quad \text{س} \geq ٢$

موضحا مجال ومدى $\text{د}^{-١}$

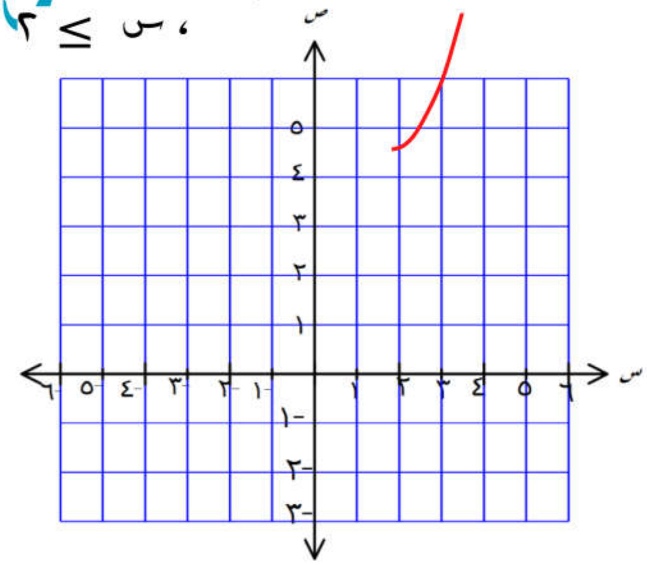
الحل

$\because \text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٧ \text{ ، س} \geq ٢$

$\therefore \text{د}(\text{س}) = (\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٤) - ٤ + ٧$

$\therefore \text{د}(\text{س}) = (\text{س} - ٢)^{٢} + ٣$

$\therefore \text{د}(\text{س}) = (\text{س} - ٢)^{٢} + ٣ \text{ ، س} \geq ٢$



من الرسم نجد أن الدالة أحادية

$\therefore$ يمكن إيجاد الدالة العكسية لهذه الدالة

المجال $= [٢ ، \infty[$

المدى $= [٣ ، \infty[$

$\because \text{ص} = (\text{س} - ٢)^{٢} + ٣ \text{ ، س} \geq ٢$

بتبديل المتغيرات

$\therefore \text{س} = (\text{ص} - ٢)^{٢} + ٣ \text{ ، ص} \geq ٢$

$\therefore \text{س} - ٣ = (\text{ص} - ٢)^{٢} \text{ ، ص} \geq ٢$

$\therefore \text{ص} - ٢ = \pm\sqrt{\text{س} - ٣} \text{ ، ص} \geq ٢$

$\therefore \text{ص} = ٢ \pm \sqrt{\text{س} - ٣} \text{ ، ص} \geq ٢$

$\because$ لكي تكون : $\text{ص} \geq ٢$

نأخذ الجذر الموجب

$\therefore \text{ص} = ٢ + \sqrt{\text{س} - ٣}$

$\therefore \text{د}^{-١}(\text{س}) = ٢ + \sqrt{\text{س} - ٣}$

المجال $= [٣ ، \infty[$

المدى $= [٢ ، \infty[$

مثال ٤

إذا تقاطع منحنى د ، $\text{د}^{-١}$ في النقطة $(٢\text{ك} + ١ ، ٧)$ فأوجد قيمة ك

الحل

$\because$ منحنى د ، $\text{د}^{-١}$

يتقاطعان في النقطة $(٢\text{ك} + ١ ، ٧)$

$\therefore ٢\text{ك} + ١ = ٧ \Longleftarrow ٢\text{ك} = ٧ - ١$

$\therefore ٢\text{ك} = ٦ \qquad \therefore \text{ك} = ٣$

مثـــال ٥

إذا كانت : د (س) = ٢ + $\sqrt{\text{س} - ٣}$ أوجد

١ مجال ومدى د

٢ د^{-1}(س) وعين مجال ومدى د^{-1}

الحـــل

(س) معرفة لجميع قيم س التى تجعل

د س − ٣ ≥ ٠

∴ مجال د = [٣ ، ∞ [

، مدى د = [٢ ، ∞ [

ص = ٢ + $\sqrt{\text{س} - ٣}$ ، ص ≥ ٢ ، س ≥ ٣

بتبديل المتغيرات

س = ٢ + $\sqrt{\text{ص} - ٣}$ ، س ≥ ٢ ، ص ≥ ٣

∴ $\sqrt{\text{ص} - ٣}$ = س − ٢ بالتربيع للطرفين

ص − ٣ = $(\text{س} - ٢)^{٢}$ ، س ≥ ٢ ، ص ≥ ٣

∴ ص = $(\text{س} - ٢)^{٢}$ + ٣ ، س ≥ ٢ ، ص ≥ ٣

∴ د^{-1}(س) = $(\text{س} - ٢)^{٢}$ + ٣

∴ مجال د^{-1} = [٣ ، ∞ [

، مدى د^{-1} = [٢ ، ∞ [

الدالة اللوغاريتمية

العدد : ٦٤ يمكن كتابته بأكثر من صورة أسية :

$٦٤ = ٦٤^{١}$

، $٦٤ = ٨^{٢}$

، $٦٤ = ٤^{٣}$

، $٦٤ = ٢^{٦}$

وتوجد صورة أخرى مكافئة للصورة الاسية تكتب كالتالى :

لو$_{\text{(الأساس)}}$ (العدد) = الأس

ويشترط أن : العدد $\in$ ح$^{+}$

و الأساس $\in$ ح$^{+}$ - {١}

و الأس $\in$ ح

$٦٤ = ٦٤^{١}$	$\Longleftrightarrow$	لو$_{٦٤}$ ٦٤ = ١
$٦٤ = ٨^{٢}$		لو$_{٨}$ ٦٤ = ٢
$٦٤ = ٤^{٣}$		لو$_{٤}$ ٦٤ = ١
$٦٤ = ٢^{٦}$		لو$_{٢}$ ٦٤ = ٦

لاحظ

① ص = لو$_{أ}$ س $\Longleftrightarrow$ س = أ^{ص}

حيث س $\in$ ح$^{+}$ ، أ $\in$ ح$^{+}$ - {١} ، ص $\in$ ح

② لوغاريتم العدد السالب لا معنى له

③ اتفق على أن إذا كان اساس اللوغاريتم العدد ١٠ فلا يكتب

لو١٠ = ١ ، لو١٠٠ = ٢

و إذا كان : لو س = ٣ فإن : س = ١٠^{٣}

∴ س = ١٠٠٠

مثال ١

أوجد قيمة كل مما يأتى

① لو$_{٣}$ $\sqrt[٤]{٢٧}$

الحل

نفرض أن: لو$_{٣}$ $\sqrt[٤]{٢٧}$ = س

و التحويل للصورة الأسية

$\sqrt[٤]{٢٧} = ٣^{س} \Longrightarrow \sqrt[٤]{٣^{٣}} = ٣^{س}$

∴ $٣^{\frac{٣}{٤}} = ٣^{س}$

∴ س = $\frac{٣}{٤}$

لو$_{٣}$ $\sqrt[٤]{٢٧}$ = $\frac{٣}{٤}$

② لو$_{\frac{٢}{٣}}$ ٥ $\frac{١}{١٦}$ = س

الحل

نفرض أن : لو$_{\frac{٢}{٣}}$ ٥ $\frac{١}{١٦}$ = س

والتحويل للصورة الأسية

$٥\frac{١}{١٦} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$

∴ $\frac{٨١}{١٦} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$

$\left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$

∴ $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{-٢} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$

= -٢

③ $\text{لو}_{٢}\ ٨\sqrt{٢}$

الحل

نفرض أن : $\text{لو}_{٢}\ ٨\sqrt{٢} = \text{س}$

والتحويل للصورة الأسية

$٨\sqrt{٢} =$

$٢^{٣} \times ٢^{\frac{١}{٢}} = ٢^{\text{س}}$

$٢^{\frac{٧}{٢}} = ٢^{\text{س}}$

$\therefore \text{س} = \frac{٧}{٢}$

---

④ $\text{لو}_{\sqrt{٣}}\ \frac{١}{٢٧}$

الحل

نفرض أن : $\text{لو}_{\sqrt{٣}}\ \frac{١}{٢٧} = \text{س}$

$\therefore \frac{١}{٢٧} = (\sqrt{٣})^{\text{س}}$

$\therefore (\frac{١}{٣})^{٣} = (\sqrt{٣})^{\text{س}}$

$\therefore (٣)^{-٣} = (\sqrt{٣})^{\text{س}}$

$\therefore (\sqrt{٣})^{-٦} = (\sqrt{٣})^{\text{س}}$

$\therefore \text{س} = -٦$

مثال ②

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلات الآتية

① $\text{لو}_{\text{س}}\ ٧ = \frac{١}{٢}$

$\because \text{لو}_{\text{س}}\ ٧ = \frac{١}{٢}$

بالتحويل للصورة الأسية

$\therefore ٧ = \text{س}^{\frac{١}{٢}}$ بالتربيع للطرفين

$\therefore ٤٩ = \text{س}$

$\therefore$ م . ح = {٤٩}

---

② $\text{لو}_{\text{س}}\ ٨١ = ٤$

الحل

$\because \text{لو}_{\text{س}}\ ٨١ = ٤$

بالتحويل للصورة الأسية

$\therefore ٨١ = \text{س}^{٤}$

$\therefore ٣^{٤} = \text{س}^{٤}$

$\therefore \text{س} = ٣$ | أو $\text{س} = -٣$ مرفوض لأن

$\text{س} \in$ ح ـ {١}

$\therefore$ م . ح = {٣}

---

③ $\text{لو}_{\text{س}-١}\ ٢٧ = ٣$

الحـــل

$\because$ $لو_{س-١}٢٧ = ٣$

بالتحويل للصورة الأسية

$\therefore (س-١)^{٣} = ٢٧$

$\therefore (س-١)^{٣} = ٣^{٣}$ $\because$ الاس فردى

$\therefore س - ١ = ٣$

$\therefore س = ٤$

$\therefore$ م . ح $= \{٤\}$

---

④ $لو_{٩} لو_{٣} لو_{س}٢٧ = ٠$

الحـــل

بالتحويل للصورة الأسية

$\therefore لو_{٣} لو_{س}٢٧ = ٩^{صفر}$

$\therefore لو_{٣} لو_{س}٢٧ = ١$

بالتحويل للصورة الأسية

$\therefore لو_{س}٢٧ = ٣^{١}$

$س^{٣} = ٢٧$

$\therefore س = ٣$

$\therefore$ م . ح $= \{٣\}$

تعيين مجال الدالة اللوغاريتمية

إذا كان : $د(س) = لو_{أ} س$

فإن : $س \in ح^{+}$ ، $أ \in ح^{+} - \{١\}$

فيكون : مجال الدالة اللوغاريتمية هو قيم س التى تجعل

(١) عدد اللوغاريتم حقيقى موجب

(٢) اساس اللوغاريتم عدد حقيقى لا يساوى الواحد الصحيح

مثـــال ٣

عين مجال كلاً من الدوال الآتية

① $د(س) = لو_{٣}(٢س+١)$

الحـــل

$\because د(س) = لو(٢س+١)$

د معرفة عندما $٢س + ١ > ٠$

$\therefore ٢س > -١$

$\therefore س > -\frac{١}{٢}$

$\therefore$ مجال د $=]-\frac{١}{٢} ، \infty[$

---

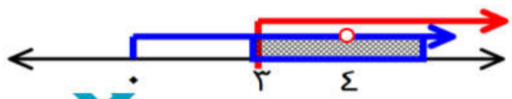
② $د(س) = لو_{س-٣} س$

الحل

∵ د(س) = لو$_{\text{س}-٣}$ س

∴ د تكون معرفة عندما

س > ٠	س − ٣ > ٠	س − ٣ ≠ ١
	س > ٣	س ≠ ٤



∴ المجال =]٠، ∞[∩]٣، ∞[− {٤}

=]٣، ∞[− {٤}

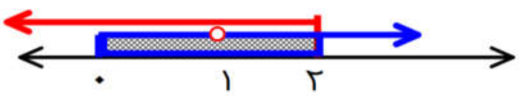
---

③ د(س) = لو$_{٢-\text{س}}$ س

الحل

∴ د تكون معرفة عندما

العدد > ٠	الأساس > ٠	الأساس ≠ ١
س > ٠	٢ − س > ٠	٢ − س ≠ ١
	س < ٢	∴ س ≠ ١



=]٠، ٢[− {١}

مثال ③

أوجد في ح مجموعة الحل للمعادلات الآتية:

① لو$_{\text{س}}$(س^{٢} − ١٢) = ١

الحل

بالتحويل إلى الصورة الأسية

س^{٢} − ١٢ = س

س^{٢} − س − ١٢ = ٠

(س − ٤)(س + ٣) = ٠

∴ س = ٤ أو س = −٣ مرفوض

∴ م.ح = {٤}

---

② (لو$_{٣}$ س)^{٢} + ١٥ = ٨ لو$_{٣}$ س

الحل

∴ (لو$_{٣}$ س)^{٢} − ٨ لو$_{٣}$ س + ١٥ = ٠

∴ (لو$_{٣}$ س − ٣)(لو$_{٣}$ س − ٥) = ٠

إما	أو
∴ لو$_{٣}$ س − ٣ = ٠	لو$_{٣}$ س − ٥ = ٠
∴ لو$_{٣}$ س = ٣	لو$_{٣}$ س = ٥
∴ س = ٣^{٣}	س = ٣^{٥}
∴ س = ٢٧	∴ س = ٢٤٣

∴ م.ح = {٢٧، ٢٤٣}

٣) لو$_{٢٧}$(س − ٢) + لو$_{٣}$(س − ٢) = ٤

الحل

نلاحظ أن أساسي اللوغاريتمين مختلفين

∴ بفرض أن : لو$_{٢٧}$(س − ٢) = ص ← (١)

بالتحويل للصورة الأسية

(س − ٢) = ٢٧^{ص}

∴ (س − ٢) = ٣^{٣ص}

∴ بالتحويل للصورة اللوغاريتمية

لو$_{٣}$(س − ٢) = ٣ ص ← (٢)

من (١) و (٢) ينتج أن

لو$_{٣}$(س − ٢) = ٣ لو$_{٢٧}$(س − ٢)

لو$_{٢٧}$(س − ٢) + ٣ لو$_{٢٧}$(س − ٢) = ٤

∴ ٤ لو$_{٢٧}$(س − ٢) = ٤

بالقسمة على ٤ للطرفين

∴ لو$_{٢٧}$(س − ٢) = ١

∴ س − ٢ = ٢٧

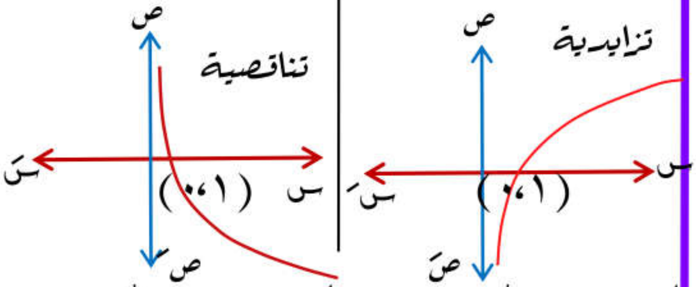
∴ س = ٢٩

∴ م . ح = {٢٩}

التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية

إذا كانت : د(س) = لو$_{أ}$ س

عندما أ > ١ | عندما ٠ < أ < ١



المجال = ح$^{+}$ | المجال = ح$^{+}$

مثال ٤

إذا كان منحنى الدالة د : د(س) = لو$_{أ}$ س يمر بالنقطة (٢٧، ٣) أوجد قيمة أ ثم ارسم منحنى الدالة د متخذا س ∈ [$\frac{١}{٩}$ ، ٩] ومن الرسم أوجد المجال والمدى والأطراد ونقطة التقاطع مع محور السينات ثم أوجد قيمة تقريبية للعدد لو٦

الحل

∵ منحنى الدالة د : د(س) = لو$_{أ}$ س يمر بالنقطة (٢٧، ٣)

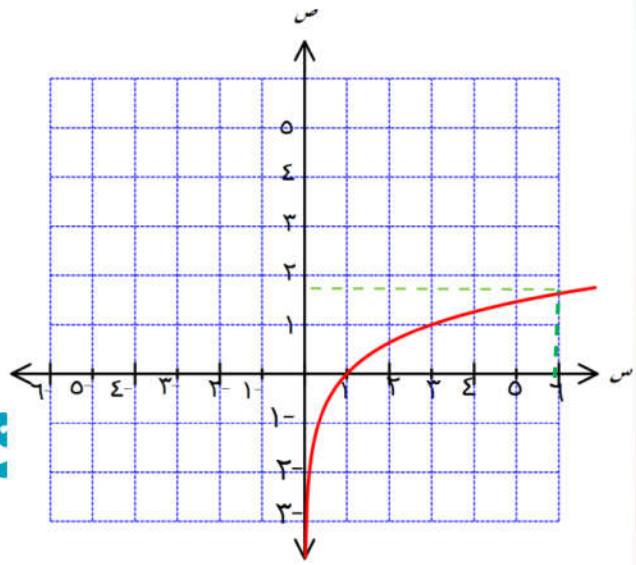
∴ د(٢٧) = ٣

∴ لو$_{أ}$ ٢٧ = ٣ ∴ أ^{٣} = ٢٧

$\therefore$ أ = ٣

$\therefore$ د(س) = $لو_{٣}$ س

س	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩
د(س)	−٢	−١	٠	١	٢



من الرسم نجد أن

المجال = $ح^{+}$

المدى = ح

الإطراد تزايدية فى :]٠ ، ∞[

المنحنى يقطع محور السينات فى (١ ، ٠)

من الرسم نجد أن

$لو_{٣}$ ٦ ≃ ١,٨

مثال ٥

أكمل ما يأتى :

١) مجال د حيث د(س) = $لو_{١-س}$ ٣

هو ....

٢) إذا كان : $لو_{٤}$ أ ∈]٠ ، ١[

فإن : أ ∈ ....

٣) إذا كان أ ∈]٠ ، ٩[

فإن $لو_{٣}$ أ ∈ ....

٤) مجموعة حل المعادلة

$لو_{٢}$ $لو_{٣}$ (٢س − ١) = ١ فى ح

هى ....

بعض خواص اللوغاريتمات

خاصية (١)

إذا كان : أ $\in$ ح$^{+}$ − {١} فإن :

$$\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{أ} = ١$$

∴ $\text{لو}_{٢}\,٢ = ١$

وإذا كان : $\text{لو}_{٣}\,\text{س} = ١$ فإن : س = ٣

خاصية (٢)

إذا كان : أ $\in$ ح$^{+}$ − {١} فإن :

$$\text{لو}_{\text{أ}}\,١ = \text{صفر}$$

∴ $\text{لو}_{٢}\,١ = ١$

: $\text{لو}_{٥}\,\text{س} = ٠$ فإن : س = ١

خاصية (٣) (خاصية الضرب)

إذا كان : س ، ص $\in$ ح$^{+}$ ، أ $\in$ ح$^{+}$ − {١}

فإن :

$$\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س ص} = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س} + \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص}$$

فمثلاً :

$$\frac{\text{لو}_{٥}\,٣٥}{١ + \text{لو}_{٥}\,٧} = \frac{\text{لو}_{٥}\,(٥ \times ٧)}{١ + \text{لو}_{٥}\,٧}$$

$$= \frac{\text{لو}_{٥}\,٥ + \text{لو}_{٥}\,٧}{١ + \text{لو}_{٥}\,٧} = \frac{١ + \text{لو}_{٥}\,٧}{١ + \text{لو}_{٥}\,٧} = ١$$

مثال ١

إذا كان :

$\text{لو}_{٥}(\text{س} + ٢) + \text{لو}_{٥}(\text{س} - ٢) = ١$

فأوجد قيمة : س

الحل

∵ $\text{لو}_{٥}(\text{س} + ٢) + \text{لو}_{٥}(\text{س} - ٢) = ١$

∴ $\text{لو}_{٥}(\text{س}^{٢} - ٤) = ١$

∴ $\text{س}^{٢} - ٤ = ٥$

∴ $\text{س}^{٢} = ٩$

∴ س = ٣ أو س = −٣ مرفوض

∴ م ٠ ح = {٣}

خاصية (٤) (خاصية القسمة)

إذا كان : س ، ص $\in$ ح$^{+}$ ، أ $\in$ ح$^{+}$ − {١}

$$\text{لو}_{\text{أ}}\,\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س} - \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص}$$

مثال ٢

بدون استخدام الآلة الحاسبة

أوجد قيمة : $\text{لو}_{٣}\,١٥ + \text{لو}_{٣}\,٦ - \text{لو}_{٣}\,١٠$

الحـــــل

المقدار $= \text{لو}_{٣}\,١٥ + \text{لو}_{٣}\,٦ - \text{لو}_{٣}\,١٠$

$= \text{لو}_{٣}\,\frac{١٥ \times ٦}{١٠}$

$= \text{لو}_{٣}\,\frac{٩٠}{١٠}$

$= \text{لو}_{٣}\,٩ = ٢$

خاصية (٥) (لوغاريتم القوة)

إذا كان : $\text{س} \in \text{ح}^{+}$ ، $\text{أ} \in \text{ح}^{+} - \{١\}$ ، $\text{ن} \in \text{ح}$

فإن :

$$\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}^{\text{ن}} = \text{ن}\ \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}$$

$$\frac{\text{لو}_{٣}\,١٢٥}{\text{لو}_{٣}\,٥} = \frac{\text{لو}_{٣}\,٥^{٣}}{\text{لو}_{٣}\,٥} = \frac{٣\,\cancel{\text{لو}_{٣}\,٥}}{\cancel{\text{لو}_{٣}\,٥}} = ٣$$

مثال ٣

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلة

$(\text{لو س})^{٢} + \text{لو س}^{٢} + ١ = (\text{لو ٥})^{٢}$

الحـــــل

$\because \text{لو س}^{٢} = ٢\,\text{لو س}$

$\therefore (\text{لو س})^{٢} + ٢\,\text{لو س} + ١ = (\text{لو ٥})^{٢}$

$\therefore (\text{لو س} + ١)^{٢} = (\text{لو ٥})^{٢}$

إما

$\text{س} + ١ = \text{لو ٥}$

$\text{لو س} = \text{لو ٥} - ١$

$\text{لو س} = \text{لو ٥} - \text{لو ١٠}$

$\text{لو س} = \text{لو}\,\frac{٥}{١٠}$

$\text{س} = \frac{٥}{١٠}$

$\text{س} = \frac{١}{٢}$

أو

$\text{لو س} + ١ = -\text{لو ٥}$

$\text{لو س} = -\text{لو ٥} - ١$

$\text{لو س} = -(\text{لو ٥} + \text{لو ١٠})$

$\text{لو س} = \text{لو}(٥ \times ١٠)$

$\text{س} = ٥٠$

$\therefore \text{م.ح} = \{٥٠ ، \frac{١}{٢}\}$

مثال ٤

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلة

$(\text{لو س})^{٢} - \text{لو س}^{٢} = ٣$

الحـــــل

$\because \text{لو س}^{٢} = ٢\,\text{لو س}$

$\therefore (\text{لو س})^{٢} - ٢\,\text{لو س} = ٣$

$\therefore (\text{لو س})^{٢} - ٢\,\text{لو س} - ٣ = ٠$

$(\text{لو س} - ٣)(\text{لو س} + ١) = ٠$

إما $لو\,س - ٣ = ٠$ أو $لو\,س + ١ = ٠$

$لو\,س = ٣$ ∴ $لو\,س = -١$

∴ $س = ١٠^{٣}$ ∴ $س = ١٠^{-١}$

∴ $س = ١٠٠٠$ ∴ $س = \frac{١}{١٠}$

خاصية (٦) (تغيير الأساس)

إذا كان : $س ، ص \in ح^{+} ، أ \in ح^{+} - \{١\}$

فإن :

$$لو_{ص}\,س = \frac{لو_{أ}\,س}{لو_{أ}\,ص} = \frac{لو\,س}{لو\,ص}$$

فمثلاً :

$$لو_{٣٢}\,٦٤ = \frac{لو_{٢}\,٦٤}{لو_{٢}\,٣٢} = \frac{٦}{٥}$$

مثال ٥

أوجد فى أبسط صورة قيمة المقدار

$لو_{ب}\,أ \times لو_{ج}\,ب \times لو_{د}\,ج \times لو_{هـ}\,د$

الحل

المقدار $= لو_{ب}\,أ \times لو_{ج}\,ب \times لو_{د}\,ج \times لو_{هـ}\,د$

$$= \frac{لو\,أ}{\cancel{لو\,ب}} \times \frac{\cancel{لو\,ب}}{\cancel{لو\,ج}} \times \frac{\cancel{لو\,ج}}{\cancel{لو\,د}} \times \frac{\cancel{لو\,د}}{لو\,هـ}$$

$$= \frac{لو\,أ}{لو\,هـ} = لو_{هـ}\,أ$$

خاصية (٧)

إذا كان : $س ، ص \in ح^{+} - \{١\}$ فإن :

$$لو_{ص}\,س = \frac{١}{لو_{س}\,ص}$$

∴ $لو_{٦٤}\,٢ = \frac{١}{لو_{٢}\,٦٤} = \frac{١}{٦}$

مثال ٦

أوجد قيمة :

$$\frac{١}{لو_{٢}\,١٢} + \frac{١}{لو_{٨}\,١٢} + \frac{١}{لو_{٩}\,١٢}$$

الحل

المقدار $= \frac{١}{لو_{٢}\,١٢} + \frac{١}{لو_{٨}\,١٢} + \frac{١}{لو_{٩}\,١٢}$

$= لو_{١٢}\,٢ + لو_{١٢}\,٨ + لو_{١٢}\,٩$

$= لو_{١٢}(٢ \times ٨ \times ٩)$

$= لو_{١٢}\,١٤٤$

$= ٢$

مثال ٧

بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة :

(١) $لو\,٥٤ - ٣\,لو\,٣ - لو\,٢$

الحل

المقدار $= \text{لو}\ ٥٤ - \text{لو}\ ٣^{٣} - \text{لو}\ ٢$

$= \text{لو}\ ٥٤ - \text{لو}\ ٢٧ - \text{لو}\ ٢$

$= \text{لو}\ \frac{٥٤}{٢٧ \times ٢}$

$= \text{لو}\ \frac{٥٤}{٥٤}$

$= \text{لو}\ ١$

= صفر

---

٢) $\text{لو}_{٢}\ ١٥ + \text{لو}_{٢}\ ١٤ - \text{لو}_{٢}\ ١٠٥$

الحل

المقدار $= \text{لو}_{٢}\ ١٥ + \text{لو}_{٢}\ ١٤ - \text{لو}_{٢}\ ١٠٥$

$= \text{لو}_{٢}\ \frac{\cancel{١٥}^{\,١} \times ١٤}{\cancel{١٠٥}_{\,٧}}$

$= \text{لو}_{٢}\ \frac{١٤}{٧}$

$= \text{لو}_{٢}\ ٢$

$= ١$

---

٣) $\frac{(\text{لو}\ ٣)^{٢} - \text{لو}\ ٩}{\text{لو}\ ٠{,}٠٣}$

الحل

المقدار $= \frac{\text{لو}\ ٣ \times \text{لو}\ ٣ - \text{لو}\ ٣^{٢}}{\text{لو}\ \frac{٣}{١٠٠}}$

$= \frac{\text{لو}\ ٣ \times \text{لو}\ ٣ - ٢\,\text{لو}\ ٣}{\text{لو}\ ٣ - \text{لو}\ ١٠٠}$

$= \frac{\text{لو}\ ٣\ (\cancel{\text{لو}\ ٣ - ٢})}{\cancel{\text{لو}\ ٣ - ٢}}$

$= \text{لو}\ ٣$

مثال ٨

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلات

١) $س^{\text{لو}\ س} = ١٠٠\, س$

الحل

بأخذ اللوغاريتم المعتاد للطرفين

$\text{لو} (س^{\text{لو}\ س}) = \text{لو} (١٠٠\, س)$

$\therefore \text{لو}\ س \times \text{لو}\ س = \text{لو}\ ١٠٠ + \text{لو}\ س$

$\therefore (\text{لو}\ س)^{٢} = ٢ + \text{لو}\ س$

$\therefore (\text{لو}\ س)^{٢} - \text{لو}\ س - ٢ = ٠$

$\therefore (\text{لو}\ س - ٢)(\text{لو}\ س + ١) = ٠$

إما	أو
$\text{لو}\ س - ٢ = ٠$	$\text{لو}\ س + ١ = ٠$
$\therefore \text{لو}\ س = ٢$	$\text{لو}\ س = -١$
$\therefore س = ١٠^{٢}$	$\therefore س = ١٠^{-١}$
$\therefore س = ١٠٠$	$\therefore س = \frac{١}{١٠}$

$\therefore$ م.ح $= \{ ١٠٠ ، \frac{١}{١٠} \}$

٢ $\text{لو}\ س = \dfrac{\text{لو}\ ٢٥ - (\text{لو}\ ٥)^{٢}}{\text{لو}\ ٠,٠٥}$

الحل

$\therefore \text{لو}\ س = \dfrac{\text{لو}\ ٥^{٢} - \text{لو}\ ٥ \times \text{لو}\ ٥}{\text{لو}\ \frac{٥}{١٠٠}}$

$\therefore \text{لو}\ س = \dfrac{٢\text{لو}\ ٥ - \text{لو}\ ٥ \times \text{لو}\ ٥}{\text{لو}\ ٥ - \text{لو}\ ١٠٠}$

$\text{لو}\ س = \dfrac{-\text{لو}\ ٥\ (\text{لو}\ ٥ - ٢)}{\text{لو}\ ٥ - ٢}$

$\therefore \text{لو}\ س = \text{لو}\ ٥^{-١}$ $\quad \therefore س = ٥^{-١}$

$\therefore س = \frac{١}{٥}$ $\quad \therefore م.ح = \{\frac{١}{٥}\}$

---

٣ $\text{لو}\ س - \text{لو}_{س}\ ١٠ = ١$

الحل

$\text{لو}\ س - \dfrac{\text{لو}\ ١٠}{\text{لو}\ س} = ١$

بالضرب × لو س

$\therefore (\text{لو}\ س)^{٢} - \text{لو}\ ١٠ = \text{لو}\ س$

$(\text{لو}\ س)^{٢} - \text{لو}\ س - ٢ = ٠$

$\therefore (\text{لو}\ س - ٢)(\text{لو}\ س + ١) = ٠$

إما	أو
$\text{لو}\ س - ٢ = ٠$	$\text{لو}\ س + ١ = ٠$
$\text{لو}\ س = ٢$	$\therefore \text{لو}\ س = -١$
$\therefore س = ١٠^{٢}$	$\therefore س = ١٠^{-١}$
$\therefore س = ١٠٠$	$\therefore س = \frac{١}{١٠}$

$\therefore م.ح = \{١٠٠ ، \frac{١}{١٠}\}$

مثال ٩

إذا كان: $ص = أ^{\text{لو}_{أ}\ س}$

أثبت أن: $س = ص$

ومن ثم أوجد قيمة: $٣^{\frac{١}{٢}\text{لو}_{٣}\ ٤٩}$

الحل

$\because ص = أ^{\text{لو}_{أ}\ س}$

بالتحويل للصورة اللوغاريتمية

$\therefore \text{لو}_{أ}\ ص = \text{لو}_{أ}\ س$

$\therefore س = ص$

، $٣^{\frac{١}{٢}\text{لو}_{٣}\ ٤٩} = ٣^{\text{لو}_{٣}\ ٤٩^{\frac{١}{٢}}} = ٣^{\text{لو}_{٣}\ ٧}$

$= ٧$

حل آخر

$\because ص = أ^{\text{لو}_{أ}\ س}$

بأخذ اللوغاريتم $\text{لو}_{أ}$ للطرفين

$\therefore \text{لو}_{أ}\ ص = \text{لو}_{أ}\ (أ^{\text{لو}_{أ}\ س})$

$\text{لو}_{م}\,\text{ص} = \text{لو}_{م}\,\text{س} \times \text{لو}_{م}\,م$

∴ $\text{لو}_{م}\,\text{ص} = \text{لو}_{م}\,\text{س} \times ١$

∴ س = ص

حل المعادلات الأسية باللوغاريتمات

يصعب ايجاد مجموعة حل المعادلة

$$٣^{\text{س}} = ١٣$$

باستخدام قوانين الأسس

حيث أن

الأساس ≠ الأساس

، الأس ≠ الأس

فيتم الحل

بأخذ اللوغاريتم المعتاد للطرفين

$$٣^{\text{س}} = ١٣$$

$$\text{لو}\,٣^{\text{س}} = \text{لو}\,١٣$$

$$\text{س لو}\,٣ = \text{لو}\,١٣$$

∴ $\text{س} = \dfrac{\text{لو}\,١٣}{\text{لو}\,٣} \simeq ١,٥٩$

∴ م.ح = { ١,٥٩ }

مثال ٩

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلة

$$٣^{٢\text{س}-٣} = ١١^{١-\text{س}}$$

الحل

بأخذ اللوغاريتم المعتاد للطرفين

∴ $\text{لو}\,٣^{٢\text{س}-٣} = \text{لو}\,١١^{١-\text{س}}$

∴ $(٢\text{س}-٣)\,\text{لو}\,٣ = (١-\text{س})\,\text{لو}\,١١$

∴ $٢\text{س لو}\,٣ - ٣\,\text{لو}\,٣ = \text{لو}\,١١ - \text{س لو}\,١١$

∴ $٢\text{س لو}\,٣ + \text{س لو}\,١١ = \text{لو}\,١١ - ٣\,\text{لو}\,٣$

$\text{س}\,(٢\,\text{لو}\,٣ + \text{لو}\,١١) = \text{لو}\,١١ - ٣\,\text{لو}\,٣$

∴ $\text{س} = \dfrac{\text{لو}\,١١ - ٣\,\text{لو}\,٣}{٢\,\text{لو}\,٣ + \text{لو}\,١١} \simeq ١,٢٤$

∴ م.ح = { ١,٥٩ } (بالحاسبة)

سلسلة الفاروق

فى

التفاضل وحساب المثلثات

للصف الثانى الثانوي

الفصل الدراسي الأول

القسم العلمي

إعداد : أ /عشري فاروق

ت/ ٠١١١٥٦٢٤٤٤٣١

مقدمة فى النهايات بيانياً وعدديا

الكميات المعينة -غير المعينة -غير المعرفة

① الكمية المعينة

هى الكمية التى لها جواب محدد مثل :

$\frac{٣}{٢}$ ، ٧ - ٠ ، ٣ + ١ ، ٥ × ٦ ، ......

② الكمية غير المعينة

هى الكمية التى ليس لها جواب محدد

وهي :

$\frac{٠}{٠}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، $٠ \times \infty$

$(صفر)^{صفر}$ ، $(\infty)^{صفر}$ ، $(١)^{\infty}$

③ الكمية غير المعرفة

وهى الكمية التى ليس لها معنى

مثل : $\frac{٧}{صفر}$

كمية غير معرفة (أى ليس لها معنى)

حيث أنه لا يوجد عدد حقيقى

إذا ضرب فى العدد صفر كان الناتج ٧

$\frac{أى\ عدد\ حقيقى \neq ٠}{صفر}$ هو كمية غير معرفة

الرمزان : ∞ ، $-\infty$

① الرمز : ∞ (لا نهاية) ليس عددا حقيقيا

وهو يعبر عن كمية أكبر من أى عدد حقيقى يمكن تصوره

② الرمز : $-\infty$ (سالب لا نهاية) ليس عددا حقيقيا

وهو يعبر عن كمية أصغر من أى عدد حقيقى يمكن تصوره

ملحوظة

تجرى العمليات الحسابية على مجموعة الأعداد الحقيقية والرمزين (∞ ، $-\infty$) كما يلى :

لكل : أ $\in$ ح فإن :

① $\infty \pm$ أ $= \infty$ ، $-\infty \pm$ أ $= -\infty$

② $\frac{أ}{\infty} = \frac{أ}{-\infty} =$ صفر ، أ $\neq ٠$

③ $\infty \times$ أ $= \begin{cases} \infty & \text{عندما أ} > ٠ \\ -\infty & \text{عندما أ} < ٠ \\ \text{كمية غير معينة} & \text{عندما أ} = ٠ \end{cases}$

④ $-\infty \times$ أ $= \begin{cases} -\infty & \text{عندما أ} > ٠ \\ \infty & \text{عندما أ} < ٠ \\ \text{كمية غير معينة} & \text{عندما أ} = ٠ \end{cases}$

مثال ١

حدد نوع الكمية الناتجة فى كل مما يأتي

① ٣ × ٥	② ٢٨ ÷ ٤
③ ٤ − ٧	④ ٠ ÷ ٠
⑤ ٧ ÷ ٠	⑥ ∞ ÷ ∞
⑦ ٧ − ∞	⑧ −٥ ÷ ∞
⑨ −٤ × ∞	⑩ ∞ ÷ ٢
⑪ ٠ × ∞	⑫ −٢ × ∞

مفهوم نهاية الدالة عند نقطة

تعريف

إذا كانت قيمة الدالة د تقترب من قيمة وحيدة ل ، عندما تقترب س من من جهتى اليمين واليسار، فإن نهاية د(س) تساوى ل

وتكتب رمزيا

$$\lim_{س \to أ} د(س) = ل$$

وتقرأ:

نهاية د(س) عندما تقترب س من أ تساوى ل

إذا كانت : $د(س) = \frac{س^{2} - ١}{س - ١}$ فإن :

$$د(١) = \frac{(١)^{2} - ١}{س - ١} = \frac{١ - ١}{١ - ١} = \frac{صفر}{صفر}$$

إذا كانت : $د(س) = \frac{س^{2} - ١}{س - ١}$ فإن :

$$د(١) = \frac{(١)^{2} - ١}{س - ١} = \frac{١ - ١}{١ - ١} = \frac{صفر}{صفر}$$

= كمية غير معينة

لذلك نبحث إقترا ب الدالة من قيمة معينة كلما اقتربت الدالة من القيمة ١ ويتم تقدير قيمة هذه النهاية بيانيا أو عدديا أو جبرياً عند القيمة التى تؤول إليها س

تقدير قيمة النهاية

يتم تقدير قيمة النهاية فى هذا الدرس بطريقتين :

① عددياً ② بيانياً

أولاً تقدير قيمة النهاية عددياً

مثال ١

قدر قيمة :

① $\lim_{س \to ١} \frac{س^{2} - ١}{س - ١}$ عددياً

الحل

لتقدير قيمة : $\lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{س - ١}$

نبحث إقتراب الدالة من قيمة معينة كلما إقتربت س من العدد ١

من جهة اليمين :

$$\text{د}(1^{+}) = \underset{\text{س} \to 1^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س})$$

وتسمى النهاية اليمني للدالة

باستخدام الجدول التالي

س	١,١	١,٠١	١,٠٠١	١,٠٠٠١	......	١
د(س)	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	٢,٠٠٠١	......	٢

من الجدول نجد أن :

كلما إقتربت س من القيمة ١ من اليمين إقتربت الدالة من القيمة ٢

$$\therefore\ \text{د}(1^{+}) = \underset{\text{س} \to 1^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = 2$$

من جهة اليسار :

$$\text{د}(1^{-}) = \underset{\text{س} \to 1^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س})$$

س	٠,٩	٠,٩٩	٠,٩٩٩	٠,٩٩٩٩	......	١
د(س)	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	١,٩٩٩٩	......	٢

من الجدول نجد أن :

كلما إقتربت س من القيمة ١ من اليسار إقتربت الدالة من القيمة ٢

$$\therefore\ \text{د}(1^{-}) = \underset{\text{س} \to 1^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = 2$$

$$\therefore\ \underset{\text{س} \to 1^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = \underset{\text{س} \to 1^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = 2$$

أو : $\text{د}(1^{+}) = \text{د}(1^{-}) = 2$

$$\therefore\ \underset{\text{س} \to 1}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = 2$$

$$\therefore\ \underset{\text{س} \to 1}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{2} - 1}{\text{س} - 1} = 2$$

لاحظ

- من المثال السابق نجد أن إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{2} - 1}{\text{س} - 1}$ فإن :

$$\text{د}(1) = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}\ \text{كمية غير معينة}$$

بينما النهاية موجودة وتساوى ٢

يجب وجود النهاية عند نقطة ليس من الضرورى أن تكون الدالةمعرفة عند هذه النقطة

- إذا كانت : $\text{د}(\text{أ}^{+}) \neq \text{د}(\text{أ}^{-})$

فإن : النهاية تكون غير موجودة

ثانياً : تقدير قيمة النهاية بيانياً

مثال ٢

قدر قيمة : $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ بيانياً

الحل

$\because$ د(س) $= \frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$

المجال = ح - {١}

وهذا معناه وجود ثقب عند : س = ١

عند تمثيل الدالة

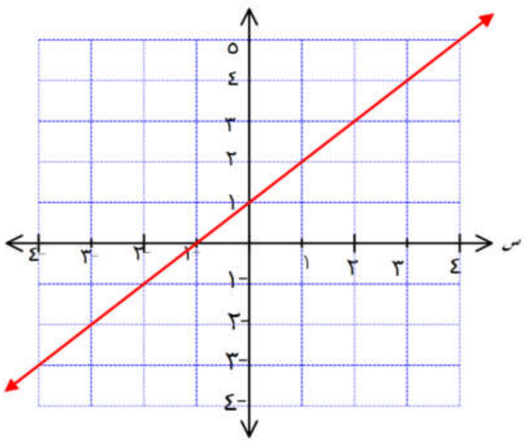
$\therefore$ د(س) $= \frac{(س - ١)(س + ١)}{س - ١}$

$\therefore$ د(س) = س + ١

نمثل الدالة بيانيا

على أن تشتمل فترة التمثيل على القيمة التى تؤول إليها س

س	٣	٢	١	٠	−١
د(س)	٤	٣	٢	١	٠



ومن الرسم نجد أن :

١ د(١) غير معرفة لعدم وجود أى نقطة على الخط الرأسى س = ١

---

٢ د(١^{+}) = ٢ (النهاية اليمنى)

أو ($\underset{س \to ١^{+}}{\text{نها}}$ د(س) = ٢)

---

٣ د(١^{-}) = ٢ (النهاية اليسرى)

أو ($\underset{س \to ١^{-}}{\text{نها}}$ د(س) = ٢)

---

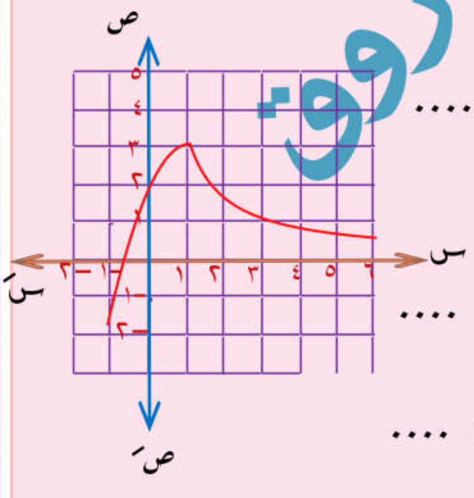
٤ د(١^{+}) = د(١^{-}) = ٢

$\therefore$ $\underset{س \to ١}{\text{نها}}$ د(س) = ٢

مثال ٣

في كل من الأشكال الآتية أكمل ما يأتي

①



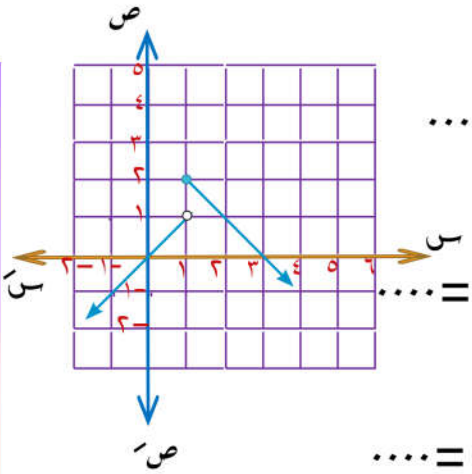
١ د(١) = ...

٢ د(١^{+}) = ...

٣ د(١^{-}) = ...

٤ $\underset{س \to ١}{\text{نها}}$ د(س) = ...

٢



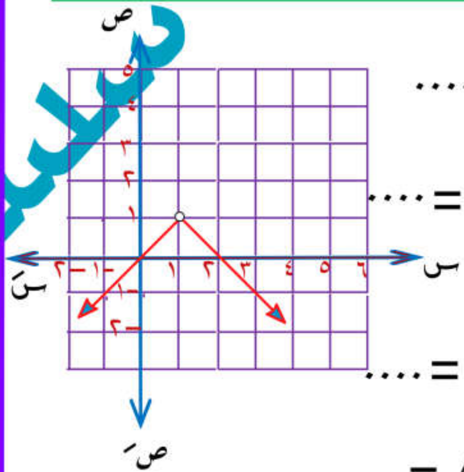
١ د(١) = ...

٢ نهـا د(س) = ... (س ← ١^{+})

٣ نهـا د(س) = ... (س ← ١^{-})

٤ نهـا د(س) = ... (س ← ١)

٣



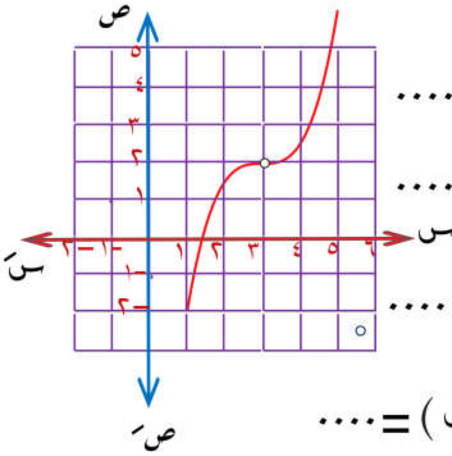
١ د(١) = ...

٢ نهـا د(س) = ... (س ← ١^{+})

٣ نهـا د(س) = ... (س ← ١^{-})

٤ نهـا د(س) = ... (س ← ١)

٤



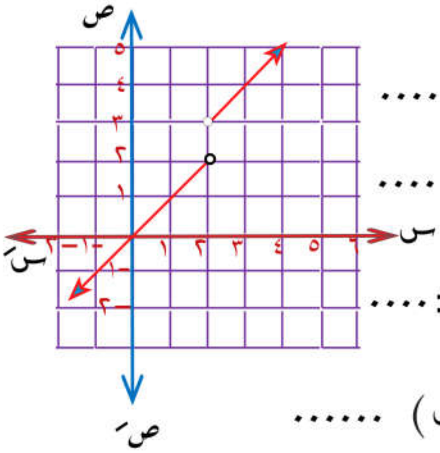
١ د(٣) = ...

٢ د(٣^{+}) = ...

٣ د(٣^{-}) = ...

٤ نهـا د(س) = ... (س ← ٣)

٥



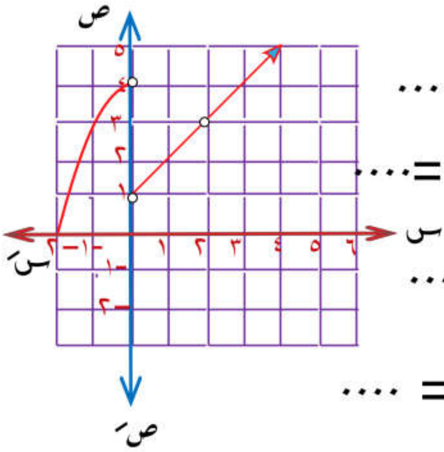
١ د(٢) = ...

٢ د(٢^{+}) = ...

٣ د(٢^{-}) = ...

٤ نهـا د(س) ...... (س ← ٢)

٦

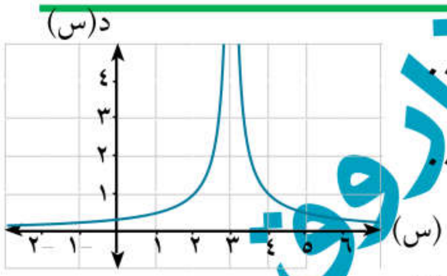


١ د(٠) = ...

٢ نهـا د(س) = ... (س ← ٠)

٣ د(٢) = ...

٤ نهـا د(س) = ... (س ← ٢)

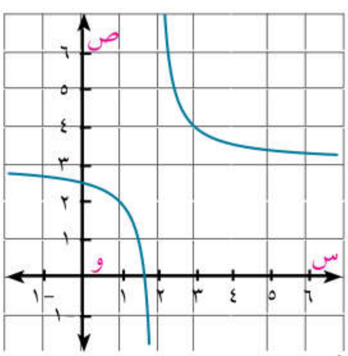


١ د(٣) = ...

٢ د(٣^{+}) = ...

٣ د(٣^{-}) = ...

٤ نهـا د(س) = (س ← ٣)



١ د(٢) = ...

٢ د(٢^{+}) = ...

٣ د(٢^{-}) = ...

٤ نهـا د(س) = ... (س ← ٢)

إيجاد نهاية الدالة عند نقطة جبرياً

نظرية ١

إذا كانت د(س) كثيرة حدود ، $أ \in ح$

فإن: $\lim_{س \to أ} د(س) = د(أ)$

مثال ١

أوجد: $\lim_{س \to ٣} (٥ س + ١)$

الحل

$\lim_{س \to ٣} (٥ س + ١) = د(٣)$

$= ٥ \times ٣ + ١$

$= ١٥ + ١$

$= ١٦$

نتيجة

$\lim_{س \to أ} حـ = حـ$ حيث حـ ثابت

مثال ٢

أكمل: $\lim_{س \to ١} ٣ = \dots\dots\dots$

مثال ٣

أوجد : $\lim_{س \to \sqrt{٢}} \frac{س^٢ + ٢}{س^٤ - ١}$

الحل

بالتعويض عن : $س = \sqrt{٢}$

$\therefore \lim_{س \to \sqrt{٢}} \frac{س^٢ + ٢}{س^٤ - ١} = \frac{(\sqrt{٢})^٢ + ٢}{(\sqrt{٢})^٤ - ١} = \frac{٢ + ٢}{٤ - ١} = \frac{٤}{٣}$

لإيجاد نهاية الدالة عند نقطة جبرياً

نعوض عن القيمة التى تؤول إليها

فإذا كان الناتج

① كمية معينة :

فإن هذه الكمية تمثل قيمة النهاية

مثل : $\lim_{س \to ١} \frac{س + ٢}{س + ٣} = \frac{١ + ٢}{١ + ٣} = \frac{٣}{٤}$

انتهى الحل وقيمة النهاية $= \frac{٣}{٤}$

② كمية غير معرفة :

انتهى الحل والنهاية ليس لها وجود

مثل: $\lim_{س \to ١} \frac{س + ٢}{س - ١} = \frac{١ + ٢}{١ - ١} = \frac{٣}{٠}$

النهاية ليس لها وجود

٣ كمية غير معينة :

$$\left(\frac{٠}{٠} \ ، \ \frac{\infty}{\infty} \ ، \ \infty - \infty \ ، \ ٠ \times \infty \right)$$

يتم إيجاد الدالة جبريا بعدة طرق منها : التحليل – الضرب فى المرافق
القسمة التركيبية – القانون

مثل : $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢} = \frac{٢^{٢} - ٤}{٢ - ٢}$

$= \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

= كمية غير معينة

يتم استخدام التحليل لإيجاد قيمة النهاية

$$\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢} = \lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{س} + ٢)}{\cancel{\text{س} - ٢}}$$

$$= \lim\limits_{\text{س} \to ٢} (\text{س} + ٢) = ٢ + ٢ = ٤$$

مثال ٤

أوجد كلاً مما يأتي

① $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣}$

الحل

$\because$ د $(٣) = \frac{٣^{٢} - ٩}{٣ - ٣} = \frac{٠}{٠}$ (كمية غير معينة)

بتحليل البسط وحذف العامل الصفرى

علما بأن :

عندما (س ← أ) فإن العامل الصفرى هو (س – أ)

$$\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣} = \lim\limits_{\text{س} \to ٣} \frac{\cancel{(\text{س} - ٣)}(\text{س} + ٣)}{\cancel{\text{س} - ٣}}$$

$$= \lim\limits_{\text{س} \to ٣} (\text{س} + ٣)$$

$$= ٣ + ٣ = ٦$$

② $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٣} - ٨}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦}$

الحل

$$\text{د}(٢) = \frac{٢^{٣} - ٨}{٢^{٢} - ٥ \times ٢ + ٦} = \frac{٨ - ٨}{٤ - ١٠ + ٦}$$

$= \frac{٠}{٠}$

بتحليل البسط والمقام لحذف العامل الصفرى وهو (س – ٢)

$$\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤)}{\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{س} - ٣)}$$

$$= \lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤}{\text{س} - ٣}$$

$$= \frac{٤ + ٤ + ٤}{٢ - ٣}$$

$$= \frac{١٢}{-١} = -١٢$$

③ $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \frac{٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٢١}{\text{س}^{٢} - ٩}$

الحل

$$\text{د}(٣) = \frac{٣(٣)^{٢} - ٢(٣) - ٢١}{٣^{٢} - ٩} = \frac{٢٧ - ٦ - ٢١}{٩ - ٩}$$

$= \frac{٠}{٠}$

بتحليل البسط والمقام لحذف العامل الصفرى وهو (س – ٣)

بتحليل المقدار : $٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٢١$

٣س	+	٧	٧س
س	–	٣	– ٩س

$(٣\text{س}+٧)(\text{س}-٣)$

وتحليل المقام كفرق بين مربعين

$(\text{س}-٣)(\text{س}+٣)$

$$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}}\ \frac{(٣\text{س}+٧)\cancel{(\text{س}-٣)}}{\cancel{(\text{س}-٣)}(\text{س}+٣)}$$

$$=\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}}\ \frac{٣\text{س}+٧}{\text{س}+٣}=\frac{٩+٧}{٣+٣}$$

$$=\frac{١٦}{٦}=\frac{٨}{٣}$$

---

④ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\ \dfrac{\text{س}^٢-٢\text{س}}{\text{س}^٢-\text{س}-٢}$

الحل

$$\text{د}(٢)=\frac{٢^٢-٢\times٢}{٢^٢-٢-٢}=\frac{٤-٤}{٤-٢-٢}$$

$$=\frac{٠}{٠}$$

بتحليل البسط والمقام لحذف العامل الصفرى وهو $(\text{س}-٢)$

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}^٢-٢\text{س}}{\text{س}^٢-\text{س}-٢}$$

$$=\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}\cancel{(\text{س}-٢)}}{\cancel{(\text{س}-٢)}(\text{س}+١)}$$

$$=\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}}{\text{س}+١}=\frac{٢}{٢+١}=\frac{٢}{٣}$$

---

⑤ $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}}\ \dfrac{٣\text{س}^٢+\text{س}-٤}{\text{س}^٢-١}$

الحل

$$\text{د}(١)=\frac{٣(١)^٢+١-٤}{١^٢-١}=\frac{٣+١-٤}{١-١}$$

$$=\frac{٠}{٠}$$

∴ كلاً من البسط والمقام يشتمل على

العامل الصفرى وهو $(\text{س}-١)$

البسط $=(\text{س}-١)(٣\text{س}+٤)$

المقام $=(\text{س}-١)(\text{س}+١)$

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}}\ \frac{٣\text{س}^٢+\text{س}-٤}{\text{س}^٢-١}$$

$$=\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}}\ \frac{\cancel{(\text{س}-١)}(٣\text{س}+٤)}{\cancel{(\text{س}-١)}(\text{س}+١)}$$

$$=\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}}\ \frac{٣\text{س}+٤}{\text{س}+١}=\frac{٣+٤}{١+١}=\frac{٧}{٢}$$

---

⑥ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \dfrac{(٢\text{س}-١)^٢-١}{٥\text{س}}$

الحل

$$\text{د}(١)=\frac{(٢\times٠-١)^٢-١}{٥\times٠}=\frac{١-١}{٠}$$

$$=\frac{٠}{٠}$$

بتحليل البسط كفرق بين مربعين

$(٢\text{س}-١)^٢-١$

$=(٢\text{س}-١-١)(٢\text{س}-١+١)$

$=(٢\text{س}-٢)(٢\text{س})$

$$\therefore\ \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{(٢\text{س}-١)^٢-١}{٥\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{(٢\text{س} - ٢)(\cancel{٢\text{س}})}{\cancel{٥\text{س}}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{(٢\text{س} - ٢) \times ٢}{٥}$$

$$= \frac{(٢ \times ٠ - ٢) \times ٢}{٥}$$

$$= -٢ \times ٢$$

$$= \frac{-٤}{٥}$$

٧) $\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦}{\text{س} - ٢}$

الحل

$$\text{د}(٢) = \frac{(٢)^٢ - ٥ \times ٢ + ٦}{٢ - ٢} = \frac{٤ - ١٠ + ٦}{٠}$$

$$= \frac{٠}{٠}$$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦}{\text{س} - ٢}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{(\cancel{\text{س} - ٢})(\text{س} - ٣)}{\cancel{\text{س} - ٢}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٢} (\text{س} - ٣) = ٢ - ٣$$

$$= -١$$

٨) $\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^٣ - \text{س}^٢ + ٥\text{س} - ٥}{\text{س}^٢ - ١}$

الحل

$$\text{د}(١) = \frac{(١)^٣ - (١)^٢ + ٥(١) - ٥}{١ - ١}$$

$$= \frac{١ - ١ + ٥ - ٥}{١ - ١}$$

$$= \frac{٠}{٠}$$

بتحليل البسط باستخدام التحليل بالتقسيم

$$\text{س}^٣ - \text{س}^٢ + ٥\text{س} - ٥$$

$$(\text{س}^٣ - \text{س}^٢) + (٥\text{س} - ٥)$$

$$= \text{س}^٢(\text{س} - ١) + ٥(\text{س} - ١)$$

$$= (\text{س} - ١)(\text{س}^٢ + ٥)$$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^٣ - \text{س}^٢ + ٥\text{س} - ٥}{\text{س}^٢ - ١}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ١} \frac{(\text{س} - ١)(\text{س}^٢ + ٥)}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^٢ + ٥}{\text{س} + ١} = \frac{١ + ٥}{١ + ١}$$

$$= \frac{٦}{٢} = ٣$$

٩) $\lim_{\text{س} \to -٣} \frac{(\text{س} + ٢)^٣ + ١}{\text{س}^٢ - ٩}$

الحل

$$\text{د}(-٣) = \frac{(-٣ + ٢)^٣ + ١}{٩ - ٩} = \frac{-١ + ١}{٠}$$

$$= \frac{٠}{٠}$$

بتحليل المقدار : $(\text{س} + ٢)^٣ + ١$

كمجموع مكعبين

$(س+٢+١)\,[(س+٢)^٢-(س+٢)+١]$

$(س+٣)\,[(س+٢)^٢-(س+٢)+١]$

$$\therefore \lim_{س\to -٣} \frac{(س+٢)^٣+١}{س^٢-٩}$$

$$= \lim_{س\to -٣} \frac{(\cancel{س+٣})\,[(س+٢)^٢-(س+٢)+١]}{(\cancel{س+٣})\,(س-٣)}$$

$$= \lim_{س\to -٣} \frac{(س+٢)^٢-(س+٢)+١}{س-٣}$$

$$= \frac{(-٣+٢)^٢-(-٣+٢)+١}{-٣-٣}$$

$$= \frac{١+١+١}{-٦} = \frac{٣}{-٦}$$

$$= -\frac{١}{٢}$$

==

نظرية ٢

إذا كان: $\lim_{س\to أ} د(س) = ل$ ، $\lim_{س\to أ} ق(س) = م$

١. $\lim_{س\to أ} ك\,د(س) = ك\,.\,ل$ حيث $ك \in ح$

٢. $\lim_{س\to أ} [د(س) \pm ق(س)] = ل \pm م$

٣. $\lim_{س\to أ} [د(س)\,.\,ق(س)] = ل\,.\,م$

٤. $\lim_{س\to أ} \frac{د(س)}{ق(س)} = \frac{ل}{م}$

٥. $\lim_{س\to أ} (د(س))^ن = ل^ن$ حيث: $ل^ن \in ح$

==

نظرية ٣

إذا كانت: $د(س) = ق(س)$

لكل $س \in ح - \{أ\}$

وكانت: $\lim_{س\to أ} ق(س) = ل$

فإن: $\lim_{س\to أ} د(س) = ل$

==

إيجاد نهاية الدالة عند نقطة بالقسمة التركيبية

مثال ٤

أوجد: $\lim_{س\to ٤} \frac{س^٣-١٥س-٤}{س-٤}$

الحل

$$د(٤) = \frac{(٤)^٣-١٥(٤)-٤}{٤-٤}$$

$$= \frac{٦٤-٦٠-٤}{٠} = \frac{٠}{٠}$$

البسط من الدرجة الثالثة

بتحويل المقدار إلى حاصل ضرب عاملين

باستخدام القسمة التركيبية

معامل $\text{س}^{٣}$	معامل $\text{س}^{٢}$	معامل س	الحد المطلق	قيمة س
١	٠	−١٥	−٤	٤
+	٤	١٦	٤	
١	٤	١	٠	

∴ البسط $= (\text{س} - ٤)(\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ١)$

العامل الصفرى

$$\therefore \lim_{\text{س} \to ٤} \frac{\text{س}^{٣} - ١٥\text{س} - ٤}{\text{س} - ٤}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٤} \frac{\cancel{(\text{س} - ٤)}(\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ١)}{\cancel{\text{س} - ٤}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٤} (\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ١)$$

$$= ٤^{٢} + ٤ \times ٤ + ١$$

$$= ١٦ + ١٦ + ١$$

$$= ٣٣$$

مثال ٥

أوجد: $\lim_{\text{س} \to -٢} \dfrac{٢\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢} + ٤}{\text{س}^{٣} + ٨}$

الحل

$$\therefore \text{د}(-٢) = \frac{٢(-٢)^{٣} + ٣(-٢)^{٢} + ٤}{(-٢)^{٣} + ٨}$$

$$\text{د}(-٢) = \frac{-١٦ + ١٢ + ٤}{-٨ + ٨} = \frac{٠}{٠}$$

بتحليل البسط بالقسمة التركيبية

والمقام كمجموع مكعبين

٢	٣	٠	٤	−٢
+	−٤	٢	−٤	
٢	−١	٢	٠	

∴ البسط $= (\text{س} + ٢)(٢\text{س}^{٢} - \text{س} + ٢)$

المقام $= (\text{س} + ٢)(\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٤)$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to -٢} \frac{٢\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢} + ٤}{\text{س}^{٣} + ٨}$$

$$= \lim_{\text{س} \to -٢} \frac{\cancel{(\text{س} + ٢)}(٢\text{س}^{٢} - \text{س} + ٢)}{\cancel{(\text{س} + ٢)}(\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٤)}$$

$$= \lim_{\text{س} \to -٢} \frac{٢\text{س}^{٢} - \text{س} + ٢}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٤}$$

$$= \frac{٢(-٢)^{٢} - (-٢) + ٢}{(-٢)^{٢} - ٢(-٢) + ٤}$$

$$= \frac{٨ + ٢ + ٢}{٤ + ٤ + ٤}$$

$$= \frac{١٢}{١٢} = ١$$

مثال ٦

أوجد: $\lim_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{س}^{٥} + \text{س}^{٣} - ٤٠}{\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} - ٤}$

$$\because \text{د}(٢) = \frac{(٢)^{٥} + (٢)^{٣} - ٤٠}{(٢)^{٣} - (٢)^{٢} - ٤} = \frac{٣٢ + ٨ - ٤٠}{٨ - ٤ - ٤} = \frac{٠}{٠}$$

بتحليل البسط بالقسمة التركيبية

٢	١	٠	١	٠	٠	−٤٠
	+	٢	٤	١٠	٢٠	٤٠
	١	٢	٥	١٠	٢٠	٠

البسط =
$(\text{س} - ٢)(\text{س}^{٤} + ٢\text{س}^{٣} + ٥\text{س}^{٢} + ١٠\text{س} + ٢٠)$

بتحليل المقام بالقسمة التركيبية

المقام $= (\text{س} - ٢)(\text{س}^{٢} + \text{س} + ٢)$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٥} + \text{س}^{٣} - ٤٠}{\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} - ٤}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{س}^{٤} + ٢\text{س}^{٣} + ٥\text{س}^{٢} + ١٠\text{س} + ٢٠)}{\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{س}^{٢} + \text{س} + ٢)}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٤} + ٢\text{س}^{٣} + ٥\text{س}^{٢} + ١٠\text{س} + ٢٠}{\text{س}^{٢} + \text{س} + ٢}$$

$$= \frac{(٢)^{٤} + ٢(٢)^{٣} + ٥(٢)^{٢} + ١٠(٢) + ٢٠}{(٢)^{٢} + ٢ + ٢}$$

$$= \frac{١٦ + ١٦ + ٢٠ + ٢٠ + ٢٠}{٤ + ٢ + ٢}$$

$$= \frac{٩٢}{٨} = \frac{٢٣}{٢}$$

إيجاد نهاية الدالة عند نقطة بالضرب في المرافق

نعلم أن العدد : $\sqrt{أ} - \sqrt{ب}$

مرافقه العدد : $\sqrt{أ} + \sqrt{ب}$

وحاصل ضرب العددان المترافقان

= مربع الكمية الأولى − مربع الكمية الثانية

$$\therefore (\sqrt{أ} - \sqrt{ب})(\sqrt{أ} + \sqrt{ب}) = أ - ب$$

$$(أ - ب)(أ + \sqrt{ب}) = أ^{٢} - ب$$

مثال ٧

أوجد: $\lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س} - ٣}{\sqrt{\text{س}} - \sqrt{٣}}$

الحل

$$\text{د}(٣) = \frac{٣ - ٣}{\sqrt{٣} - \sqrt{٣}} = \frac{٠}{٠}$$

بالضرب في مرافق المقام بسطاً ومقاماً

$$\therefore \lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س} - ٣}{\sqrt{\text{س}} - \sqrt{٣}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٣} \frac{(\text{س} - ٣)(\sqrt{\text{س}} + \sqrt{٣})}{(\sqrt{\text{س}} - \sqrt{٣})(\sqrt{\text{س}} + \sqrt{٣})}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\cancel{(\text{س} - ٣)}(\sqrt{\text{س}} + \sqrt{٣})}{\cancel{\text{س} - ٣}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٣} (\sqrt{\text{س}} + \sqrt{٣})$$

$$= \sqrt{٣} + \sqrt{٣} = ٢\sqrt{٣}$$

مثال ٨

أوجد كلاً مما يأتي :

(١) $\underset{\text{س} \to ٦}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س} - ٢} - ٢}{\text{س} - ٦}$

الحل

$\text{د}(٦) = \dfrac{\sqrt{٦ - ٢} - ٢}{٦ - ٦}$

$= \dfrac{\sqrt{٤} - ٢}{٦ - ٦}$

$= \dfrac{٠}{٠}$

بالضرب في مرافق البسط بسطاً ومقاماً

$\underset{\text{س} \to ٦}{\text{نهـا}} \dfrac{(\sqrt{\text{س} - ٢} - ٢)(\sqrt{\text{س} - ٢} + ٢)}{(\text{س} - ٦)(\sqrt{\text{س} - ٢} + ٢)}$

$= \underset{\text{س} \to ٦}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} - ٢ - ٤}{(\text{س} - ٦)(\sqrt{\text{س} - ٢} + ٢)}$

$= \underset{\text{س} \to ٦}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{\text{س} - ٦}}{(\cancel{\text{س} - ٦})(\sqrt{\text{س} - ٢} + ٢)}$

$= \underset{\text{س} \to ٦}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{\sqrt{\text{س} - ٢} + ٢}$

$= \dfrac{١}{\sqrt{٦ - ٢} + ٢}$

$= \dfrac{١}{\sqrt{٤} + ٢}$

$= \dfrac{١}{٢ + ٢}$

$= \dfrac{١}{٤}$

(٢) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٢ - \text{س} - ٦}{\sqrt{٥\text{س} - ٦} - ٣}$

الحل

$\because \text{د}(٣) = \dfrac{٣^٢ - ٣ - ٦}{\sqrt{٥ \times ٣ - ٦} - ٣}$

$= \dfrac{٩ - ٣ - ٦}{\sqrt{٩} - ٣}$

$= \dfrac{٠}{٠}$

العامل الصفري هو $(\text{س} - ٣)$

يمكن الحصول عليه في البسط بالتحليل وفي المقام

بالضرب في مرافق المقام بسطاً ومقاماً

$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٢ - \text{س} - ٦}{\sqrt{٥\text{س} - ٦} - ٣}$

$= \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٢)(\sqrt{٥\text{س} - ٦} + ٣)}{(\sqrt{٥\text{س} - ٦} - ٣)(\sqrt{٥\text{س} - ٦} + ٣)}$

$= \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٢)(\sqrt{٥\text{س} - ٦} + ٣)}{٥\text{س} - ٦ - ٩}$

$= \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{(\cancel{\text{س} - ٣})(\text{س} + ٢)(\sqrt{٥\text{س} - ٦} + ٣)}{٥(\cancel{\text{س} - ٣})}$

$= \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} + ٢)(\sqrt{٥\text{س} - ٦} + ٣)}{٥}$

$= \dfrac{(\cancel{٣ + ٢})(\sqrt{٥ \times ٣ - ٦} + ٣)}{\cancel{٥}}$

$= \sqrt{٥ \times ٣ - ٦} + ٣$

$= \sqrt{٩} + ٣$

$= ٣ + ٣ = ٦$

③ $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} - ٣}{\text{س} - \sqrt{\text{س}+٦}}$

الحل

$\text{د}(٣) = \dfrac{٣ - ٣}{٣ - \sqrt{٣ + ٦}}$

$= \dfrac{٣ - ٣}{٣ - \sqrt{٩}}$

$= \dfrac{٠}{٠}$

بالضرب في مرافق المقام بسطاً ومقاماً

$\therefore \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} - ٣}{\text{س} - \sqrt{\text{س}+٦}}$

$= \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س} - ٣)(\text{س} + \sqrt{\text{س}+٦})}{(\text{س} - \sqrt{\text{س}+٦})(\text{س} + \sqrt{\text{س}+٦})}$

$= \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س} - ٣)(\text{س} + \sqrt{\text{س}+٦})}{\text{س}^٢ - \text{س} - ٦}$

$= \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{(\cancel{\text{س} - ٣})(\text{س} + \sqrt{\text{س}+٦})}{(\cancel{\text{س} - ٣})(\text{س} + ٢)}$

$= \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} + \sqrt{\text{س}+٦}}{\text{س} + ٢}$

$= \dfrac{٣ + \sqrt{٣ + ٦}}{٣ + ٢}$

$= \dfrac{٣ + \sqrt{٩}}{٥}$

$= \dfrac{٦}{٥}$

==================================

④ $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س}+١} - ٢}{\sqrt{\text{س}-٢} - ١}$

الحل

$\text{د}(٣) = \dfrac{\sqrt{٣+١} - ٢}{\sqrt{٣-٢} - ١} = \dfrac{٠}{٠}$

بالضرب في مرافق كلاً من البسط والمقام بسطاً ومقاماً

$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{(\sqrt{\text{س}+١} - ٢)(\sqrt{\text{س}+١} + ٢)(\sqrt{\text{س}-٢} + ١)}{(\sqrt{\text{س}-٢} - ١)(\sqrt{\text{س}-٢} + ١)(\sqrt{\text{س}+١} + ٢)}$

$= \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س} + ١ - ٤)(\sqrt{\text{س}-٢} + ١)}{(\text{س} - ٢ - ١)(\sqrt{\text{س}+١} + ٢)}$

$= \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{(\cancel{\text{س} - ٣})(\sqrt{\text{س}-٢} + ١)}{(\cancel{\text{س} - ٣})(\sqrt{\text{س}+١} + ٢)}$

$= \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س}-٢} + ١}{\sqrt{\text{س}+١} + ٢}$

$= \dfrac{\sqrt{٣-٢} + ١}{\sqrt{٣+١} + ٢}$

$= \dfrac{١ + ١}{٢ + ٢}$

$= \dfrac{٢}{٤}$

$= \dfrac{١}{٢}$

==================================

أمثلة متنوعة على نهاية الدالة عند نقطة جبرياً

① $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{د}(\text{س}) - ٥}{\text{س} - ٢} = ١$

حيث $\text{د}(\text{س})$ كثيرة حدود

فأوجد : $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \text{د}(\text{س})$

الحــــل

∵ النهاية موجودة = ١

، والمقام = صفر عند $\text{س} = ٢$

∴ البسط = صفر عند $\text{س} = ٢$

$\text{د}(٢) - ٥ = ٠$

، ∵ د (س) كثيرة حدود

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{د}(\text{س}) = \text{د}(٢)$

$= ٥$

---

٢ $\lim\limits_{\text{س} \to -١} \dfrac{\text{س}^٢ - (\text{أ} - ١)\,\text{س} - \text{أ}}{\text{س} + ١} = ٤$

فأوجد قيمة : أ

الحــــل

البسط $= (\text{س} + ١)(\text{س} - \text{أ})$

∵ $\lim\limits_{\text{س} \to -١} \dfrac{\text{س}^٢ - (\text{أ} - ١)\,\text{س} - \text{أ}}{\text{س} + ١} = ٤$

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to -١} \dfrac{\cancel{(\text{س} + ١)}\,(\text{س} - \text{أ})}{\cancel{\text{س} + ١}} = ٤$

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to -١} (\text{س} - \text{أ}) = ٤$

∴ $(-١ - \text{أ}) = ٤$

∴ $-١ - ٤ = \text{أ}$

$\text{أ} = -٥$

---

٣ أوجد : $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \left(\dfrac{٥}{\text{س}} + \dfrac{\text{س}^٢ - ٣\text{س}}{\text{س} - ٣} \right)$

الحــــل

∵ $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \left(\dfrac{٥}{\text{س}} + \dfrac{\text{س}^٢ - ٣\text{س}}{\text{س} - ٣} \right)$

$= \lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{٥}{\text{س}} + \lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{\text{س}^٢ - ٣\text{س}}{\text{س} - ٣}$

$= \dfrac{٥}{٣} + \lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{\text{س}\,\cancel{(\text{س} - ٣)}}{\cancel{\text{س} - ٣}}$

$= \dfrac{٥}{٣} + \lim\limits_{\text{س} \to ٣} \text{س}$

$= \dfrac{٥}{٣} + ٣ = \dfrac{١٤}{٣}$

---

٤ أوجد : $\lim\limits_{\text{س} \to -١} \left(\dfrac{\text{س}^٢}{\text{س}^٢ - ١} - \dfrac{٣\text{س} + ٤}{\text{س}^٢ - ١} \right)$

الحــــل

∵ $\text{د}(-١) = \left(\dfrac{١}{١ - ١} - \dfrac{-٣ + ٤}{١ - ١} \right)$

$= \left(\dfrac{١}{٠} - \dfrac{١}{٠} \right)$

$= \infty - \infty$ (كمية غير معينة)

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to -١} \left(\dfrac{\text{س}^٢}{\text{س}^٢ - ١} - \dfrac{٣\text{س} + ٤}{\text{س}^٢ - ١} \right)$

$= \lim\limits_{\text{س} \to -١} \dfrac{\text{س}^٢ - ٣\text{س} - ٤}{\text{س}^٢ - ١}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to -١} \dfrac{(\text{س} - ٤)\,\cancel{(\text{س} + ١)}}{(\text{س} - ١)\,\cancel{(\text{س} + ١)}}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to -١} \dfrac{\text{س} - ٤}{\text{س} - ١}$

$= \dfrac{-١ - ٤}{-١ - ١}$

$= \dfrac{-٥}{-٢} = \dfrac{٥}{٢}$

٥ أوجد: $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \left(\dfrac{١}{\text{س}-١} - \dfrac{٢}{\text{س}^٢-١}\right)$

الحــــل

بالتعويض المباشر عن قيمة س = −١

$= \left(\dfrac{١}{٠} - \dfrac{٢}{٠}\right)$

$= \infty - \infty$

∴ بتوحيد المقامات

$= \lim\limits_{\text{س}\to ١} \left(\dfrac{١\times(\text{س}+١)}{(\text{س}-١)(\text{س}+١)} - \dfrac{٢}{(\text{س}+١)(\text{س}-١)}\right)$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{\text{س}+١-٢}{(\text{س}-١)(\text{س}+١)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{\cancel{\text{س}-١}}{\cancel{(\text{س}-١)}(\text{س}+١)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{١}{\text{س}+١}$

$= \dfrac{١}{١+١}$

$= \dfrac{١}{٢}$

---

٥ أوجد: $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{\text{س}^٣+\text{س}-٢}{\sqrt{٢\text{س}-١}-١}$

الحــــل

∵ $د(١) = \dfrac{١^٣+١-٢}{\sqrt{٢-١}-١} = \dfrac{٢-٢}{١-١} = \dfrac{٠}{٠}$

بالحصول على العامل الصفرى في البسط بالقسمة التركيبية وفي المقام بالضرب في المرافق

١	٠	١	−٢	١
+	١	١	٢	
١	١	٢	٠	

∴ البسط = (س − ١) (س² + س + ٢)

$\lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{\text{س}^٣+\text{س}-٢}{\sqrt{٢\text{س}-١}-١}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{(\text{س}-١)(\text{س}^٢+\text{س}+٢)}{\sqrt{٢\text{س}-١}-١}$

بالضرب في مرافق المقام بسطاً ومقاماً

$= \lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{(\text{س}-١)(\text{س}^٢+\text{س}+٢)(\sqrt{٢\text{س}-١}+١)}{(\sqrt{٢\text{س}-١}-١)(\sqrt{٢\text{س}-١}+١)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{(\text{س}-١)(\text{س}^٢+\text{س}+٢)(\sqrt{٢\text{س}-١}+١)}{٢\text{س}-١-١}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{(\text{س}-١)(\text{س}^٢+\text{س}+٢)(\sqrt{٢\text{س}-١}+١)}{٢\text{س}-٢}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{\cancel{(\text{س}-١)}(\text{س}^٢+\text{س}+٢)(\sqrt{٢\text{س}-١}+١)}{٢\cancel{(\text{س}-١)}}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{(\text{س}^٢+\text{س}+٢)(\sqrt{٢\text{س}-١}+١)}{٢}$

$= \dfrac{(١^٢+١+٢)(\sqrt{٢\times١-١}+١)}{٢}$

$= \dfrac{٤(\sqrt{١}+١)}{٢}$

$= \dfrac{٤\times\cancel{٢}}{\cancel{٢}} = ٤$

تمارين

١

١ أكمل ما يأتى

(أ) $\lim\limits_{س \to \pi} \frac{\text{جتا}٢س}{س} = \text{.........}$

(ب) $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٢}} (٢س - \text{حا}س) = \text{.........}$

(جـ) إذا كانت : $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{أ س}{س + ١} = ٤$

فإن : $أ = \text{.........}$

٢ فأوجد كلاً مما يأتى :

① $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^٢ - ١}{\sqrt{٣س - ٢} - \sqrt{س}}$

② $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{٢س^٢ - ٥س - ٣}{٢س^٢ - ٣س - ٩}$

③ $\lim\limits_{س \to -٢} \frac{٢س^٣ + ٣س^٢ + ٤}{س^٣ + ٨}$

④ $\lim\limits_{س \to -٢} \frac{(س + ٢)^٢ - ٤}{س^٢ + س}$

٣ إذا كانت $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^٢ + أ س + ب}{س - ١} = ٥$

فأوجد قيمتى : أ ، ب

٢ أوجد كلاً مما يأتى

١ $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^٢ + س + ٦}{س + ٣}$

$\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٢ + س - ٦}{س - ٢}$

٣ $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٣ - س^٢ - ٤س - ٤}{س^٢ + س - ٦}$

٤ $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٤}$

٥ $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^٢ - ١}{٢س - ٢}$

٦ $\lim\limits_{س \to ٥} \frac{س - ١٠}{س^٢ - ٥س}$

٧ $\lim\limits_{س \to -٣} \frac{س^٣ - ٢٧}{س^٢ + ٩س + ١٨}$

٨ $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{٢س^٢ + ٣س - ١٤}{٣س^٢ - ٤س - ٤}$

⑨ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\sqrt{١ + س} - \sqrt{١ - س}}{٢ س}$

⑩ $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٣ - س^٢ - ٨ س + ١٢}{س^٢ - ٣ س + ٢}$

③

إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

(١) $\lim\limits_{س \to ٤} (٣س - \sqrt{س})$

(أ) ٨ (ب) ١٠ (ج) ١٤ (د)

(٢) $\lim\limits_{س \to -٢} \frac{٣ س^٢ - ١٢}{س + ٢}$

(أ) ١٨ (ب) −٣ (ج) ١٢ (د) −١٢

(٣) $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^٢ - س - ٦}{س^٢ + س - ١٢}$

(أ) $\frac{٥}{٧}$ (ب) $\frac{١}{٧}$ (ج) −١ (د) −٥

(٤) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س + ١} - ١}{س}$

(أ) ٠ (ب) $\sqrt{٢}$ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) غير معرفة

(٥) ∴ $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جا س}{س}$

(أ) ١ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (ج) $\frac{٢}{\pi}$ (د) غير معرفة

تابع ايجاد نهاية الدالة عند نقطة جبريا

نظرية (٤)

$$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = ن\,(أ)^{ن-١}$$

ولتطبيق هذه الدالة يجب ان تكون الدالة على الصورة : $\frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ}$

أي أن :

① الإشاراتان سالبتان بسطاً ومقاماً

② أسس كلاً من س ، أ في البسط وكذلك متساوية في المقام

③ أن يكون المطلوب إيجاد قيمة النهاية عندما س ← أ

مثال (١)

أوجد كلاً مما يأتي

① $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} - ٨١}{س - ٣}$

الحل

$\because \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} - ٨١}{س - ٣} = \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} - ٣^{٤}}{س - ٣}$

$= ٤\,(٣)^{٤-١}$

$= ٤\,(٣)^{٣}$

$= ٤ \times ٢٧ = ١٠٨$

② $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} + ٣٢}{س + ٢}$

الحل

$\because \underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} + ٣٢}{س + ٢}$

$= \underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - (-٣٢)}{س - (-٢)}$

$= \underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - (-٢)^{٥}}{س - (-٢)}$

$= ٥ \times (-٢)^{٤}$

$= ٥ \times ١٦$

$= ٨٠$

ملحوظة

$\sqrt[م]{س^{ن}} = س^{\frac{ن}{م}}$

فمثلاً : $\sqrt{س^{٣}} = س^{\frac{٣}{٢}}$

$\sqrt{س^{٢}} = س^{\frac{٢}{٥}}$

③ $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{س + ٣} - ٢}{س - ٥}$

الحل

$= \underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٣)^{\frac{١}{٣}} - ٢}{س + ٣ - ٣ - ٥}$

$= \underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٣)^{\frac{١}{٣}} - ٨^{\frac{١}{٣}}}{س + ٣ - ٨} = \frac{١}{٣}\,(٨)^{\frac{١}{٣} - ١}$

$= \frac{١}{٣}\,(٨)^{\frac{-٢}{٣}}$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{١٢}$

٤ $\underset{س \to -٢}{\text{نها}} \dfrac{س^{٥}+٣٢}{س+٢}$

الحل

$\because \underset{س \to -٢}{\text{نها}} \dfrac{س^{٥}+٣٢}{س+٢} = \underset{س \to -٢}{\text{نها}} \dfrac{س^{٥}-(-٣٢)}{س-(-٢)}$

$= \underset{س \to -٢}{\text{نها}} \dfrac{س^{٥}-(-٢)^{٥}}{س-(-٢)} = ٥ \times (-٢)^{٤}$

$= ٥ \times ١٦ = ٨٠$

نتيجة ١

$$\underset{س \to ا}{\text{نها}} \dfrac{س^{ن}-ا^{ن}}{س^{م}-ا^{م}} = \dfrac{ن}{م} (ا)^{ن-م}$$

مثال ٢

أوجد: $\underset{س \to -٣}{\text{نها}} \dfrac{س^{٤}-٨١}{س^{٣}+٢٧}$

الحل

$\underset{س \to -٣}{\text{نها}} \dfrac{س^{٤}-٨١}{س^{٣}+٢٧} = \underset{س \to -٣}{\text{نها}} \dfrac{س^{٤}-٣^{٤}}{س^{٣}-(-٢٧)}$

$= \underset{س \to -٣}{\text{نها}} \dfrac{س^{٤}-٣^{٤}}{س^{٣}-(-٣)^{٣}}$

$= \underset{س \to -٣}{\text{نها}} \dfrac{س^{٤}-(-٣)^{٤}}{س^{٣}-(-٣)^{٣}}$

$= \dfrac{٤}{٣} (-٣)^{٤-٣}$

$= \dfrac{٤}{٣} \times (-٣) = -٤$

نتيجة ٢

$$\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{س^{ن}-١}{س^{م}-١} = \dfrac{ن}{م}$$

مثال ٣

أوجد كلاً مما يأتي

١ $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{س\sqrt[٣]{س^{٢}}-١}{س^{٢}\sqrt{س}-١}$

الحل

$\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{س\sqrt[٣]{س^{٢}}-١}{س^{٢}\sqrt{س}-١} = \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{س \times س^{\frac{٢}{٣}}-١}{س^{٢} \times س^{\frac{١}{٢}}-١}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{س^{\frac{٢}{٣}}-١}{س^{\frac{٥}{٢}}-١}$

$= \dfrac{٢}{٣} \div \dfrac{٥}{٢}$

$= \dfrac{٢}{٣} \times \dfrac{٥}{٢} = \dfrac{٥}{٣}$

٢ $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س}+\sqrt[٣]{س}-٢}{س-١}$

الحل

$\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س}+\sqrt[٣]{س}-٢}{س-١}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س}-١+\sqrt[٣]{س}-١}{س-١}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \left[\dfrac{\sqrt{س}-١}{س-١} + \dfrac{\sqrt[٣]{س}-١}{س-١}\right]$

$$= \lim_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س}^{\frac{1}{2}} - 1}{\text{س} - 1} + \lim_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س}^{\frac{1}{3}} - 1}{\text{س} - 1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{5}{6}$$

نتيجة ٣

$$\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{(\text{س} + \text{أ}\,\text{هـ})^{\text{ن}} - \text{س}^{\text{ن}}}{\text{ب}\,\text{هـ}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \text{ن}\ \text{س}^{\text{ن}-1}$$

مثال ٤

أوجد: $\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{(2 + 3\text{هـ})^5 - 32}{4\text{هـ}}$

الحل

$$\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{(2 + 3\text{هـ})^5 - 32}{4\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{(2 + 3\text{هـ})^5 - 2^5}{4\text{هـ}}$$

$$= \frac{3}{4} \times 5 \times 2^4$$

$$= \frac{15}{\cancel{4}_1} \times \cancel{16}^4 = 60$$

مثال ٥

أوجد: $\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\sqrt[3]{2\text{س} - 3} - 1}{\sqrt[5]{3\text{س} - 5} - 1}$

الحل

بالقسمة على العامل الصفرى

وهو $(\text{س} - 2)$

$$= \lim_{\text{س} \to 1} \frac{\sqrt[3]{2\text{س} - 3} - 1}{\text{س} - 2} \times \lim_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س} - 2}{\sqrt[5]{3\text{س} - 5} - 1}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 2} \frac{(2\text{س} - 3)^{\frac{1}{3}} - 1}{\text{س} - 2} \times \lim_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س} - 2}{(3\text{س} - 5)^{\frac{1}{5}} - 1}$$

$$= 2 \lim_{\text{س} \to 1} \frac{(2\text{س} - 3)^{\frac{1}{3}} - 1}{2\text{س} - 4} \times \frac{1}{3} \lim_{\text{س} \to 1} \frac{3\text{س} - 6}{(3\text{س} - 5)^{\frac{1}{5}} - 1}$$

$$= 2 \lim_{\text{س} \to 1} \frac{(2\text{س} - 3)^{\frac{1}{3}} - 1}{2\text{س} - 4} \times \frac{1}{3} \lim_{\text{س} \to 1} \frac{3\text{س} - 6}{(3\text{س} - 5)^{\frac{1}{5}} - 1}$$

$$= 2 \lim_{\text{س} \to 1} \frac{(2\text{س} - 3)^{\frac{1}{3}} - 1}{(2\text{س} - 3) - 1} \times \frac{1}{3} \lim_{\text{س} \to 1} \frac{(3\text{س} - 5) - 1}{(3\text{س} - 5)^{\frac{1}{5}} - 1}$$

$$= 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 5 = \frac{10}{9}$$

مثال ٦

أوجد: $\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^3(\text{س} - 1)^4 - 8}{\text{س} - 2}$

الحل

$$\because \lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^3(\text{س} - 1)^4 - 8}{\text{س} - 2}$$

بإضافة $-\text{س}^3$ ، س^3 إلى البسط

$$= \lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^3(\text{س} - 1)^4 - \text{س}^3 + \text{س}^3 - 8}{\text{س} - 2}$$

بتقسيم النهاية إلى نهايتين

$$= \lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^3(\text{س} - 1)^4 - \text{س}^3}{\text{س} - 2} + \lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^3 - 8}{\text{س} - 2}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{س^{٣}\left((س-١)^{٤}-١\right)}{س-١-١} + \text{نها}_{س \to ٢} \frac{س^{٣}-٢^{٣}}{س-٢}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٢} س^{٣} \times \text{نها}_{س \to ٢} \frac{(س-١)^{٤}-١}{س-١-١} + ٣ \times ٢^{٢}$$

$$= ٨ \times ٤ + ٣ \times ٤$$

$$= ٣٢ + ١٢ = ٤٤$$

مثال ٧

أوجد: $\text{نها}_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٥]{س+١} - \sqrt[٣]{٢س+١}}{س}$

الحل

بإضافة −١، ١ إلى البسط
والتقسيم إلى نهايتين

$$= \text{نها}_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٥]{س+١} - ١ - \sqrt[٣]{٢س+١} + ١}{س}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٥]{س+١} - ١ - \left(\sqrt[٣]{٢س+١} - ١\right)}{س}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٥]{س+١} - ١}{س} - \text{نها}_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٣]{٢س+١} - ١}{س}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٠} \frac{(س+١)^{\frac{١}{٥}} - ١}{س+١-١} - ٢\,\text{نها}_{س \to ٠} \frac{(٢س+١)^{\frac{١}{٣}} - ١}{٢س+١-١}$$

$$= \frac{١}{٥} - ٢ \times \frac{١}{٣}$$

$$= \frac{١}{٥} - \frac{٢}{٣}$$

$$= \frac{-٧}{١٥}$$

مثال ٨

أوجد: $\text{نها}_{س \to -١} \frac{(س+٣)^{٣} - ٨}{س^{٢} - ٧س - ٨}$

الحل

$$\text{نها}_{س \to -١} \frac{(س+٣)^{٣} - ٨}{س^{٢} - ٧س - ٨}$$

$$= \text{نها}_{س \to -١} \frac{(س+٣)^{٣} - ٢^{٣}}{(س+١)(س-٨)}$$

$$= \text{نها}_{س \to -١} \frac{(س+٣)^{٣} - ٢^{٣}}{س+١} \times \text{نها}_{س \to -١} \frac{١}{س-٨}$$

$$= \text{نها}_{س \to -١} \frac{(س+٣)^{٣} - ٢^{٣}}{س+٣-٢} \times \frac{١}{-١-٨}$$

$$= ٣ \times ٢^{٢} \times \frac{١}{-٩}$$

$$= ٣ \times ٤ \times \frac{-١}{٩} = \frac{-٤}{٣}$$

مثال ٩

أوجد: $\text{نها}_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٥]{س+١} - (س+١)^{٧}}{س}$

الحل

البسط عبارة عن جذر وقوس
بإضافة : −١، ١ للبسط وتقسيم النهاية
إلى نهايتين

$$= \text{نها}_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٥]{س+١} - ١ - (س+١)^{٧} + ١}{س}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٥]{س+١} - ١ - \left[(س+١)^{٧} - ١\right]}{س}$$

$$\text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{(\text{س}+1)^{\frac{1}{5}}-1}{\text{س}+1-1} - \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{(\text{س}+1)^{7}-1}{\text{س}+1-1}$$

$$= \frac{1}{5} - 7 = \frac{-34}{5}$$

مثال ١٠

أوجد : $\text{نها}_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}^7+\text{س}^5+\text{س}^3-3}{\text{س}-1}$

الحل

$$\text{نها}_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}^7-1+\text{س}^5-1+\text{س}^3-1}{\text{س}-1}$$

$$= \text{نها}_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}^7-1}{\text{س}-1} + \text{نها}_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}^5-1}{\text{س}-1} + \text{نها}_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}^3-1}{\text{س}-1}$$

$$= 7 + 5 + 3$$

$$= 15$$

مثال ١١

أوجد : $\text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{(1+5\text{س})^{10}-1}{(1+7\text{س})^{8}-1}$

الحل

بفصل البسط عن المقام والضرب فى العامل الصفرى بسطاً ومقاماً

$$= \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{(1+5\text{س})^{10}-1}{\text{س}} \times \text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س}}{(1+7\text{س})^{8}-1}$$

$$= 5\,\text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{(1+5\text{س})^{10}-1}{5\text{س}} \times \frac{1}{7}\,\text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{7\text{س}}{(1+7\text{س})^{8}-1}$$

$$= 5\,\text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{(1+5\text{س})^{10}-1}{(1+5\text{س})-1} \times \frac{1}{7}\,\text{نها}_{\text{س}\to 0} \frac{(1+7\text{س})-1}{(1+7\text{س})^{8}-1}$$

$$= 5 \times 10 \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{8} = \frac{50}{56} = \frac{25}{28}$$

مثال ١٢

أوجد : $\text{نها}_{\text{س}\to 16} \frac{\sqrt[4]{\text{س}^5}-32}{\sqrt[4]{\text{س}^3}-64}$

الحل

$$\text{نها}_{\text{س}\to 16} \frac{\sqrt[4]{\text{س}^5}-32}{\sqrt[4]{\text{س}^3}-64}$$

$$= \text{نها}_{\text{س}\to 16} \frac{\text{س}^{\frac{5}{4}}-(16)^{\frac{5}{4}}}{\text{س}^{\frac{3}{4}}-(16)^{\frac{3}{4}}}$$

$$= \left(\frac{5}{4} \div \frac{3}{4}\right) \times (16)^{\frac{5}{4}-\frac{3}{4}}$$

$$= \left(\frac{5}{4} \times \frac{4}{3}\right)(16)^{\frac{2}{4}}$$

$= \frac{5}{6} \times$ [illegible]

مثال ١٣

أوجد : $\text{نها}_{\text{س}\to 1} \frac{\sqrt[3]{26+\text{س}}-3}{\text{س}-1}$

الحل

$$\text{نها}_{\text{س}\to 1} \frac{\sqrt[3]{26+\text{س}}-\sqrt[3]{27}}{\text{س}-1}$$

$$= \text{نها}_{\text{س}\to 1} \frac{(26+\text{س})^{\frac{1}{3}}-27^{\frac{1}{3}}}{\text{س}-1}$$

$$= \text{نها}_{\text{س}\to 1} \frac{(26+\text{س})^{\frac{1}{3}}-27^{\frac{1}{3}}}{(26+\text{س})-27} = \frac{1}{3} \times 27^{\frac{1}{3}-1}$$

$$= \frac{1}{3} \times 27^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3} \times 3^{-2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{27}$$

تمارين

أكمـــــــل ما يأتي

(١) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٩ - ١}{س^٥ - ١} = ...$

(٢) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^٣ - ٢٧}{س^٢ - ٩} = ...$

(٣) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^٤ - ١٦}{س^٣ + ٨} = ...$

(٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{(س + ١)^٩ - ١}{س}$

(٥) إذا كان : $\lim_{س \to ك} \frac{س^٥ - ك^٥}{س - ك} = ٨٠$

فإن : ك = ...

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٣٢}{س - ٢}$

(أ) ١٦ (ب) ٥×١٦ (جـ) ٦٤ (د) ٣٢

(٢) $\lim_{س \to -١} \frac{س^٥ + ١}{س + ١}$

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) −٥ (د) −٤

(٣) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(س + هـ)^٧ - س^٧}{هـ}$

(أ) $س^٧$ (ب) $٧س^٦$ (جـ) صفر (د)

(٤) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{١٣} - ١}{س^{١٩} - ١}$

(أ) $\frac{١٣}{١٩}$ (ب) $\frac{١٩}{١٣}$ (جـ) −٦ (د) $-\frac{١٣}{١٩}$ ١

أوجد كلا مما يأتى

١ $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ١٦}{٢س - ٤}$

٢ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٥ - ٨١ س}{س - ٣}$

٣ $\lim_{س \to -٢} \frac{س^٧ + ١٢٨}{س^٣ + ٨}$

٤ $\lim_{س \to \sqrt{٢}} \frac{س^٥ - ٤\sqrt{٢}}{س^٢ - ٢}$

٥ $\lim_{س \to \frac{٣}{٢}} \frac{٣٢ س^٥ - ٢٤٣}{٨ س^٣ - ٢٧}$

٦ $\lim_{٢س \to -١} \frac{١٦ س^٤ - ١}{١٢٨ س^٧ + ١}$

٧ $\lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{س^٥ - ١٢٨ س^{١٢}}{س^٢ - ١٦ س^٦}$

٨ $\lim_{س \to ٠} \frac{(س + ٢)^٤ - ١٦}{س}$

٩ $\lim_{س \to ٠} \frac{(س - ١)^٥ + ١}{س}$

١٠ $\lim_{س \to ٠} \frac{(س + ١)^٥ - ١}{س^٢ + س}$

١١ $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{٣\,\text{س} - ٣}{\text{س} - ١}$

١٢ $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٤} - ١٦}{\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س}}$

١٣ $\underset{\text{س} \to -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٤} - ٨١}{\text{س}^{٣} + ٢٧}$

١٤ $\underset{\text{س} \to -\sqrt{٥}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٥} - ٢٥\sqrt{٥}}{\text{س}^{٢} - ٥}$

١٥ $\underset{\text{س} \to -\frac{٥}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{١٦\,\text{س}^{٤} \quad ٦٢٥}{٨\text{س}^{٣} + ١٢٥}$

١٦ $\underset{٢\text{س} \to \sqrt{٣}}{\text{نهـا}} \dfrac{٨\,\text{س}^{٣} - ٣\sqrt{٣}}{٢\,\text{س} - \sqrt{٣}}$

١٧ $\underset{\text{س} \to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{١٦\,\text{س} \quad ١}{٢\text{س} - ١}$

١٨ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} + ٣)^{٤} - ٨١}{\text{س}}$

١٩ $\underset{\text{س} \to -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} + ٢)^{٥} + ١}{\text{س} + ٣}$

٢٠ $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} - ٢)^{٦} - ١٦}{\text{س}^{٢} - ٣\,\text{س}}$

٢١ $\lim_{\text{س} \to 4} \frac{(\text{س} - 3)^6 - 1}{\text{س} - 4}$

٢٢ $\lim_{\text{س} \to -1} \frac{(\text{س} + 2)^6 - 1}{(\text{س} + 2)^3 - 1}$

٢٣ $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{(2\text{س} + 1)^5 - 1}{5\text{س}}$

٢٤ $\lim_{\text{و} \to 0} \frac{(\text{س} + 4\text{و})^6 - \text{س}^6}{\text{و}}$

٢٥ $\lim_{\text{س} \to 2} \frac{(\text{س} - 3)^6 - 1}{\text{س} - 2}$

٢٦ $\lim_{\text{س} \to -3} \frac{(\text{س} + 1)^3 + 8}{\text{س}^2 - \text{س} - 12}$

٢٧ $\lim_{\text{س} \to 3} \frac{(\text{س} - 2)^5 + \text{س} - 4}{3\text{س} - 9}$

٢٨ $\lim_{\text{س} \to 1} \frac{\sqrt[7]{\text{س}} - 1}{\sqrt[4]{\text{س}} - 1}$

٢٩ $\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\sqrt[3]{\text{س} + 6} - 2}{\text{س} - 2}$

٣٠ $\lim_{\text{س} \to 4} \frac{\text{س} - 4}{\sqrt{\text{س}} - 2}$

٣١ $\lim_{\text{س} \to 3} \frac{(\text{س} + 2)^5 + 1}{\text{س} + 3}$

٣٢ $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{(1 + 3\text{س})^7 - 1}{4\text{س}}$

٣٣ $\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{(\text{س} + 5\text{هـ})^9 - \text{س}^9}{6\text{هـ}}$

٣٤ $\lim_{\text{و} \to 0} \frac{(\text{س} + 3\text{و})^8 - \text{س}^8}{4\text{و}}$

٣٥ $\lim_{\text{س} \to 2} \frac{(\text{س}^2 - 3)^6 - 1}{\text{س} - 2}$

٣٦ $\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^7 + \text{س}^5 - 160}{\text{س} - 2}$

٣٧ $\lim_{\text{س} \to 2} \frac{16\text{س}^4 - 1}{\text{س} - 2}$

٣٨ $\lim_{\text{س} \to 4} \frac{\text{س}^3 \sqrt{\text{س}} - 128}{\text{س} - 4}$

٣٩ $\lim_{\text{س} \to 1} \frac{\sqrt[3]{\text{س} + 26} - 3}{\text{س} - 1}$

٤٠ $\lim_{\text{س} \to 9} \frac{\text{س} - \sqrt{3}}{\text{س} - 9}$

٤١ $\lim_{\text{س} \to 4} \frac{\text{س}\sqrt{\text{س} - 3} - 4}{\text{س} - 4}$

نهاية الدالة عند اللانهاية

نظرية (٥)

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \ \frac{١}{س} = ٠$$

نتائج

١) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \ \frac{أ}{س} = ٠$ حيث أ ثابت

٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \ \frac{أ}{س^{ن}} = ٠$ حيث أ ثابت ، $ن \in ح^{+}$

قواعد أساسية

أ) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \ حـ = ٠$

ب) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \ س^{ن} = ٠$

مثال ١

أوجد كلاً مما يأتى :

١) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left(\frac{٣}{س} + ٥ \right)$

الحل

$\underset{\to \infty}{\text{نها}} \left(\frac{٣}{س} + ٥ \right) = \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \ \frac{٣}{س} + \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \ ٥$

$= ٠ + ٥$

$= ٥$

==

٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left(س^{٢} - ٧س + ٩ \right)$

الحل

الدالة كثيرة الحدود والناتج $= \infty - \infty$

= كمية غير معينة

وفى هذه الحالة يتم أخذ س مرفوعة لأكبر أس عامل مشترك ثم نطبق النظرية والقواعد السابقة

$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left(س^{٢} - ٧س + ٩ \right)$

$= \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \ س^{٢} \left(١ - \frac{٧}{س} + \frac{٩}{س^{٢}} \right)$

$= \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \ س^{٢} \times \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left(١ - \frac{٧}{س} + \frac{٩}{س^{٢}} \right)$

$= \infty \ (١ - ٠ + ٠)$

$= \infty \ (١)$

$= \infty$

إيجاد نهاية دالة الكسر الجبرى عندالانهاية

لإيجاد : $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \ \frac{س \ +}{س - ٢}$

فإننا نقسم كلاً من البسط والمقام على المتغير س مرفوع لأكبر أس فى المقام

$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \ \frac{٣س + ١}{س - ٢} = \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \ \frac{٣ + \frac{١}{س}}{١ - \frac{٢}{س}}$

$= \frac{٣ + ٠}{١ - ٠} = \frac{٣}{١} = ٣$

مثـــال ٢

أوجد كلاً مما يأتى :

① $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٢س^2 - ٩}{٣س^2 - ٥س + ٧}$

الحـــل

بالقسمة على $س^2$ بسطاً ومقاماً

$$\therefore \lim\limits_{س \to \infty} \frac{٢س^2 - ٩}{س^2 - ٥س + ٧} = \lim\limits_{س \to \infty} \frac{٢ - \frac{٢}{س^2}}{١ - \frac{٥}{س} + \frac{٧}{س^2}}$$

$$= \frac{٢ - ٠}{١ - ٠ + ٠}$$

$$= \frac{٢}{١} = ٢$$

لاحظ إذا كان :

درجة البسط = درجة المقام

فإن :

$$\text{الناتج} = \frac{\text{معامل أكبر درجة فى البسط}}{\text{معامل أكبر درجة فى المقام}}$$

② $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٣س + ٧}{٥س^3 + ٢س^2 - ١}$

الحـــل

بالقسمة على $س^3$ بسطاً ومقاماً

$$\therefore \lim\limits_{س \to \infty} \frac{٣س + ٧}{٥س^3 + ٢س^2 - ١} = \lim\limits_{س \to \infty} \frac{\frac{٣}{س^2} + \frac{٧}{س^3}}{٥ + \frac{٢}{س} - \frac{١}{س^3}}$$

$$= \frac{٠ + ٠}{٥ + ٠ - ٠}$$

$$= ٠$$

لاحظ إذا كان :

درجة البسط < درجة المقام

فإن :

الناتج = صفر

③ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{س^5 + ٢س^2 - ٧}{٢س^2 + ٣س - ١}$

الحـــل

بالقسمة على $س^2$ بسطاً ومقاماً

$$\therefore \lim\limits_{س \to \infty} \frac{س^5 + ٢س^2 - ٧}{٢س^2 + ٣س - ١}$$

$$= \lim\limits_{س \to \infty} \frac{س^3 + ٢ - \frac{٧}{س^2}}{٢ + \frac{٣}{س} - \frac{١}{س^2}} = \frac{\infty + ٢ - ٠}{٢ + ٠ - ٠}$$

$$= \infty$$

لاحظ إذا كان :

درجة البسط > درجة المقام

فإن :

الناتج = ∞

تذكر أن

① $\sqrt{س^2} = \sqrt[3]{س^3} = \sqrt[4]{س^4} = \sqrt[5]{س^5}$ حيث س > ٠

② $\sqrt[3]{س^2} = \sqrt[6]{س^4} = \sqrt[9]{س^6} = \ldots$

مثـــال ٣

أوجد كلاً مما يأتى :

① $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٥س - ٦}{\sqrt{٩س^2 + ٧}}$

الحـــل

بالقسمة على $\text{س} = \sqrt{\text{س}^2}$ بسطاً ومقاماً

$$\therefore \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{5\text{س} - 6}{\sqrt{9\text{س}^2+7}} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{5 - \frac{1}{\text{س}}}{\sqrt{9 + \frac{7}{\text{س}^2}}}$$

$$= \frac{5 - 0}{\sqrt{9 + 0}}$$

$$= \frac{5}{3}$$

③ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt[3]{8\text{س}^3 - 6}}{\sqrt[4]{\text{س}^4 - 3}}$

الحـــل

بالقسمة على $\sqrt[3]{\text{س}^3} = \sqrt[4]{\text{س}^4}$ بسطاً ومقاماً

$$\therefore \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt[3]{8\text{س}^3 - 6}}{\sqrt[4]{\text{س}^4 - 3}}$$

$$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt[3]{8 - \frac{6}{\text{س}^3}}}{\sqrt[4]{1 - \frac{3}{\text{س}^4}}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{8 - 0}}{\sqrt[4]{1 - 0}} = \frac{2}{1} = 2$$

مثـــال ٤

أوجد : $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \left(\sqrt{\text{س}^2 + 5\text{س}} - \text{س} \right)$

الحـــل

:

الناتج $= \infty - \infty$

بالضرب فى مرافق البسط بسطاً ومقاماً

$$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \left(\sqrt{\text{س}^2 + 5\text{س}} - \text{س} \right)$$

$$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\left(\sqrt{\text{س}^2+5\text{س}} - \text{س}\right)\left(\sqrt{\text{س}^2+5\text{س}} + \text{س}\right)}{\sqrt{\text{س}^2+5\text{س}} + \text{س}}$$

$$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\cancel{\text{س}^2} + 5\text{س} - \cancel{\text{س}^2}}{\sqrt{\text{س}^2+5\text{س}} + \text{س}}$$

$$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{5\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2+5\text{س}} + \text{س}}$$

بالقسمة على $\text{س} = \sqrt{\text{س}^2}$ بسطاً ومقاماً

$$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{5}{\sqrt{1 + \frac{5}{\text{س}}} + 1}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{5}{2}$$

مثـــال ٥

أوجد : $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt[3]{8\text{س}^3 - 5\text{س}^2}}{\sqrt[5]{32\text{س}^5 + \text{س}}}$

الحـــل

بالقسمة على $\sqrt[3]{\text{س}^3} = \sqrt[5]{\text{س}^5}$ بسطاً ومقاماً

$$\therefore \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt[3]{8\text{س}^3 - 5\text{س}^2}}{\sqrt[5]{32\text{س}^5 + \text{س}}} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt[3]{8 - \frac{5}{\text{س}}}}{\sqrt[5]{32 + \frac{1}{\text{س}^4}}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{8 - 0}}{\sqrt[5]{32 + 0}} = \frac{2}{2} = 1$$

مثال ٦

أوجد: $\underset{س\to\infty}{\text{نها}}\left(\sqrt{س^{٢}+٥س}-س\right)$

الحل

عند التعويض المباشر فإن:

الناتج $=\infty-\infty$

بالضرب في مرافق البسط بسطاً ومقاماً

$$\underset{س\to\infty}{\text{نها}}\left(\sqrt{س^{٢}+٥س}-س\right)$$

$$=\underset{س\to\infty}{\text{نها}}\frac{\left(\sqrt{س^{٢}+٥س}-س\right)\left(\sqrt{س^{٢}+٥س}+س\right)}{\sqrt{س^{٢}+٥س}+س}$$

$$\underset{س\to\infty}{\text{نها}}\frac{\cancel{س^{٢}}+٥س-\cancel{س^{٢}}}{\sqrt{س^{٢}+٥س}+س}$$

$$\underset{س\to\infty}{\text{نها}}\frac{٥س}{\sqrt{س^{٢}+٥س}+س}$$

بالقسمة على $س=\sqrt{س^{٢}}$ بسطاً ومقاماً

$$\underset{س\to\infty}{\text{نها}}\frac{٥}{\sqrt{١+\frac{٥}{س}}+١}$$

$$=\frac{٥}{\sqrt{١+٠}+١}=\frac{٥}{٢}$$

مثال ٧

أوجد: $\underset{س\to\infty}{\text{نها}}\frac{\sqrt[٣]{٨س^{٣}-٥س^{٢}}}{\sqrt[٥]{٣٢س^{٥}+س}}$

الحل

بالقسمة على $\sqrt[٣]{س^{٣}}=\sqrt[٥]{س^{٥}}$ بسطاً ومقاماً

$$\therefore\underset{س\to\infty}{\text{نها}}\frac{\sqrt[٣]{٨س^{٣}-٥س^{٢}}}{\sqrt[٥]{٣٢س^{٥}+س}}=\underset{س\to\infty}{\text{نها}}\frac{\sqrt[٣]{٨-\frac{٥}{س}}}{\sqrt[٥]{٣٢+\frac{١}{س^{٤}}}}$$

$$=\frac{\sqrt[٣]{٨-٠}}{\sqrt[٥]{٣٢+٠}}=\frac{٢}{٢}=١$$

مثال ٨

أوجد: $\underset{س\to\infty}{\text{نها}}\frac{\sqrt[٤]{س^{٦}+٨}-\sqrt[٦]{س^{٢}+٤}}{\sqrt{س^{٣}+٩}}$

الحل

بالقسمة على $\sqrt{س^{٣}}=\sqrt[٤]{س^{٦}}=\sqrt[٦]{س^{٩}}$ بسطاً ومقاماً

$$\therefore\underset{س\to\infty}{\text{نها}}\frac{\sqrt[٤]{س^{٦}+٨}-\sqrt[٦]{س^{٢}+٤}}{\sqrt{س^{٣}+٩}}$$

$$=\underset{س\to\infty}{\text{نها}}\frac{\sqrt[٤]{١+\frac{٨}{س^{٦}}}-\sqrt[٦]{\frac{١}{س^{٧}}+\frac{٤}{س^{٩}}}}{\sqrt{١+\frac{٩}{س^{٣}}}}$$

$$=\frac{\sqrt[٤]{١+٠}-\sqrt[٦]{٠+٠}}{\sqrt{١+٠}}$$

$$=\frac{\sqrt[٤]{١}-\sqrt[٦]{٠}}{\sqrt{١}}=\frac{١}{١}=١$$

مثال ٩

أوجد: $\underset{س\to\infty}{\text{نها}}\frac{٣س^{٢}-س-٧}{(س+١)\sqrt{٢٥س^{٢}+١}}$

الحل

بالقسمة على $\text{س}^2 = \text{س}\sqrt{\text{س}^2}$ بسطاً ومقاماً

$$= \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{3 - \frac{1}{\text{س}} - \frac{7}{\text{س}^2}}{\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)\sqrt{25 + \frac{1}{\text{س}^2}}}$$

$$= \frac{3 - 0 - 0}{(1+0)\sqrt{25+0}}$$

$$= \frac{3}{5}$$

مثال ١٠

أوجد : $\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{(2\text{س}-1)^5(\text{س}^2+3)^6}{(2\text{س}-1)^7(\text{س}^2+3)^6}$

الحل

بالقسمة على س^{17} بسطاً ومقاماً

$$\therefore \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{(2\text{س}-1)^5(\text{س}^2+3)^6}{(2\text{س}+5)^7(\text{س}^2+7)^5}$$

$$= \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\left(2-\frac{1}{\text{س}}\right)^5\left(1+\frac{3}{\text{س}^2}\right)^6}{\left(2+\frac{5}{\text{س}}\right)^7\left(1+\frac{7}{\text{س}^2}\right)^5}$$

$$= \frac{(2-0)^5(1+0)^6}{(2+0)^7(1+0)^5}$$

$$= \frac{2^5 \times 1}{2^7 \times 1} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

مثال ١١

أوجد قيمتى أ ، ن إذا كانت :

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{4\text{أ}\,\text{س}^{\text{ن}} - 3\text{س} + 5}{3 - 9\text{س} + 8\text{س}^2} = 3$$

الحل

$\because$ النهاية موجودة

وتساوى عدد حقيقى $\neq 0$

$\therefore$ درجة البسط = درجة المقام

$\therefore \text{ن} = 2$

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{4\text{أ}\,\text{س}^2 - 3\text{س} + 5}{3 - 9\text{س} + 8\text{س}^2} = 3$$

س^2 بسطاً ومقاماً

$$\therefore \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{4\text{أ} - \frac{3}{\text{س}} + \frac{5}{\text{س}^2}}{\frac{3}{\text{س}^2} - \frac{9}{\text{س}} + 8} = 3$$

$\because \frac{4\text{أ}}{8} = 3 \quad \therefore 4\text{أ} = 24 \quad \therefore \text{أ} = 6$

مثال ١٢

أوجد : $\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{3\text{س}^{-2} - \text{س}^{-1} + 5}{\text{س}^{-3} + 2\text{س}^{-4} + 7}$

الحل

$\because \text{س}^{-\text{ن}} = \frac{1}{\text{س}^{\text{ن}}}$

$$\therefore \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{3\text{س}^{-2} - \text{س}^{-1} + 5}{\text{س}^{-3} + 2\text{س}^{-4} + 7}$$

$$= \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\frac{3}{\text{س}^2} - \frac{1}{\text{س}} + 5}{\frac{1}{\text{س}^3} + \frac{2}{\text{س}^4} + 7}$$

$$= \frac{0 - 0 + 5}{0 + 0 + 7} = \frac{5}{7}$$

مثال ١٣

أوجد : $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left(٥س^{-٣} + ٢ \right)$

الحل

$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left(٥س^{-٣} + ٢ \right) = \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left(\frac{٥}{س^{٣}} + ٢ \right)$

$= ٠ + ٢$

$= ٢$

مثال ١٣

أوجد : $\underset{ن \to \infty}{\text{نها}}\ ن \left[\left(أ + \frac{١}{ن} \right)^{٤} - أ^{٤} \right]$

الحل

بالتعويض المباشر فإن الناتج = $\infty \times ٠$

= كمية غير معينة

$\therefore \underset{ن \to \infty}{\text{نها}}\ ن \left[\left(أ + \frac{١}{ن} \right)^{٤} - أ^{٤} \right]$

$= \underset{\frac{١}{ن} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\left(أ + \frac{١}{ن} \right)^{٤} - أ^{٤}}{\frac{١}{ن}}$

$= \underset{\frac{١}{ن} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\left(أ + \frac{١}{ن} \right)^{٤} - أ^{٤}}{\left(أ + \frac{١}{ن} \right) - أ}$

$= ٤ أ^{٣}$

نهاية الدوال المثلثية

نظرية

إذا كان س قياس زاوية بالقياس الدائري فإن :

① $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{حا}\,س}{س} = ١$

② $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{طا}\,س}{س} = ١$

نتائج

① $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{حا}\,أس}{ب\,س} = \frac{أ}{ب}$

② $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{طا}\,أس}{ب\,س} = \frac{أ}{ب}$

③ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{حتا}\,س}{س} = \text{صفر}$

مثال ١

أوجد كلاً مما يأتى :

① $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{طا}\,٣س}{\text{حا}\,٥س}$

الحل

بالقسمة على س بسطاً ومقاماً

$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{طا}\,٣س}{\text{حا}\,٥س} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{طا}\,٣س}{س}}{\frac{\text{حا}\,٥س}{س}}$

$= \frac{٣}{٥}$

② $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{حا}\,٣س + \text{طا}\,س}{\text{حا}\,س}$

الحل

بالقسمة على س بسطاً ومقاماً

$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{حا}\,٣س}{س} + \frac{\text{طا}\,س}{س}}{\frac{\text{حا}\,س}{س}} = \frac{٣ + ١}{١} = ٤$

③ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{حا}\,س\;\text{حتا}\,س}{س}$

الحل

$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{حا}\,س\;\text{حتا}\,س}{س}$

$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{حا}\,س}{س} \times \text{حتا}\,س\right)$

$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{حا}\,س}{س} \times \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}}\,\text{حتا}\,س$

$= ١ \times \text{حتا}\,٠$

$= ١ \times ١ = ١$

④ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{حا}\,س + س\,\text{حتا}\,س}{\text{حا}\,س\;\text{حتا}\,س}$

الحل

بالقسمة على س بسطاً

$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{حا}\,س + س\,\text{حتا}\,س}{\text{حا}\,س\;\text{حتا}\,س}$

$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{حا}\,س}{س} + \frac{س}{س}\,\text{حتا}\,س}{\frac{\text{حا}\,س}{س}\;\text{حتا}\,س}$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{جا س}{س} + جتا س}{\frac{جا س}{س} \cdot جتا س}$$

$$= \frac{١ + ١}{١} = ٢$$

⑤ $\lim_{س \to ٠} \frac{جا^{٢} ٣س}{٥س}$

الحل

$$\lim_{س \to ٠} \frac{جا^{٢} ٣س}{٥س} = \lim_{س \to ٠} \left(\frac{جا ٣س}{٥س} \times جا ٣س \right)$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{جا ٣س}{٥س} \times \lim_{س \to ٠} جا ٣س$$

$$= \frac{٣}{٥} \times جا ٠ = \frac{٣}{٥} \times ٠ = ٠$$

⑥ $\lim_{س \to ٠} \frac{جا^{٢} ٣س}{٥س^{٢}}$

الحل

$$\lim_{س \to ٠} \frac{جا^{٢} ٣س}{٥س^{٢}} = \frac{١}{٥} \times \lim_{س \to ٠} \frac{جا^{٢} ٣س}{س^{٢}}$$

$$= \frac{١}{٥} \times \lim_{س \to ٠} \left(\frac{جا ٣س}{س} \right)^{٢}$$

$$= \frac{١}{٥} \times (٣)^{٢}$$

$$= \frac{١}{٥} \times ٩ = \frac{٩}{٥}$$

⑦ $\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٣س^{٢}}{٥س^{٢}}$

الحل

$$\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٣س^{٢}}{٥س^{٢}} = \frac{٣}{٥}$$

لاحظ إذا كان : $ن \in ص^{+}$ فإن :

١ $\lim_{س \to ٠} \frac{جا^{ن} أس}{ب^{ن} س^{ن}} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$

٢ $\lim_{س \to ٠} \frac{جا^{م} أس}{ب س^{ن}} = صفر$

حيث : $ن ، م \in ص^{+}$ ، $م > ن$

٣ $\lim_{س \to ٠} \frac{جا أس^{ن}}{ب س^{ن}} = \frac{أ}{ب}$

مثال ٢

أوجد كلاً مما يأتى

① $\lim_{س \to ٠} \frac{جا^{٢} ٣س}{طا^{٢} ٥س}$

الحل

بالقسمة على $س^{٢}$ بسطاً ومقاماً

$$\lim_{س \to ٠} \frac{جا^{٢} ٣س}{طا^{٢} ٥س} = \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{جا^{٢} ٣س}{س^{٢}}}{\frac{طا^{٢} ٥س}{س^{٢}}}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{\left(\frac{جا ٣س}{س}\right)^{٢}}{\left(\frac{طا ٥س}{س}\right)^{٢}} = \frac{(٣)^{٢}}{(٥)^{٢}} = \frac{٩}{٢٥}$$

② $\lim_{س \to ٠} \frac{س جا ٢س}{جا س طا ٣س}$

الحل

بالقسمة على $س^{٢}$ بسطاً ومقاماً

$$\lim_{س \to ٠} \frac{س جا ٢س}{جا س طا ٣س}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\frac{\text{س}}{\text{س}} \times \frac{\text{جا}\,2\text{س}}{\text{س}}}{\frac{\text{جا}\,\text{س}}{\text{س}} \times \frac{\text{ظا}\,3\text{س}}{\text{س}}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\frac{\text{جا}\,2\text{س}}{\text{س}}}{\frac{\text{جا}\,\text{س}}{\text{س}} \times \frac{\text{ظا}\,3\text{س}}{\text{س}}}$$

$$= \frac{2}{1 \times 3} = \frac{2}{3}$$

③ $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{\text{س}\,\text{ظا}\,5\text{س}}{\text{س}^2 + \text{جا}^2\,3\text{س}}$

الحل

بالقسمة على س² بسطاً ومقاماً

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{س}\,\text{ظا}\,5\text{س}}{\text{س}^2 + \text{جا}^2\,3\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\frac{\text{س}}{\text{س}} \times \frac{\text{ظا}\,5\text{س}}{\text{س}}}{\frac{\text{س}^2}{\text{س}^2} + \frac{\text{جا}^2\,3\text{س}}{\text{س}^2}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\frac{\text{ظا}\,5\text{س}}{\text{س}}}{1 + \left(\frac{\text{جا}\,3\text{س}}{\text{س}}\right)^2} = \frac{5}{1 + (3)^2}$$

$$= \frac{5}{1+9} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

④ $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{2\text{س}^3 + \text{س}\,\text{جا}\,5\text{س}}{\text{س}^4 + \text{جا}^2\,3\text{س}}$

الحل

بالقسمة على س² بسطاً ومقاماً

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{2\text{س}^3 + \text{س}\,\text{جا}\,5\text{س}}{\text{س}^4 + \text{جا}^2\,3\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 0} \frac{2\text{س} + \frac{\text{س}}{\text{س}} \times \frac{\text{جا}\,5\text{س}}{\text{س}}}{\text{س}^2 + \left(\frac{\text{جا}\,3\text{س}}{\text{س}}\right)^2}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 0} \frac{2\text{س} + \frac{\text{س}}{\text{س}} \times \frac{\text{جا}\,5\text{س}}{\text{س}}}{\text{س}^2 + \left(\frac{\text{جا}\,3\text{س}}{\text{س}}\right)^2}$$

$$= \frac{2 \times 0 + 5}{0 + (3)^2} = \frac{0 + 5}{0 + 9} = \frac{5}{9}$$

⑤ $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا}^2\,3\text{س} - \text{جا}\,5\text{س}^2}{4\text{س}^2}$

الحل

بالقسمة على س² بسطاً ومقاماً

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا}^2\,3\text{س} - \text{جا}\,5\text{س}^2}{4\text{س}^2}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\left(\frac{\text{جا}\,3\text{س}}{\text{س}}\right)^2 - \frac{\text{جا}\,5\text{س}^2}{\text{س}^2}}{4}$$

$$= \frac{(3)^2 - 5}{4} = \frac{9-5}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

⑥ $\lim\limits_{\text{س} \to 3} \frac{\text{جا}(3\text{س} - 9)}{2\text{س} - 6}$

الحل

$$\lim_{\text{س} \to 3} \frac{\text{جا}(3\text{س} - 9)}{2\text{س} - 6}$$

$$= \lim_{\text{س}-3 \to 0} \frac{\text{جا}\,3(\text{س} - 3)}{2(\text{س} - 3)} = \frac{3}{2}$$

⑦ $\underset{\text{س}\to\cdot}{\text{نها}} \dfrac{\text{١ − حتا س}}{\text{حا س}}$

الحل

بالقسمة على س بسطاً ومقاماً

$\underset{\text{س}\to\cdot}{\text{نها}} \dfrac{\text{١ − حتا س}}{\text{حا س}}$

$= \underset{\text{س}\to\cdot}{\text{نها}} \dfrac{\dfrac{\text{١ − حتا س}}{\text{س}}}{\dfrac{\text{حا س}}{\text{س}}} = \dfrac{\cdot}{\text{١}}$

⑧ $\underset{\text{س}\to\cdot}{\text{نها}} \dfrac{\text{١ − حتا س}}{\text{طا}^{٢}\text{ ٥س}}$

الحل

بالضرب فى (١ + حتا س) بسطاً ومقاماً

$\underset{\text{س}\to\cdot}{\text{نها}} \dfrac{\text{١ − حتا س}}{\text{طا}^{٢}\text{ ٥س}}$

$= \underset{\text{س}\to\cdot}{\text{نها}} \dfrac{\text{١ − حتا س}}{\text{طا}^{٢}\text{ ٥س}} \times \dfrac{\text{١ + حتا س}}{\text{١ + حتا س}}$

$= \underset{\text{س}\to\cdot}{\text{نها}} \dfrac{\text{١ − حتا}^{٢}\text{ س}}{\text{طا}^{٢}\text{ ٥س}} \times \dfrac{\text{١}}{\text{١ + حتا س}}$

$\because \text{١ − حتا}^{٢}\text{ س} = \text{حا}^{٢}\text{ س}$

$= \underset{\text{س}\to\cdot}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا}^{٢}\text{ س}}{\text{طا}^{٢}\text{ ٥س}} \times \underset{\text{س}\to\cdot}{\text{نها}} \dfrac{\text{١}}{\text{١ + حتا س}}$

بالقسمة على س بسطاً ومقاماً للنهاية الأولى

$= \underset{\text{س}\to\cdot}{\text{نها}} \dfrac{\left(\dfrac{\text{حا س}}{\text{س}}\right)^{٢}}{\left(\dfrac{\text{طا ٥س}}{\text{س}}\right)^{٢}} \times \dfrac{\text{١}}{\text{١ + حتا ٠}}$

$= \dfrac{(\text{١})^{٢}}{(\text{٥})^{٢}} \times \dfrac{\text{١}}{\text{٢}} = \dfrac{\text{١}}{\text{٢٥}} \times \dfrac{\text{١}}{\text{٢}} = \dfrac{\text{١}}{\text{٥٠}}$

⑨ $\underset{\text{س}\to\cdot}{\text{نها}} \dfrac{\text{١ − حتا س + حا ٣س}}{\text{١ − حتا س − حا ٥س}}$

الحل

بالقسمة على س بسطاً ومقاماً

$\underset{\text{س}\to\cdot}{\text{نها}} \dfrac{\text{١ − حتا س + حا ٣س}}{\text{١ − حتا س − حا ٥س}}$

$= \underset{\text{س}\to\cdot}{\text{نها}} \dfrac{\dfrac{\text{١ − حتا س}}{\text{س}} + \dfrac{\text{حا ٣س}}{\text{س}}}{\dfrac{\text{١ − حتا س}}{\text{س}} - \dfrac{\text{حا ٥س}}{\text{س}}}$

$= \dfrac{\text{٠ + ٣}}{\text{٠ − ٥}} = \dfrac{\text{٣}}{\text{−٥}} = \dfrac{\text{−٣}}{\text{٥}}$

⑩ $\underset{\text{س}\to\cdot}{\text{نها}} \dfrac{\text{١ − حتا ٣س}}{\text{حتا}^{٢}\text{ س − ١}}$

الحل

$\because \text{حتا}^{٢}\text{ س − ١} = -\text{ حا}^{٢}\text{ س}$

$\underset{\text{س}\to\cdot}{\text{نها}} \dfrac{\text{١ − حتا ٣س}}{\text{حتا}^{٢}\text{ س − ١}} = \underset{\text{س}\to\cdot}{\text{نها}} \dfrac{\text{١ − حتا ٣س}}{-\text{ حا}^{٢}\text{ س}}$

بالضرب فى (١ + حتا ٣س) بسطاً ومقاماً

$= \underset{\text{س}\to\cdot}{\text{نها}} \dfrac{\text{١ − حتا ٣س}}{-\text{ حا}^{٢}\text{ س}} \times \dfrac{\text{١ + حتا ٣س}}{\text{١ + حتا ٣س}}$

$= \underset{\text{س}\to\cdot}{\text{نها}} \dfrac{\text{١ − حتا}^{٢}\text{ ٣س}}{-\text{ حا}^{٢}\text{ س}} \times \underset{\text{س}\to\cdot}{\text{نها}} \dfrac{\text{١}}{\text{١ + حتا ٣س}}$

$\because \text{١ − حتا}^{٢}\text{ ٣س} = \text{حا}^{٢}\text{ ٣س}$

$= \underset{\text{س}\to\cdot}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا}^{٢}\text{ ٣س}}{-\text{ حا}^{٢}\text{ س}} \times \dfrac{\text{١}}{\text{١ + حتا ٠}}$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{حا}^٢ ٣\text{س}}{-\text{حا}^٢\text{س}} \times \frac{١}{٢}$$

$$= - \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\left(\frac{\text{حا}٣\text{س}}{\text{س}}\right)^٢}{\left(\frac{\text{حا}\text{س}}{\text{س}}\right)^٢} \times \frac{١}{٢}$$

$$= - \frac{(٣)^٢}{(١)^٢} \times \frac{١}{٢} = - \frac{٩}{٢}$$

---

⑪ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}}$ ظتا٣س حا٥س

الحــــل

$$\because \text{ظتا}٣\text{س} = \frac{١}{\text{طا}٣\text{س}}$$

$\therefore$ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}}$ ظتا٣س حا٥س

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{١}{\text{طا}٣\text{س}} \times \text{حا}٥\text{س}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{حا}٥\text{س}}{\text{طا}٣\text{س}}$$

بالقسمة على بسطاً ومقاماً

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{حا}٥\text{س}}{\text{س}}}{\frac{\text{طا}٣\text{س}}{\text{س}}} = \frac{٥}{٣}$$

---

⑫ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}}$ س (قتا٢س − ظتا٣س)

الحــــل

$$\because \text{ظتا}٣\text{س} = \frac{١}{\text{طا}٣\text{س}}$$

،

$$\text{قتا}٢\text{س} = \frac{١}{\text{حا}٢\text{س}}$$

$\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}}$ س (قتا٢س − ظتا٣س)

$= \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}}$ (س قتا٢س − س ظتا٣س)

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{س}}{\text{حا}٢\text{س}} - \frac{\text{س}}{\text{طا}٣\text{س}} \right)$$

بالقسمة على س بسطاً ومقاماً

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \left(\frac{١}{\frac{\text{حا}٢\text{س}}{\text{س}}} - \frac{١}{\frac{\text{طا}٣\text{س}}{\text{س}}} \right)$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{١}{\frac{\text{حا}٢\text{س}}{\text{س}}} - \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{١}{\frac{\text{طا}٣\text{س}}{\text{س}}}$$

$$= \frac{١}{٢} - \frac{١}{٣} = \frac{١}{٦}$$

---

⑬ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}}$ ٦س² قتا٢س ظتاس

الحــــل

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} ٦\text{س}^٢ \times \frac{١}{\text{حا}٢\text{س}} \times \frac{١}{\text{طا}\text{س}}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{٦\text{س}^٢}{\text{حا}٢\text{س}\ \text{طا}\text{س}}$$

بالقسمة على س² وبسطاً ومقاماً

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{٦}{\frac{\text{حا}٢\text{س}}{\text{س}} \times \frac{\text{طا}\text{س}}{\text{س}}}$$

$$= \frac{٦}{٢ \times ١} = ٣$$

$$\text{⑭}\quad \underset{\text{س}\leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{\text{س طتا}^{2}\,\text{٢س}}{\text{قتا ٣س}}$$

الحل

$$\underset{\text{س}\leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{\text{س} \times \frac{1}{\text{طا}^{2}\,\text{٢س}}}{\frac{1}{\text{حا ٣س}}}$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{\text{س حا ٣س}}{\text{طا}^{2}\,\text{٢س}}$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{س}}{\text{س}} \times \frac{\text{حا ٣س}}{\text{س}}}{\frac{\text{طا}^{2}\,\text{٢س}}{\text{س}^{2}}}$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{حا ٣س}}{\text{س}}}{\left(\frac{\text{طا ٢س}}{\text{س}}\right)^{2}} = \frac{3}{(2)^{2}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{⑮}\quad \underset{\text{س}\leftarrow \frac{\pi}{4}}{\text{نها}} \frac{\text{حا}\left(\text{٢س} - \frac{\pi}{2}\right)}{\text{طا}\left(\text{٤س} - \pi\right)}$$

الحل

$$\underset{\text{س}\leftarrow \frac{\pi}{4}}{\text{نها}} \frac{\text{حا ٢}\left(\text{س} - \frac{\pi}{4}\right)}{\text{طا ٤}\left(\text{س} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

بالقسمة على $\left(\text{س} - \frac{\pi}{4}\right)$ بسطاً ومقاماً

$$\underset{\text{س}\leftarrow \frac{\pi}{4}}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{حا ٢}\left(\text{س} - \frac{\pi}{4}\right)}{\text{س} - \frac{\pi}{4}}}{\frac{\text{طا ٤}\left(\text{س} - \frac{\pi}{4}\right)}{\text{س} - \frac{\pi}{4}}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{⑯}\quad \underset{\text{س}\leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{\text{حتا}\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)}{\text{طتا}\left(\frac{\pi}{2} - \text{٣س}\right)}$$

الحل

$$\because \text{حتا}\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right) = \text{حا س}$$

$$\text{طتا}\left(\frac{\pi}{2} - \text{٣س}\right) = \text{طا ٣س}$$

$$\therefore \underset{\text{س}\leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{\text{حتا}\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)}{\text{طتا}\left(\frac{\pi}{2} - \text{٣س}\right)} = \underset{\text{س}\leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{\text{حا س}}{\text{طا ٣س}}$$

بالقسمة على س بسطاً ومقاماً

$$\underset{\text{س}\leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{حا س}}{\text{س}}}{\frac{\text{طا ٣س}}{\text{س}}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{⑰}\quad \underset{\text{س}\leftarrow \frac{\pi}{4}}{\text{نها}} \frac{\text{٢س} - \pi}{\text{حتا س}}$$

الحل

$$\because \text{حتا س} = \text{حا}\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)$$

$$\therefore \underset{\text{س}\leftarrow \frac{\pi}{4}}{\text{نها}} \frac{\text{٢س} - \pi}{\text{حا}\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)}$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow \frac{\pi}{4}}{\text{نها}} \frac{\text{٢}\left(\text{س} - \frac{\pi}{2}\right)}{\text{حا}\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)}$$

بالقسمة على $\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)$ بسطاً ومقاماً

$$= \underset{\text{س}\leftarrow \frac{\pi}{4}}{\text{نها}} \frac{2}{\frac{\text{حا}\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)}{\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)}} = \frac{2}{1} = 2$$

⑱ $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \dfrac{\text{طتا س}}{\pi - ٢\text{س}}$

الحل

$\because \text{طتا س} = \text{طا}\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)$

$\therefore \underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \dfrac{\text{طا}\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)}{٢\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)} = \dfrac{١}{٢}$

⑲ $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا}\ \pi\ \text{س}}{١ - \text{س}}$

الحل

$\because \text{حا}\ \theta = \text{حا}(\pi - \theta)$

$\therefore \text{حا}\ \pi\ \text{س} = \text{حا}(\pi - \pi\text{س})$

$\therefore \underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا}\ \pi\ \text{س}}{١ - \text{س}}$

$= \underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا}(\pi - \pi\text{س})}{١ - \text{س}}$

$= \underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا}\ \pi(١ - \text{س})}{١ - \text{س}} = \pi$

⑳ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{طا}\ (\text{حا}\ ٥\text{س})}{٣\text{س}}$

الحل

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{طا}\ (\text{حا}\ ٥\text{س})}{٣\text{س}}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \left[\dfrac{\text{طا}(\text{حا}\ ٥\text{س})}{\text{حا}\ ٥\text{س}} \times \dfrac{\text{حا}\ ٥\text{س}}{٣\text{س}}\right]$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{طا}(\text{حا}٥\text{س})}{\text{حا}\ ٥\text{س}} \times \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا}\ ٥\text{س}}{٣\text{س}}$

$= ١ \times \dfrac{٥}{٣} = \dfrac{٥}{٣}$

㉑ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{حتا س}}{\text{حتا}\ ٣\text{س}}$

الحل

$\because \text{حتا س} = \text{حا}\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)$

، $\because \text{حتا}\ ٣\text{س} = -\text{حا}\left(\frac{٣\pi}{٢} - ٣\text{س}\right)$

$\therefore \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{حتا س}}{\text{حتا}٣\text{س}} = \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا}\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)}{-\text{حا}\left(\frac{٣\pi}{٢} - ٣\text{س}\right)}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا}\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)}{-\text{حا}٣\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\dfrac{\text{حا}\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)}{\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)}}{\dfrac{-\text{حا}٣\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)}{\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)}}$

$= \dfrac{١}{-٣} = -\dfrac{١}{٣}$

بحث وجود نهاية الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

إذا كانت :

$$د(س) = \begin{cases} ٧س + ٢ \text{ ، } & س < ١ \\ س^{٢} - ٦ \text{ ، } & س \geq ١ \end{cases}$$

فإن الدالة معرفة بقاعدتين على يمين ويسار العدد ١

$د(س) = س^{٢} - ٦$ | $د(س) = ٧س + ٢$

١

لذلك :

يوجد للنهايتين للدالة عند س = ١

- **النهاية اليمنى للدالة :**

$$د(١^{+}) = \underset{س \leftarrow ١^{+}}{نها} د(س) = \underset{س \leftarrow ١^{+}}{نها} (س^{٢} - ٦)$$

$$= ١^{٢} - ٦$$

$$= ١ - ٦ = ٥$$

- **النهاية اليسرى للدالة :**

$$د(١^{-}) = \underset{س \leftarrow ١^{-}}{نها} د(س) = \underset{س \leftarrow ١^{-}}{نها} (٧س + ٢)$$

$$= ٧ \times ١ + ٢ = ٧ + ٢ = ٩$$

ويلاحظ أن :

$$د(١^{+}) \neq د(١^{-})$$

$\therefore \underset{س \leftarrow ١}{نها} د(س)$ ليس لها وجود

نظرية

الدالة د(س) تكون لها نهاية ولتكن ل عندما س ← م إذ وفقط إذا كانت نهايتيها اليمنى واليسرى موجودتين وكل منهما يساوى ل

$\therefore$ **الشروط الواجب توافرها لكى تكون النهاية موجودة** عندما س ← م

❶ $د(م^{+}) = ل$

❷ $د(م^{-}) = ل$

❸ $د(م^{+}) = د(م^{-}) = ل$

ويكون : $\underset{س \leftarrow م}{نها} د(س) = ل$

مثال ١

إذا كانت :

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ \text{ ، } & س \geq ٣ \\ ٣س + ١ \text{ ، } & س < ٣ \end{cases}$$

أوجد : $\underset{س \leftarrow ٣}{نها} د(س)$

الحل

$\because$ الدالة معرفة بقاعدتين مختلفتين على يمين ويسار العدد ٣

$$\because د(٣^{+}) = \underset{س \leftarrow ٣^{+}}{نها} (س^{٢} + ١)$$

$$= ٣^{٢} + ١ = ٩ + ١ = ١٠$$

$$، \because د(٣^{-}) = \underset{س \leftarrow ٣^{+}}{نها} (٣س + ١)$$

$$= ٣ \times ٣ + ١ = ٩ + ١ = ١٠$$

$$\because د(٣^{+}) = د(٣^{-}) = ١٠$$

$$\boxed{\therefore \underset{س \leftarrow ٣}{نها} د(س) = ١٠}$$

١ لإيجاد $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ د(س)$ ليس من الضروري أن تكون الدالة معرفة عند $س = أ$

٢ إذا كانت الدالة معرفة بقاعدة واحدة على يمين ويسار العدد أ فيتم بحث النهاية مباشرة دون بحث النهاية اليمنى واليسرى

مثال ١

إذا كانت:

$$د(س) = \begin{cases} س + ١ \quad ، \quad س < ٢ \\ س - ١ \quad ، \quad س > ٢ \end{cases}$$

أوجد: ١ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ د(س)$

٢ $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}\ د(س)$

٣ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}\ د(س)$

الحل

$د(س) = س + ١$ | $د(س) = س - ١$

٢

١ قاعدة الدالة تتغير على يمين ويسار العدد ٢

∴ يتم بحث النهاية اليمنى واليسرى

$$د(٢^{+}) = \underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}}\ د(س)$$

$$= \underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}}\ (س + ١) = ٢ + ١ = ٣$$

$$د(٢^{-}) = \underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ د(س)$$

$$= \underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ (س - ١) = ٢ - ١ = ١$$

∵ $د(٢^{+}) \neq د(٢^{-})$

∴ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ د(س)$ ليس لها وجود

٢ ∵ قاعدة الدالة لا تتغير على يمين ويسار العدد ٢

∴ $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}\ د(س) = \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}\ (س + ١)$

$= ٣ + ١ = ٤$

٣ ∵ قاعدة الدالة لا تتغير على يمين ويسار العدد صفر

$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}\ د(س) = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}\ (س - ١)$

$= ٠ - ١ = -١$

نهاية الدالة المعرفة على فترة عند أحد طرفيها

إذا كانت الدالة د: معرفة على الفترة المفتوحة:]أ ، ب[أو المغلقة [أ ، ب] فإننا نجد أن الدالة:

١ الدالة معرفة على يمين العدد أ وليست معرفة على يسار العدد أ

∴ نبحث النهاية اليمنى فقط للعدد أ

$$د(أ^{+}) = \underset{س \to أ^{+}}{\text{نهـا}}\ د(س)$$

وكلاً من:

$د(أ^{-}) = \underset{س \to أ^{-}}{\text{نهـا}}\ د(س)$ ، $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ د(س)$

غير موجودتين

② الدالة معرفة على يسار العدد ب وليست معرفة على يمين العدد ب

∴ نبحث النهاية اليسرى فقط للعدد ب

$د(ب^-) = \underset{س \to ب^-}{\text{نهـا}}\ د(س)$

وكلاً من:

$د(ب^+) = \underset{س \to ب^+}{\text{نهـا}}\ د(س)$ ، $\underset{س \to ب}{\text{نهـا}}\ د(س)$

غير موجودتين

أي أن

النهاية عند النقطة الطرفية غير موجودة

ويكون للدالة نهاية من جهة واحدة فقط (يمنى أو يسرى)

مثال ٢

إذا كان:

$$د(س) = \begin{cases} ٢س + ٤ &، -٧ < س < -٣ \\ ٣س + ٧ &، -٣ \le س < ٥ \\ ٥ - س &، ٥ \le س < ٩ \end{cases}$$

فأوجد:

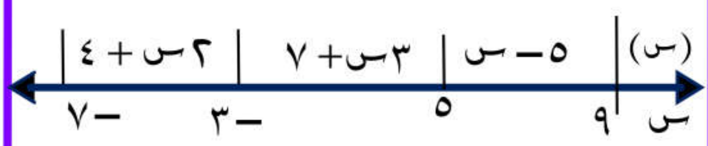
① $\underset{س \to -٣}{\text{نهـا}}\ د(س)$

② $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}}\ د(س)$

③ $\underset{س \to -٧}{\text{نهـا}}\ د(س)$

④ $\underset{س \to ٩}{\text{نهـا}}\ د(س)$

الحل



① $\underset{س \to -٣}{\text{نهـا}}\ د(س)$

∵ تتغير قاعدة الدالة على يمين ويسار العدد -٣

∴ $د(-٣^+) = \underset{س \to -٣^+}{\text{نهـا}}\ (٣س + ٧) = -٩ + ٧$

$= -٢$

، $د(-٣^-) = \underset{س \to -٣^-}{\text{نهـا}}\ (٢س + ٤)$

$= ٢ \times -٣ + ٤ = -٦ + ٤ = -٢$

∵ $د(-٣^+) = د(-٣^-) = -٢$

∴ $\underset{س \to -٣}{\text{نهـا}}\ د(س) = -٢$

② $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}}\ د(س)$

تتغير قاعدة الدالة على يمين ويسار العدد ٥

$د(٥^+) = \underset{س \to ٥^+}{\text{نهـا}}\ (٣س + ٧) = ١٥ + ٧$

$= ٢٢$

∴

، $د(٥^-) = \underset{س \to ٥^-}{\text{نهـا}}\ (٢س + ٤)$

$= ٢ \times ٥ + ٤ = ١٠ + ٤ = ١٤$

$د(٥^+) \ne د(٥^-)$

∴ $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}}\ د(س)$ ليس لها وجود

③ $\underset{س \to -٧}{\text{نهـا}}\ د(س)$

الدالة معرفة على يمين العدد -٧

∴ $د(-٧^+) = \underset{س \to -٧^+}{\text{نهـا}}\ (٢س + ٤)$

$= ٢ \times (-٧) + ٤$

$= -١٤ + ٤ = -١٠$

$د(-٧^-)$ غير موجودة

∴ $\underset{س \to -٧}{\text{نهـا}}\ د(س)$ غير موجودة

٤) $\underset{\text{س}\to ٩}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س})$

الدالة معرفة على يسار العدد ٩ فقط

$\therefore \text{د}(٩^{-}) = \underset{\text{س}\to ٩^{-}}{\text{نهـا}}\ (٥ - \text{س})$

$= ٥ - ٩ = -٤$

$\text{د}(٩^{+})$ غير موجودة

$\therefore \underset{\text{س}\to ٩}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س})$ غير موجودة

مثال ٣

إذا كانت: $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{حا}٣\text{س}}{\text{س}} & ،\ \text{س} > ٠ \\ \text{حتا}٣\text{س} + ٢ & ،\ \text{س} < ٠ \end{cases}$

ابحث وجود: $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س})$

الحل

$\because$ تتغير قاعدة الدالة على يمين ويسار العدد ٠

$\therefore \text{د}(٠^{+}) = \underset{\text{س}\to ٠^{+}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{حا}٣\text{س}}{\text{س}} = ٣$

$،\ \text{د}(٠^{-}) = \underset{\text{س}\to ٠^{-}}{\text{نهـا}}\ (\text{حتا}٣\text{س} + ٢)$

$= \text{حتا}٠ + ٢ = ١ + ٢ = ٣$

$\therefore \text{د}(٠^{+}) = \text{د}(٠^{-}) = ٣$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س})$ موجودة

$،\ \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = ٣$

مثال ٤

إذا كانت: $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{١ - \text{حتا}٢\text{س}}{\text{طا}^{٢}\text{س}} & ،\ \text{س} < ٠ \\ \text{قا}(\pi - \text{س}) + ٣ & ،\ \text{س} > ٠ \end{cases}$

ابحث وجود: $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س})$

الحل

$\text{د}(٠^{-}) = \underset{\text{س}\to ٠^{-}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{١ - \text{حتا}٢\text{س}}{\text{طا}^{٢}\text{س}} = \dfrac{٠}{٠}$

بالضرب في $\dfrac{١ + \text{حتا}٢\text{س}}{١ + \text{حتا}٢\text{س}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠^{-}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{١ - \text{حتا}٢\text{س}}{\text{طا}^{٢}\text{س}} \times \dfrac{١ + \text{حتا}٢\text{س}}{١ + \text{حتا}٢\text{س}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠^{-}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{١ - \text{حتا}^{٢}٢\text{س}}{\text{طا}^{٢}\text{س}} \times \underset{\text{س}\to ٠^{-}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{١}{١ + \text{حتا}٢\text{س}}$

$\because ١ - \text{حتا}^{٢}٢\text{س} = \text{حا}^{٢}٢\text{س}$

$= \underset{\text{س}\to ٠^{-}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{حا}^{٢}٢\text{س}}{\text{طا}^{٢}\text{س}} \times \underset{\text{س}\to ٠^{-}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{١}{١ + \text{حتا}٢\text{س}}$

بالقسمة على $\text{س}^{٢}$ بسطاً ومقاماً

$= \underset{\text{س}\to ٠^{-}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\dfrac{\text{حا}^{٢}٢\text{س}}{\text{س}^{٢}}}{\dfrac{\text{طا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}}} \times \dfrac{١}{٢}$

$= \underset{\text{س}\to ٠^{-}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\left(\dfrac{\text{حا}٢\text{س}}{\text{س}}\right)^{٢}}{\left(\dfrac{\text{طا}\text{س}}{\text{س}}\right)^{٢}} \times \dfrac{١}{٢}$

$= \dfrac{٢^{٢}}{١^{٢}} \times \dfrac{١}{٢} = ٤ \times \dfrac{١}{٢} = ٢$

$\text{د}(٠^{+}) = \underset{\text{س}\to ٠^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{قا}(\pi - \text{س}) + ٣$

$= \text{قا}(\pi - ٠) + ٣$

$= قا\,\pi + ٣ = -١ + ٣ = ٢$

$\therefore\ د(٠^+) = د(٠^-) = ٢$

$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}\, د(س)$ موجودة

، $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}\, د(س) = ٢$

مثال ٥

إذا كانت :

$$د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{١٦} - ١}{٣س^٢ + ٢س - ٥} & ، \quad س < ١ \\[2ex] \dfrac{١ - س}{٢ - \sqrt{س^٢ + ٣}} & ، \quad س > ١ \end{cases}$$

ابحث وجود : $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}\, د(س)$

الحل

$$د(١^-) = \underset{س \to ١^-}{\text{نهـا}} \frac{س^{١٦} - ١}{٣س^٢ + ٢س - ٥} = \frac{٠}{٠}$$

بتحليل المقام إلى عاملين

$(س - ١)(٣س + ٥)$

$$د(١^-) = \underset{س \to ١^-}{\text{نهـا}} \frac{س^{١٦} - ١}{(س - ١)(٣س + ٥)}$$

$$د(١^-) = \underset{س \to ١^-}{\text{نهـا}} \frac{س^{١٦} - ١}{س - ١} \times \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{١}{٣س + ٥}$$

$$= ١٦ \times \frac{١}{٣ \times ١ + ٥}$$

$$= ١٦ \times \frac{١}{٣ + ٥}$$

$$= ١٦ \times \frac{١}{٨} = ٢$$

$$د(١^+) = \underset{س \to ١^+}{\text{نهـا}} \frac{١ - س}{٢ - \sqrt{س^٢ + ٣}} = \frac{٠}{٠}$$

بالضرب في مرافق المقام بسطاً ومقاماً

$$= \underset{س \to ١^+}{\text{نهـا}} \frac{(١ - س)\,(٢ + \sqrt{س^٢ + ٣})}{(٢ - \sqrt{س^٢ + ٣})\,(٢ + \sqrt{س^٢ + ٣})}$$

$$= \underset{س \to ١^+}{\text{نهـا}} \frac{(١ - س)\,(٢ + \sqrt{س^٢ + ٣})}{٤ - س^٢ - ٣}$$

$$= \underset{س \to ١^+}{\text{نهـا}} \frac{(١ - س)\,(٢ + \sqrt{س^٢ + ٣})}{١ - س^٢}$$

$$= \underset{س \to ١^+}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(١ - س)}\,(٢ + \sqrt{س^٢ + ٣})}{\cancel{(١ - س)}\,(١ + س)}$$

$$= \underset{س \to ١^+}{\text{نهـا}} \frac{٢ + \sqrt{س^٢ + ٣}}{١ + س}$$

$$= \frac{٢ + \sqrt{١^٢ + ٣}}{١ + ١}$$

$$= \frac{٢ + ٢}{٢} = \frac{٤}{٢} = ٢$$

$د(١^+) = د(١^-) = ٢$

$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}\, د(س)$ موجودة

، $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}\, د(س) = ٢$

مثال ٦

إذا كانت:

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{أ}\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٥}{\text{س} - ١} & \text{عندما } \text{س} < ١ \\ ٣\text{س} + ٥ & \text{عندما } \text{س} > ١ \end{cases}$$

لها نهاية عند س = ١ أوجد قيمة : أ

الحل

∵ للدالة نهاية عند س = ١

∴ $\text{د}(١^{+}) = \text{د}(١^{-})$

∴ $\underset{\text{س} \leftarrow ١^{-}}{\text{نها}} \dfrac{\text{أ}\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٥}{\text{س} - ١} = \underset{\text{س} \leftarrow ١^{+}}{\text{نها}} (٣\text{س} + ٥)$

∵ النهاية موجودة

∴ (س - ١) أحد عوامل البسط

∴ $\underset{\text{س} \leftarrow ١^{-}}{\text{نها}} \dfrac{(\text{أ}\text{س} + ٥)\cancel{(\text{س} - ١)}}{\cancel{\text{س} - ١}} = ٣ + ٥$

∴ $\underset{\text{س} \leftarrow ١^{-}}{\text{نها}} (\text{أ}\text{س} + ٥) = ٨$

∴ $\text{أ} + ٥ = ٨$ ∴ $\text{أ} = ٣$

مثال ١

إذا كانت الدالة :

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س} - ٢ & ، \text{س} < -١ \\ \text{أ}\text{س} + \text{ب} & ، -١ < \text{س} < ٣ \\ ٦ - \text{س} & ، \text{س} > ٣ \end{cases}$$

لها نهاية عند س = −١ ، س = ٣

فأوجد قيمتى : أ ، ب

الحل

∵ للدالة نهاية عند س = −١

∴ $\text{د}(-١^{+}) = \text{د}(-١^{-})$

∴ $\underset{\text{س} \leftarrow -١^{+}}{\text{نها}} (\text{أ}\text{س} + \text{ب}) = \underset{\text{س} \leftarrow -١^{-}}{\text{نها}} (٣\text{س} - ٢)$

∴ $-\text{أ} + \text{ب} = -٣ - ٢$

∴ $\boxed{-\text{أ} + \text{ب} = -٥}$ ← (١)

، ∵ للدالة نهاية عند س = ٣

∴ $\text{د}(٣^{+}) = \text{د}(٣^{-})$

∴ $\underset{\text{س} \leftarrow ٣^{+}}{\text{نها}} (٦ - \text{س}) = \underset{\text{س} \leftarrow ٣^{-}}{\text{نها}} (\text{أ}\text{س} + \text{ب})$

∴ $٦ - ٣ = ٣\text{أ} + \text{ب}$

∴ $\boxed{٣\text{أ} + \text{ب} = ٣}$ ← (٢)

بطرح (١) من (٢) ينتج أن

$٤\text{أ} = ٨$

∴ $\text{أ} = ٢$ بالتعويض فى (١)

∴ $-٢ + \text{ب} = -٥$

∴ $\text{ب} = -٥ + ٢$

∴ $\text{ب} = -٣$

مثال ١

إذا كانت :

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٥} + \text{س}^{٢} - ٣٦}{\text{س} - ٢} & ، \text{س} > ٢ \\ ١٠\text{س} + \text{س}^{٦} & ، \text{س} < ٢ \end{cases}$$

أوجد : $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}} \text{د}(\text{س})$

∵ $د(٢^+) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{س^٥ + س^٢ - ٣٦}{س - ٢}$

∵ $د(٢^+) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{س^٥ - ٣٢ + س^٢ - ٤}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢^+} \frac{س^٥ - ٣٢}{س - ٢} + \lim_{س \to ٢^+} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢^+} \frac{س^٥ - (٢)^٥}{س - ٢} + \lim_{س \to ٢^+} \frac{س^٢ - (٢)^٢}{س - ٢}$

$= ٥ (٢)^٤ + ٢ (٢)^١$

$= ٥ \times ١٦ + ٤$

$= ٨٠ + ٤$

$= ٨٤$

∵ $د(٢^-) = \lim_{س \to ٢^-} (١٠س + س^٦)$

$= ١٠ \times ٢ + (٢)^٦$

$= ٢٠ + ٦٤$

$= ٨٤$

∴ $د(٢^-) = د(٢^+) = ٨٤$

∴ $\lim_{س \to ٢} د(س) = ٨٤$

الإتصـــال

تعريف تكون الدالة د متصلة عند إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية مجتمعة:

1. الدالة معرفة عند $\text{س} = \text{أ}$
2. $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \text{د}(\text{س})$ لها وجود
3. أن يكون: $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \text{د}(\text{س}) = \text{د}(\text{أ})$

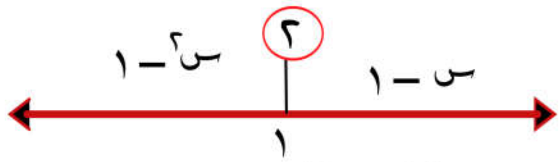
مثال ١

ابحث اتصال الدالة:

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - 1 & ، \ \text{س} > 1 \\ 2 & ، \ \text{س} = 1 \\ \text{س}^2 - 1 & ، \ \text{س} < 1 \end{cases}$$

عند $\text{س} = 1$

الحل



$\because \text{د}(1) = 2$

، $\text{د}(1^+) = \lim\limits_{\text{س} \to 1^+} (\text{س} - 1) = 1 - 1 = 0$

$\text{د}(1^-) = \lim\limits_{\text{س} \to 1^-} (\text{س}^2 - 1) = 1^2 - 1 = 0$

$\because \text{د}(1^+) = \text{د}(1^-) = 0$

$\therefore \lim\limits_{\text{س} \to 1} \text{د}(\text{س}) = 0$

، $\text{د}(1) \neq \lim\limits_{\text{س} \to 1} \text{د}(\text{س})$

$\therefore$ الدالة غير متصلة عند $\text{س} = 1$

مثال ٢

ابحث اتصال الدالة:

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 + 3 & ، \ \text{س} \geq 1 \\ \dfrac{\text{س}^2 + 2\text{س} - 3}{\text{س} - 1} & ، \ \text{س} < 1 \end{cases}$$

عند $\text{س} = 1$

الحل

$\because \text{د}(1) = 1 + 3 = 4$

، $\text{د}(1^+) = \lim\limits_{\text{س} \to 1^+} (\text{س}^2 + 3) = 1^2 + 3 = 4$

، $\text{د}(1^-) = \lim\limits_{\text{س} \to 1^-} \dfrac{\text{س}^2 + 2\text{س} - 3}{\text{س} - 1}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 1^-} \dfrac{\cancel{(\text{س} - 1)}(\text{س} + 3)}{\cancel{\text{س} - 1}}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 1^-} (\text{س} + 3)$

$= 1 + 3 = 4$

$\because \text{د}(1^+) = \text{د}(1^-) = 4$

$\therefore \lim\limits_{\text{س} \to 1} \text{د}(\text{س}) = 4$

، $\because \text{د}(1) = \lim\limits_{\text{س} \to 1} \text{د}(\text{س})$

$\therefore$ الدالة متصلة عند $\text{س} = 1$

مثال ٣

ابحث اتصال الدالة :

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}\,|\text{س}| + ٤ & ، \text{س} \le ٠ \\ \dfrac{|\text{س}|}{\text{س}} + ٣ & ، \text{س} > ٠ \end{cases}$$

عند $\text{س} = $ صفر

الحل

$$\because |\text{س}| = \begin{cases} \text{س} & \text{عندما س} \ge ٠ \\ -\text{س} & \text{عندما س} < ٠ \end{cases}$$

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} \times (-\text{س}) + ٤ & ، \text{س} < ٠ \\ ٤ & ، \text{س} = ٠ \\ \dfrac{\text{س}}{\text{س}} + ٣ & ، \text{س} > ٠ \end{cases}$$

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} -\text{س}^٢ + ٤ & ، \text{س} < ٠ \\ ٤ & ، \text{س} = ٠ \\ ٤ & ، \text{س} > ٠ \end{cases}$$

$\text{د}(٠) = ٤$

، $\text{د}(٠^+) = ٤$

، $\text{د}(٠^-) = \underset{\text{س} \to ٠^-}{\text{نها}} (-\text{س}^٢ + ٤) = ٠ + ٤ = ٤$

$\because \text{د}(٠^+) = \text{د}(٠^-) = ٤$

$\therefore \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}}\ \text{د}(\text{س}) = ٤$

، $\because \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}}\ \text{د}(\text{س}) = \text{د}(٠)$

$\therefore$ الدالة متصلة عند $\text{س} = ٠$

مثال ٤

أوجد قيمة م التي تجعل الدالة

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{١+\text{س}} - \sqrt[٣]{١+\text{س}}}{\text{س}} & ، \text{س} \ne ٠ \\ \text{م} & ، \text{س} = ٠ \end{cases}$$

متصلة عند $\text{س} = ٠$

الحل

$\because \text{د}(٠) = \text{م}$

، $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}}\ \text{د}(\text{س}) = \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{١+\text{س}} - \sqrt[٣]{١+\text{س}}}{\text{س}}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{(١+\text{س})^{\frac{١}{٢}} - (١+\text{س})^{\frac{١}{٣}}}{\text{س}}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{(١+\text{س})^{\frac{١}{٢}} - ١ - (١+\text{س})^{\frac{١}{٣}} + ١}{\text{س}}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{(١+\text{س})^{\frac{١}{٢}} - ١ - [(١+\text{س})^{\frac{١}{٣}} - ١]}{\text{س}}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{(١+\text{س})^{\frac{١}{٢}} - ١}{\text{س}} - \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{(١+\text{س})^{\frac{١}{٣}} - ١}{\text{س}}$

$= \dfrac{١}{٢} - \dfrac{١}{٣} = \dfrac{١}{٦}$

$\because$ الدالة متصلة عند $\text{س} = ٠$

$\therefore \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}}\ \text{د}(\text{س}) = \text{د}(٠)$

$\therefore \text{م} = \dfrac{١}{٦}$

إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة

إذا كانت النهاية موجودة عند $س = أ$ فإنه يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة بأن نجعل :

$$\lim_{س \to أ} د(س) = د(أ)$$

مثال ٥

اعد تعريف الدالة :

$$د(س) = \frac{س^٢ - ١}{س^٢ - ٣س + ٢}$$

بحيث تصبح متصلة عند $س = ١$

الحل

نوجد : $\lim_{س \to ١} د(س)$

$$\lim_{س \to ١} د(س) = \lim_{س \to ١} \frac{س^٢ - ١}{س^٢ - ٣س + ٢}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{\cancel{(س - ١)}(س + ١)}{\cancel{(س - ١)}(س - ٢)}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{س + ١}{س - ٢}$$

$$= \frac{١ + ١}{١ - ٢} = \frac{٢}{-١} = -٢$$

لكى تصبح الدالة متصلة عند $س = ١$

لابد أن : $\lim_{س \to ١} د(س) = د(١)$

$\therefore$ $د(١) = -٢$

$$د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ + ٢س - ٣}{س - ١} & ، \quad س \neq ١ \\ -٢ & ، \quad س = ١ \end{cases}$$

ملحوظة

لايمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة إذا كانت النهاية غير موجودة

مثال ٥

أعد تعريف الدالة :

$$د(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & ، \quad س \geq ٢ \\ \dfrac{س^٢ - ٤}{س - ٢} & ، \quad س < ٢ \end{cases}$$

لتصبح متصلة عند $س = ٢$

الحل

$\because$ $د(٢^+) = \lim_{س \to ٢^+} (س^٢ + ١) = ٢^٢ + ١ = ٣$

، $\because$ $د(٢^-) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$

$$= \lim_{س \to ٢^+} \frac{\cancel{(س - ٢)}(س + ٢)}{\cancel{س - ٢}}$$

$$= \lim_{س \to ٢^+} (س + ٢) = ٢ + ٢ = ٤$$

$\because$ $د(٢^+) \neq د(٢^-)$

$\therefore$ $\lim_{س \to ٢} د(س)$ غير موجودة

$\therefore$ لايمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند $س = ٢$

مثال ٥

اعد تعريف الدالة

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{|\text{س}-٢|}{\text{س}-٢} &، \text{س} \neq ٢ \\ \text{صفر} &، \text{س} = ٢ \end{cases}$$

لتصبح متصلة عند س = ٢

الحل

بإعادة تعريف دالة المقياس

$$\because |\text{س}-٢| = \begin{cases} \text{س}-٢ & \text{عندما س} \geq ٢ \\ -(\text{س}-٢) & \text{عندما س} < ٢ \end{cases}$$

$$\therefore \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}-٢}{\text{س}-٢} & \text{س} > ٢ \\ \text{صفر} & \text{س} = ٢ \\ \dfrac{-(\text{س}-٢)}{\text{س}-٢} & \text{س} < ٢ \end{cases}$$

$$\therefore \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ١ & \text{س} > ٢ \\ \text{صفر} & \text{س} = ٢ \\ -١ & \text{س} < ٢ \end{cases}$$

$$\text{د}(٢^{+}) = ١ \quad ، \quad \text{د}(٢^{-}) = -١$$

$$\therefore \text{د}(٢^{+}) \neq \text{د}(٢^{-})$$

$\therefore$ النهاية غير موجودة

$\therefore$ لايمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة

مثال ٥

اعد تعريف الدالة :

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{٤\,\text{جتا}\,\text{س}}{\pi - ٢\text{س}}$$

متصلة عند $\text{س} = \frac{\pi}{٢}$

الحل

بوضع النهاية على صورة نهاية الدوال المثلثية

$$\lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}} \text{د}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٤\,\text{جتا}\,\text{س}}{\pi - ٢\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٤\,\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - \text{س})}{\pi - ٢\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٤\,\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - \text{س})}{٢(\frac{\pi}{٢} - \text{س})}$$

$$= \frac{٤}{٢} = ٢$$

لكى تصبح الدالة متصلة عند $\text{س} = \frac{\pi}{٢}$

لابد أن يكون : $\text{د}(\frac{\pi}{٢}) = ٢$

إعادة تعريف الدالة كما يلى

$$\therefore \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{٤\,\text{جتا}\,\text{س}}{\pi - ٢\text{س}} &، \text{س} \neq ٢ \\ ٢ &، \text{س} = ٢ \end{cases}$$

بعض انماط الدوال المتصلة

١ الدوال كثيرة الحدود متصلة على ح أو أى فترة جزئية منها

د (س) = س^{٢} − ٢ س + ٣

دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية متصلة على ح

٢ الدالة الكسرية متصلة على ح − {أصفار المقام}

٣ كلاً من : د (س) = جا س

د (س) = جتا س

متصل على ح أو أى مجموعة جزئية منها

٤ الدالة د : د (س) = طا س

متصلة على :

ح − {س : س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن π ، ن $\in$ ص}

مثال ٦

ابحث اتصال الدالة د :

١ د (س) = س^{٢} + ٣ س − ٥

الحل

∵ الدالة د كثيرة حدود

∴ الدالة متصلة على ح

٢ د (س) = $\frac{\text{س} + ٢}{\text{س} - ٣}$

الحل

∵ الدالة د دالة كسر جبرى متصلة على ح − {أصفار المقام}

∴ الدالة متصلة على ح − {٣}

---

٣ د (س) = $\frac{\text{س} + ٢}{\text{س}^{٢} + ٤}$

الحل

∵ د دالة كسرية

∴ الدالة متصلة على ح − {أصفار المقام}

بوضع المقام = ٠ د (س) = ٣ س + ٢

∴ س^{٢} + ٤ = ٠ ∴ س^{٢} = −٤

لايوجد عدد حقيقي مربعه = عدد سالب

∴ ليس للمقام أصفار حقيقية

∴ الدالة متصلة على ح

اتصال دالة على فترة

① إذا كانت الدالة معرفة على فترة مفتوحة]أ، ب[

فإن الدالة تكون متصلة على هذه الفترة

إذا كانت متصلة عند كل نقطة من نقاط هذه الفترة

① إذا كانت الدالة معرفة على الفترة المغلقة [أ، ب]

فإن الدالة تكون متصلة على [أ، ب] إذا كان

① الدالة متصلة على]أ، ب[

② الدالة متصلة من اليمين عند أ

أي أن د(أ) = نهـا (س ← أ+) د(س)

③ الدالة متصلة من اليسار عند ب

أي أن د(ب) = نهـا (س ← ب−) د(س)

مثال ٧

ابحث اتصال الدالة د :

د(س) = { ٣س + ٢ ، −٣ ≤ س < ٢
       { س² + ٤ ، ٢ ≤ س ≤ ٥

على [−٣، ٥]

الحل

الدالة معرفة على الفترة [−٣، ٥]

لبحث اتصال الدالة على هذه الفترة

① نبحث اتصالها على فترات مجالها

]−٣، ٢[،]٢، ٥[

(أ) د(س) = ٣س + ٢

دالة كثيرة حدود متصلة على مجالها

∴ د متصلة على]−٣، ٢[

(ب) د(س) = س² + ٤

دالة كثيرة حدود متصلة على مجالها

∴ د متصلة على]٢، ٥]

② نبحث اتصال الدالة عند النقط التى تتغير عندها قاعدة الدالة مثل عند س = ٢

∵ د(٢) = ٢² + ٤ = ٨

، د(٢+) = نهـا (س ← ٢+) (س² + ٤) = ٢² + ٤ = ٨

، د(٢−) = نهـا (س ← ٢−) (٣س + ٢) = ٦ + ٢ = ٨

∵ د(٢+) = د(٢−) = ٨

∴ نهـا (س ← ٢) د(س) = ٨

∴ د(٢) = نهـا (س ← ٢) د(س)

③ نبحث اتصال الدالة س = −٣ من اليمين

∵ د(−٣) = ٣ × (−٣) + ٢
= −٩ + ٢ = −٧

∵ د(-٣^{+}) = $\underset{س \to -٣^{+}}{\text{نها}}$ (٣س + ٢)
= ٣ × (−٣) + ٢
= −٩ + ٢ = −٧

∴ د(−٣) = $\underset{س \to -٣^{+}}{\text{نها}}$ د(س)

∴ الدالة متصلة من اليمين س = −٣

④ نبحث اتصال الدالة عند س = ٥ من اليسار

∵ د(٥) = $٥^{٢}$ + ٤ = ٢٥ + ٤ = ٢٩
د(٥^{-}) = $\underset{س \to ٥^{-}}{\text{نها}}$ $(س^{٢} + ٤)$ = ٢٥ + ٤ = ٢٩

∵ د(٥) = $\underset{س \to ٥^{-}}{\text{نها}}$ د(س)

∴ الدالة متصلة عند س = ٥ من اليسار

من ① ، ② ، ③ ، ④
نجد أن الدالة متصلة عند كل نقطة من نقاط الفترة [−٣، ٥]

∴ الدالة متصلة على الفترة [−٣، ٥]

ملاحظة

إذا كانت الدالتين د$_{١}$، د$_{٢}$ معرفتين على الفترة: ف =]أ، ب[وكانتا متصلتين على الفترة ف فإن الدوال الآتية تكون متصلة على ف

① د$_{١}$ ± د$_{٢}$

② د$_{١}$ · د$_{٢}$

③ $\frac{د_{١}}{د_{٢}}$ عدا النقط التى يكون عندها د$_{٢}$ = ٠

مثال ٨

ابحث اتصال الدالة د:

① د(س) = س + جا س

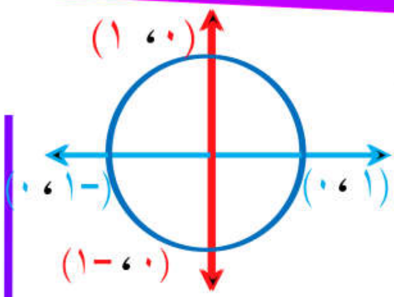
الحل

د$_{١}$(س) = س متصلة علي ح

د$_{٢}$(س) = جا س متصلة على ح

∴ د(س) = س + جا س متصلة على ح

تذكر أن



❶ الحل العام للمعادلة : جاس = ٠

هو : س = ن π

∴ الدالة د : د(س) = $\frac{\text{س} + ١}{\text{جاس}}$

متصلة على ح − {س : س = ن π}

❷ الحل العام للمعادلة : جتاس = ٠

هو : س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن π

∴ الدالة د : د(س) = $\frac{\text{س} + ١}{\text{جتاس}}$

متصلة على ح − {س : س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن π}

❸ الحل العام للمعادلة : جاس = ١

هو : س = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ن π

∴ الدالة د : د(س) = $\frac{\text{س} + ١}{\text{جاس} - ١}$

متصلة على ح − {أصفار المقام}

∴ بوضع المقام = ٠

∴ جاس − ١ = ٠ ∴ جاس = ١

الحل العام لهذه المعادلة هو

س = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ن π

الدالة متصلة على

ح − {س : س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن π}

❹ الحل العام للمعادلة : جتاس = ١

هو : س = ٢ن π

❺ الحل العام للمعادلة : جتاس = −١

هو : س = π + ٢ن π

❻ الحل العام للمعادلة : جاس = −١

هو : س = $\frac{٣\pi}{٢}$ + ٢ن π

تدريب

ابحث اتصال الدالة

د(س) = $\frac{\text{س} + ١}{١ + \text{جاس}}$

مثال ٨

أوجد قيمة ا التي تجعل الدالة :

د(س) = $\frac{\text{س} + ٣}{\text{س}^٢ + \text{ا س} + ٩}$ متصلة على ح

الحل

∵ الدالة متصلة على ح

∴ دالة المقام ليس لها أصفار

∴ المعادلة : س^٢ + ا س + ٩ = ٠

ليس لها جذور حقيقية

∴ المميز = ب^٢ − ٤اجـ < ٠

∴ ا^٢ − ٤ × ١ × ٩ < ٠

∴ ا^٢ − ٣٦ < ٠

ببحث إشارة المقدار نجد أن

ا ∈]−٦ ، ٦[

كراسة

الفاروق

للرسم البيانى

أ/ عشري فاروق
ت/ ٠١١٥٦٢٤٤٤٣١

سلسلة الفاروق

فى

حساب المثلثات

للصف الثانى الثانوي

الفصل الدراسي الأول

القسم العلمي

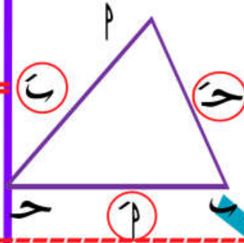
إعداد : أ /عشري فاروق

ت/ ٠١١١٥٦٦٢٤٤٤٣١

قاعدة الجيب

في أي مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها

في $\triangle$ أ ب ح يكون :



$$\frac{أَ}{\text{حا } أ} = \frac{بَ}{\text{حا } ب} = \frac{حَ}{\text{حا } ح}$$

ملاحظات

١) محيط المثلث أ ب ح

= مجموع أطوال أضلاعه

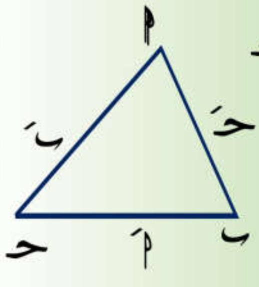
= أَ + بَ + حَ

٢) مساحة المثلث

$= \frac{1}{2}$ طول القاعدة × الإرتفاع

أو $= \frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولي أي ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

$\therefore$ مساحة المثلث أ ب ح



$= \frac{1}{2}$ أَ × بَ حا ح

$= \frac{1}{2}$ أَ × حَ حا ب

$= \frac{1}{2}$ بَ × حَ حا أ

٣) محيط الدائرة $= 2\pi$ نق وحدة طول

٤) مساحة الدائرة $= \pi$ نق^2 وحدة مربعة

٥) في أي مثلث أكبر الأضلاع طولاً يقابل أكبر الزوايا قياساً

وأصغر الأضلاع طولاً هو الذي يقابل أصغر الزوايا قياساً

٦) في أي مثلث يكون :

$$\frac{أَ}{\text{حا } أ} = \frac{بَ}{\text{حا } ب} = \frac{حَ}{\text{حا } ح} = \frac{أَ + بَ + حَ}{\text{حا } أ + \text{حا } ب + \text{حا } ح}$$

$$\frac{أَ}{\text{حا } أ} = \frac{بَ}{\text{حا } ب} = \frac{حَ}{\text{حا } ح} = \frac{\text{محيط } \triangle \text{ أ ب ح}}{\text{حا } أ + \text{حا } ب + \text{حا } ح}$$

مثال ١

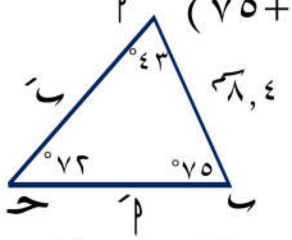
أوجد طول أصغر ضلع في المثلث أ ب ح الذي فيه : ق $(\hat{أ}) = 43°$ ، ق $(\hat{ب}) = 75°$ ، حَ $= 8{,}4$ سم

الحل

$\because$ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة $= 180°$

$\therefore$ ق $(\hat{ح}) = 180° - (43° + 75°)$

$= 72°$



أصغر الأضلاع طولاً هو الذي يقابل أصغر الزوايا قياساً

، $\because \angle$ أ هي أصغر الزوايا قياساً

$\therefore$ أَ هو أصغر الأضلاع طولاً

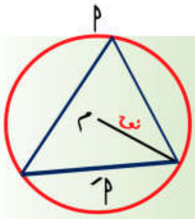
من قاعدة الجيب

$\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{حَ}}{\text{جا ح}}$ ∴ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا } ٤٣°} = \frac{٨,٤}{\text{جا } ٧٢°}$

∴ $\text{أَ} = \frac{٨,٤ \times \text{جا } ٤٣°}{\text{جا } ٧٢°} \simeq ٦,٠٢$ سم

تمرين مشهور

في Δ أ ب ح يكون :



$\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{جا ح}} = ٢ \text{ نق}$

حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أو الخارجة لهذا المثلث

ويكون :

$\boxed{\text{أَ} = ٢ \text{ نق جا أ}}$ ، $\boxed{\text{بَ} = ٢ \text{ نق جا ب}}$

$\boxed{\text{حَ} = ٢ \text{ نق جا ح}}$

$\text{أ} = \frac{\text{أَ}}{٢ \text{ نق}}$ ، $\text{جا ب} = \frac{\text{بَ}}{٢ \text{ نق}}$ ، $\text{جا ح} = \frac{\text{حَ}}{٢ \text{ نق}}$

مثال ١

إذا رمزنا لمساحة المثلث بالرمز Δ فأثبت أن :

$Δ = \frac{\text{أَ بَ حَ}}{٤ \text{ نق}} = ٢ \text{ نق}^٢ \text{ جا أ جا ب جا ح}$

حيث نق نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب ح

الحل

∵ مساحة المثلث = Δ

∴ $Δ = \frac{١}{٢} \text{أَ} \times \text{بَ جا ح}$ ، ∵ $\text{جا ح} = \frac{\text{حَ}}{٢ \text{ نق}}$

∴ $Δ = \frac{١}{٢} \text{أَ} \times \text{بَ} \times \frac{\text{حَ}}{٢ \text{ نق}}$

∴ $\boxed{Δ = \frac{\text{أَ بَ حَ}}{٤ \text{ نق}}}$ ← (١)

، ∵ $Δ = \frac{١}{٢} \text{أَ} \times \text{بَ جا ح}$

، $\boxed{\text{أَ} = ٢ \text{ نق جا أ}}$ ، $\boxed{\text{بَ} = ٢ \text{ نق جا ب}}$

∴ $Δ = \frac{\cancel{١}}{\cancel{٢}}(\cancel{٢} \text{ نق جا أ}) \times (٢ \text{ نق جا ب})$

∴ $\boxed{Δ = ٢ \text{ نق}^٢ \text{ جا أ جا ب جا ح}}$ ← (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

$Δ = \frac{\text{أَ بَ حَ}}{٤ \text{ نق}} = ٢ \text{ نق}^٢ \text{ جا أ جا ب جا ح}$

ملحوظة

(١) في أي Δ أ ب ح يكون :

أَ : بَ : حَ = جا أ : جا ب : جا ح

(٣)

في Δ أ ب ح إذا كان :

ق(∠أ) : ق(∠ب) : ق(∠ح) = ١ : ٢ : ٣

فأثبت أن :

أَ : بَ : حَ = ١ : $\sqrt{٣}$: ٢

الحل

∵ ق($\hat{أ}$) : ق($\hat{ب}$) : ق($\hat{ج}$) = ١ : ٢ : ٣

نفرض أن :

ق($\hat{أ}$) = س ،

، ق($\hat{ب}$) = ٢س

، ق($\hat{ج}$) = ٣س

، ∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ س + ٢س + ٣س = ١٨٠°

∴ ٦س = ١٨٠° ∴ س = ٣٠°

∴ ق($\hat{أ}$) = ٣٠°

، ق($\hat{ب}$) = ٦٠°

، ق($\hat{ج}$) = ٩٠°

، ∵ أَ : بَ : جَ = جا أ : جا ب : جا ج

= جا ٣٠° : جا ٦٠° : جا ٩٠°

= $\frac{١}{٢}$: $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$: ١

= ١ : $\sqrt{٣}$: ٢

٢ تستخدم قاعدة الجيب إذا علم طولا ضلعين وقياس زاوية فى المثلث

مثال ٣

فى △ أ ب ج إذا كان : أَ = ١٠ سم

، ق($\hat{ب}$) = ٤٥° ، ق($\hat{ج}$) = ٦٠° اوجد :

محيط الدائرة الدائرة الخارجة للمثلث أ ب ج

الحل

∴ ق($\hat{أ}$) = ٧٥°

∵ ٢نق = $\frac{أَ}{جا أ}$ ، أَ = ١٠ سم

∴ ٢نق = $\frac{١٠}{جا ٧٥°}$ ≃ ١٠,٣ سم

∴ نق = ٥,٢ سم

∵ محيط الدائرة = ٢πنق

∴ محيط الدائرة = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٥,٢ = ٣٢,٥ سم

٣ تستخدم قاعدة الجيب إذا علم طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث وقياس زاويتين

مثال ٤

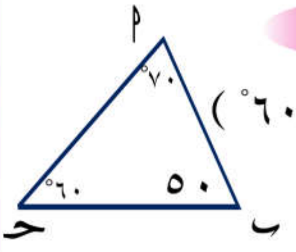
فى △ أ ب ج إذا كان :

ق($\hat{أ}$) = ٧٠° ، ق($\hat{ج}$) = ٦٠°

وطول قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٢٠ سم

أوجد محيطه

الحل



ق($\hat{ب}$) = ١٨٠° − (٧٠° + ٦٠°)

= ٥٠°

$\frac{\text{محيط △ أ ب ج}}{\text{جا أ + جا ب + جا ج}}$ = ٢ نق

∵ ٢ نق = ٢٠ سم

$\frac{\text{محيط △ أ ب ج}}{\text{جا ٧٠° + جا ٥٠° + جا ٦٠°}}$ = ٢٠

∴ محيط △ أ ب حـ = ٢٠ (جا ٧٠° + جا ٥٠° + جا ٦٠°)

∴ محيط △ أ ب حـ ≃ ٥١,٤ سم

حل آخر

∵ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{جا حـ}}$ = ٢نق

∴ أَ = ٢نق جا أ = ٢٠ جا ٧٠° ≃ ١٨,٧٩ سم

، بَ = ٢نق جا ب = ٢٠ جا ٥٠° ≃ ١٥,٣٢ سم

، حَ = ٢نق جا حـ = ٢٠ جا ٦٠° ≃ ١٧,٣٢ سم

∵ محيط △ أ ب حـ = أَ + بَ + حَ

= ١٨,٧٩ + ١٥,٣٢ + ١٧,٣٢

≃ ٥١,٤ سم

٤ تستخدم قاعدة الجيب إذا علم محيط المثلث وقياس زاويتين

مثال ٥

إذا كان محيط △ أ ب حـ = ٢٤ سم

ق($\hat{\text{ب}}$) = ٣٠° ، ق($\hat{\text{حـ}}$) = ٤٨° أوجد : بَ

الحل

∵ ق($\hat{\text{أ}}$) = ١٨٠° − (٣٠° + ٤٨°)

= ١٠٢°

∵ $\frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{محيط △ أ ب حـ}}{\text{جا أ + جا ب + جا حـ}}$

∴ $\frac{\text{بَ}}{\text{جا ٣٠°}} = \frac{\text{٢٤}}{\text{جا ١٠٢° + جا ٣٠° + جا ٤٨°}}$

∴ بَ = $\frac{\text{٢٤ جا ٣٠°}}{\text{جا ١٠٢° + جا ٣٠° + جا ٤٨°}}$ ≃ ٥,٤ سم

مثال ٧

أ ب حـ △ فيه : $\frac{1}{2}$ جا أ = $\frac{1}{3}$ جا ب = $\frac{1}{4}$ جا حـ

ومحيطه ١٨ سم أوجد أطوال أضلاعه

الحل

$\frac{1}{2}$ جا أ = $\frac{1}{3}$ جا ب = $\frac{1}{4}$ جا حـ

∴ $\frac{\text{جا أ}}{2} = \frac{\text{جا ب}}{3} = \frac{\text{جا حـ}}{4}$

∴ جا أ : جا ب : جا حـ = ٢ : ٣ : ٤

∴ أَ : بَ : حَ = ٢ : ٣ : ٤

∴ أَ = ٢ك ، بَ = ٣ك ، حَ = ٤ك

∵ محيط △ أ ب حـ = ١٨ سم

∴ ٢ك + ٣ك + ٤ك = ١٨

∴ ٩ك = ١٨ ∴ ك = ٢

∴ أَ = ٤ سم ، بَ = ٦ سم ، حَ = ٨ سم

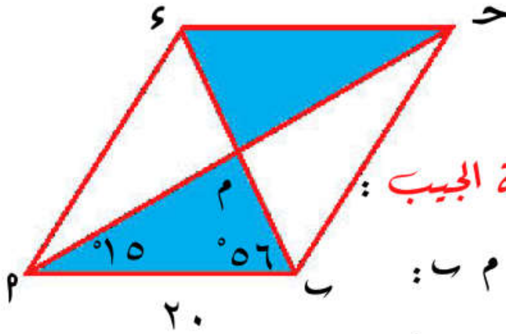
مثـــال ٨

أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه: أ ب = ٢٠ سم ، ق(ب أ̂ حـ) = ١٥° ، ق(أ ب̂ ء) = ٥٦° طول قطره $\overline{\text{ب ء}}$ واحسب كذلك احسب

الحـــل

مساحة متوازى الأضلاع

∵ ق(أ م̂ ب) = ١٨٠° − (٥٦° + ١٥°) = ١٠٩°



من قاعدة الجيب :

فى Δ أ م ب :

∵ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـَ}}{\text{جا حـ}}$

∴ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا ١٥°}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ٥٦}} = \frac{\text{٢٠}}{\text{جا ١٠٩}}$

∴ أَ = $\frac{\text{٢٠ جا ٥٦}}{\text{جا ١٠٩}}$ = ٥,٤٧ سم

∴ ب ء = ٢ × ٥,٤٧ = ١١ سم

مساحة المثلث أ م ب

= $\frac{1}{2}$ × م ب × أ ب جا ب

= $\frac{1}{2}$ × ٥,٤٧ × ٢٠ جا ٥٦° ≃ ٤٥,٣٥ سم²

∵ مساحة متوازى الأضلاع

= ٤ × مساحة المثلث أ م ب

= ٤ × ٤٥,٣٥ = ١٨١,٤ سم²

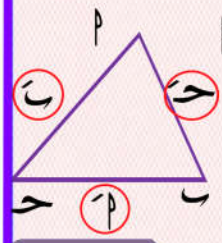
قاعدة جيب التمام

في أي Δ أ ب حـ إذا علم طولا ضلعين وقياس زاوية محصورة
يمكن إيجاد طول الضلع الثالث من قاعدة جيب التمام كما يلي :

$\text{أَ}^2 = \text{بَ}^2 + \text{حـَ}^2 - 2\,\text{بَ}\,\text{حـَ}\ \text{جتا أ}$

$\text{بَ}^2 = \text{أَ}^2 + \text{حـَ}^2 - 2\,\text{أَ}\,\text{حـَ}\ \text{جتا ب}$

$\text{حـَ}^2 = \text{أَ}^2 + \text{بَ}^2 - 2\,\text{أَ}\,\text{بَ}\ \text{جتا حـ}$

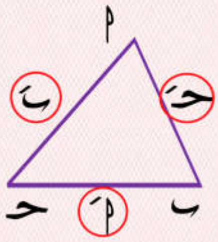


إذا علم أطوال أضلاع المثلث الثلاثة
يمكن إيجاد قياس زاوية كما يلي

$\text{جتا أ} = \dfrac{\text{بَ}^2 + \text{حـَ}^2 - \text{أَ}^2}{2\,\text{بَ}\,\text{حـَ}}$

$\text{جتا ب} = \dfrac{\text{أَ}^2 + \text{حـَ}^2 - \text{بَ}^2}{2\,\text{أَ}\,\text{حـَ}}$

$\text{جتا حـ} = \dfrac{\text{أَ}^2 + \text{بَ}^2 - \text{حـَ}^2}{2\,\text{أَ}\,\text{بَ}}$



مثال ١

أ ب حـ مثلث فيه: أَ = ٧٢,٨ سم
، بَ = ٥٨,٤ سم ، ق(حـ^) = ٦٤,٨°
أوجد حـَ مقرباً الناتج لرقم عشري واحد

الحل

$\text{حـَ}^2 = \text{أَ}^2 + \text{بَ}^2 - 2\,\text{أَ}\,\text{بَ}\ \text{جتا حـ}$

$= (٧٢,٨)^2 + (٥٨,٤)^2 - ٢ \times ٧٢,٨ \times ٥٨,٤\ \text{جتا}\ ٦٤,٨^\circ$

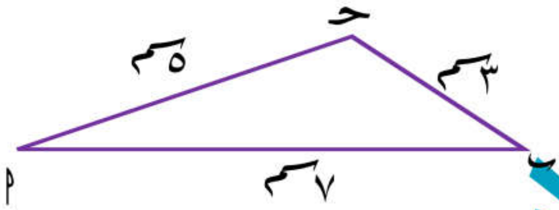
$\simeq ٥٠٨٩,٩٨$

∴ حـَ ≃ ٧١,٣ سم

مثال ٢

في Δ أ ب حـ : أَ = ٣ سم، بَ = ٥ سم
، حـَ = ٧ سم أثبت أن : ق(حـ^) = ١٢٠°

الحل



$\therefore \text{جتا حـ} = \dfrac{\text{أَ}^2 + \text{بَ}^2 - \text{حـَ}^2}{2\,\text{أَ}\,\text{بَ}}$

$\therefore \text{جتا حـ} = \dfrac{(٣)^2 + (٥)^2 - (٧)^2}{٢ \times ٣ \times ٥}$

$= \dfrac{٩ + ٢٥ - ٤٩}{٣٠}$

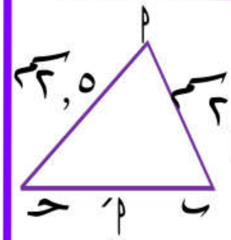
$= \dfrac{٣٤ - ٤٩}{٣٠} = \dfrac{-١٥}{٣٠}$

$\therefore \text{جتا حـ} = \dfrac{-١}{٢}$

∴ ق(حـ^) = ١٢٠°

مثال ٣

أ ب حـ مثلث فيه : جتا أ = $\dfrac{٢}{٥}$
، بَ = ٢,٥ سم ، حـَ = ٢ سم
أثبت أن المثلث متساوى الساقين



أ′² = ب′² + ح′² − ٢ ب′ ح′ حتا أ

= (٢,٥)² + (٢)² − ٢ × ٢,٥ × ٢ × $\frac{٢}{٥}$

= (٢,٥)² + (٢)² − ٢ × ٢

= (٢,٥)² ∴ أ′ = ٢,٥ سم

∴ في Δ أ ب ح : أ′ = ب′

∴ Δ أ ب ح متساوي الساقين

مثال ٤

أ ب ح مثلث فيه:
حا أ : حا ب : حا ح = ٧ : ٨ : ١٢
أوجد قياس أكبر زواياه

الحل

من قاعدة الجيب

∵ أ′ : ب′ : ح′ = حا أ : حا ب : حا ح

، ∵ حا أ : حا ب : حا ح = ٧ : ٨ : ١٢

∴ أ′ : ب′ : ح′ = ٧ : ٨ : ١٢

∴ أ′ = ٧ ك ، ب′ = ٨ ك ، ح′ = ١٢ ك

، ك > ٠

∵ ح′ هو أكبر الأضلاع طولاً

∴ $\hat{ح}$ هي أكبر الزوايا قياساً

∵ حتا ح = $\frac{أ′^2 + ب′^2 − ح′^2}{٢ أ′ ب′}$

∴ حتا ح = $\frac{(٧ك)^2 + (٨ك)^2 − (١٢ك)^2}{٢ × ٧ك × ٨ك}$

= $\frac{٤٩ك^2 + ٦٤ك^2 − ١٤٤ك^2}{١١٢ك^2}$

∴ حتا ح = $\frac{٣١ك^2}{١١٢ك^2}$

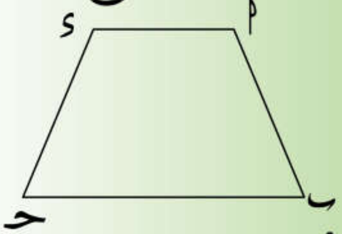
∴ حتا ح = $\frac{٣١}{١١٢}$

∴ ق($\hat{ح}$) = ١٠٦° ٤′ ٦″

ملحوظة

لإثبات أن الشكل أ ب ح ء رباعي دائري

١



∵ ق($\hat{أ}$) + ق($\hat{ح}$) = ١٨٠°

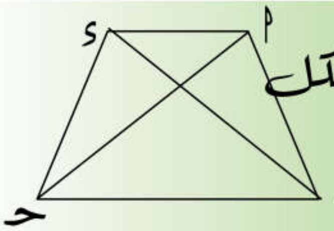
∴ ق($\hat{أ}$) = ١٨٠° − ق($\hat{ح}$)

∴ حتا أ = حتا(١٨٠° − ح)

∴ حتا أ = − حتا ح

∴ حتا أ + حتا ح = ٠

٢



نثبت أن في الشكل زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة ورأساهما رأسان في الشكل متساويتان في القياس

مثل

$\text{ق}(\text{ب}\hat{\text{أ}}\text{ح}) = \text{ق}(\text{ب}\hat{\text{ء}}\text{ح})$

أى : $\text{حتا}(\text{ب}\hat{\text{أ}}\text{ح}) = \text{حتا}(\text{ب}\hat{\text{ء}}\text{ح})$

مثال ٥

أ ب ح ء شكل رباعى فيه : أ ح = ١١ سم

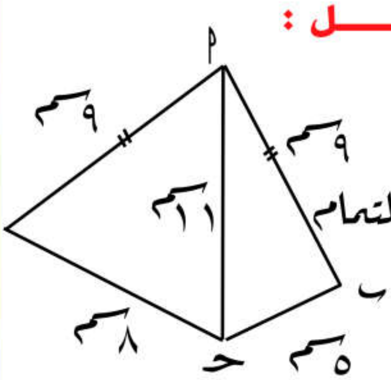
أ ب = أ ء = ٨ سم = ٩ سم ، ب ح = ٥ سم

أثبت أن :

الشكل أ ب ح ء رباعى دائرى

الحل

الحل :



فى Δ أ ب ح

من قاعدة جيب التمام

$\because \text{حتا ب} = \dfrac{\text{أ}'^{٢} + \text{ح}'^{٢} - \text{ب}'^{٢}}{٢\,\text{أ}'\,\text{ح}'}$

$\therefore \text{حتا ب} = \dfrac{(٩)^{٢} + (٥)^{٢} - (١١)^{٢}}{٢ \times ٩ \times ٥}$

$= \dfrac{٨١ + ٢٥ - ١٢١}{٩٠}$

$\therefore \text{حتا ب} = \dfrac{-١}{٦} \longrightarrow$ (١)

فى Δ أ ح ء

$\because \text{حتا ء} = \dfrac{\text{أ}'^{٢} + \text{ح}'^{٢} - \text{ء}'^{٢}}{٢\,\text{أ}'\,\text{ح}'}$

$\therefore \text{حتا ء} = \dfrac{(٩)^{٢} + (٨)^{٢} - (١١)^{٢}}{٢ \times ٨ \times ٥}$

$\therefore \text{حتا ء} = \dfrac{١}{٦} \longrightarrow$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

حتا ب + حتا ء = ٠

∴ الشكل أ ب ح ء رباعى دائرى

مثال ٦

فى Δ أ ب ح إذا كان :

$(\text{أ}' + \text{ب}' + \text{ح}')(\text{أ}' + \text{ب}' - \text{ح}') = \text{ك}\,\text{أ}'\,\text{ب}'$

فأثبت أن : ك ∈]٠ ، ٤[ثم أوجد

$\text{ق}(\hat{\text{ح}})$ عندما ك = ١

الحل

$\because (\text{أ}' + \text{ب}' + \text{ح}')(\text{أ}' + \text{ب}' - \text{ح}') = \text{ك}\,\text{أ}'\,\text{ب}'$

$\therefore (\text{أ}' + \text{ب}')^{٢} - \text{ح}'^{٢} = \text{ك}\,\text{أ}'\,\text{ب}'$

$\therefore \text{أ}'^{٢} + \text{ب}'^{٢} + ٢\,\text{أ}'\,\text{ب}' - \text{ح}'^{٢} = \text{ك}\,\text{أ}'\,\text{ب}'$

$\therefore \text{أ}'^{٢} + \text{ب}'^{٢} - \text{ح}'^{٢} = \text{ك}\,\text{أ}'\,\text{ب}' - ٢\,\text{أ}'\,\text{ب}'$

$\therefore \text{أ}'^{٢} + \text{ب}'^{٢} - \text{ح}'^{٢} = (\text{ك} - ٢)\,\text{أ}'\,\text{ب}'$

$\longrightarrow$ (١)

من قاعدة جيب التمام

$\because \text{أ}'^{٢} + \text{ب}'^{٢} - \text{ح}'^{٢} = ٢\,\text{ب}'\,\text{أ}'\,\text{حتا ح}$

$\longrightarrow$ (٢)

من ① ، ② ينتج أن :

٢ ب َ أ َ جتا حـ = (ك − ٢) أ َ ب َ

القسمة على ٢ ب َ أ َ للطرفين

∴ جتا حـ = $\frac{ك - ٢}{٢}$

، ∵ حـ زاوية في مثلث

∴ حـ ∈] ٠ ، ١٨٠° [

−١ < جتا حـ < ١

∴ −١ < $\frac{ك - ٢}{٢}$ < ١

بالضرب × ٢ للطرفين

∴ −٢ < ك − ٢ < ٢

بإضافة ٢ للأطراف الثلاثة

∴ ٠ < ك < ٤

∴ ك ∈] ٠ ، ٤ [

∵ جتا حـ = $\frac{ك - ٢}{٢}$

عند ك = ١

∴ جتا حـ = $\frac{١ - ٢}{٢}$

∴ جتا حـ = $\frac{-١}{٢}$

∴ ق ($\hat{حـ}$) = ١٢٠°

مثال ٧

في Δ أ ب حـ إذا كان :

ب َ^{٢} = (حـ َ − أ َ) + حـ َ أ َ

أثبت أن : ق ($\hat{ب}$) = ٦٠°

الحل

∵ ب َ^{٢} = (حـ َ − أ َ) + حـ َ أ َ

∴ ب َ^{٢} = حـ َ^{٢} − ٢ حـ َ أ َ + أ َ^{٢} + حـ َ أ َ

∴ حـ َ أ َ = حـ َ^{٢} + أ َ^{٢} − ب َ^{٢} ⟵ ①

من قاعدة جيب التمام

∴ حـ َ^{٢} + أ َ^{٢} − ب َ^{٢} = ٢ حـ َ أ َ جتا ب ⟵ ②

من ① ، ② ينتج أن

حـ َ أ َ = ٢ حـ َ أ َ جتا ب

∴ جتا ب = $\frac{١}{٢}$ ∴ ق ($\hat{ب}$) = ٦٠°

مثال ٧

٢٠ جا أ = ١٥ جا ب = ١٢ جا حـ

أوجد : ق ($\hat{حـ}$)

وإذا كان محيط Δ أ ب حـ = ٢٤ سم

أوجد مساحته

الحل

∵ ٢٠ جا أ = ١٥ جا ب = ١٢ جا حـ

بالقسمة على ٦٠ للطرفين

∴ $\frac{جا أ}{٣}$ = $\frac{جا ب}{٤}$ = $\frac{جا حـ}{٥}$

∴ حا أ : حا ب : حا حـ = ٣ : ٤ : ٥

∴ أطوال الأضلاع تتناسب مع جيوب الزوايا

∴ أَ : بَ : حـَ = ٣ : ٤ : ٥

∴ أَ = ٣ ك ، بَ = ٤ ك ، حـَ = ٥ ك
، ك > ٠ .

∵ حـَ هو أكبر الأضلاع طولاً

∴ حـ^ هي أكبر الزوايا قياساً

∵ حتا حـ = (أَ² + بَ² − حـَ²) / (٢ أَ بَ)

∴ حتا حـ = ((٣ك)² + (٤ك)² − (٥ك)²) / (٢ × ٣ك × ٤ك)

= (٩ك² + ١٦ك² − ١٢٥ك²) / (٢٤ك²)

∴ حتا حـ = ٠ / (٢٤ك²)

∴ حتا حـ = ٠

∴ ق (حـ^) = ٩٠°

∵، محيط Δ أ ب حـ = ٢٤

∴ أَ + بَ + حـَ = ٢٤

∴ ٣ك + ٤ك + ٥ك = ٢٤

∴ ١٢ك = ٢٤ ∴ ك = ٢

∴ أَ = ٦ سم ، بَ = ٨ سم ، حـَ = ١٠ سم

∵ مساحة

= ½ أَ بَ حا حـ

= ½ × ٦ × ٨ حا ٩٠°

= ٢٤ سم²

مثال ٨

Δ أ ب حـ فيه: أَ = ٥ سم ، ق(ب^) = ١٢٠°
ومساحة المثلث أ ب حـ = ١٠√٣ سم²

الحل

∵ مساحة المثلث Δ أ ب حـ = ١٠√٣

∴ ½ أَ حـَ حا ب = ١٠√٣

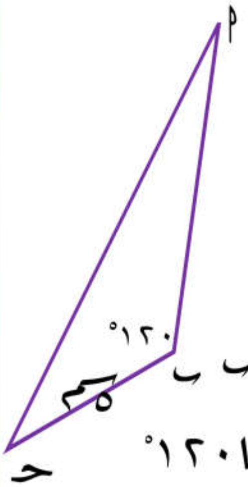
∴ ½ × ٥ × حـَ حا ١٢٠° = ١٠√٣

∴ ½ × ٥ × حـَ × √٣/٢ = ١٠√٣

∴ ٥/٤ × حـَ = ١٠

∴ حـَ = (١٠ × ٤) / ٥

∴ حـَ = ٨ سم



من قاعدة جيب التمام

بَ² = أَ² + حـَ² − ٢ أَ حـَ حتا ب

= ٦٤ + ٢٥ − ٢ × ٨ × ٥ × حتا ١٢٠°

= ٨٩ − ٢ × ٤٠ (−½)

= ٨٩ + ٤٠ = ١٢٩

∴ بَ = ١١,٣٦ سم

∵ حتا أ = (حـَ² + بَ² − أَ²) / (٢ حـَ بَ)

حتا أ = (٢٩ + ٦٤ − ٢٥) / (٢ × √١٢٩ × ٨) = ٧√١٢٩ / ٨٦

∴، ق (أ^) = ٢٢° ٢٥َ

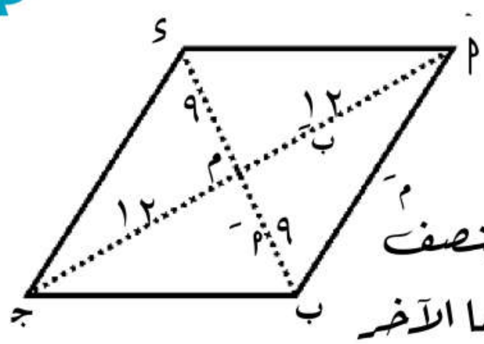
مثال ٩

أ ب حـ د متوازي أضلاع تقاطع قطراه في م، أ حـ = ٢٤ سم، ب د = ١٨ سم

، ق(أ $\hat{م}$ د) = ١١٠°

اوجد طول : $\overline{أب}$ لأقرب سم ؟

الحل



القطران ينصف كلاً منهما الآخر

∴ م أ = م حـ = ١٢ سم

، ب م = م د = ٩

، ق(أ $\hat{م}$ د) = ١١٠°

∴ ق(أ $\hat{م}$ ب) = ١٨٠° − ١١٠° = ٧٠°

في Δ أ م ب

(أ ب)^2 = ٩^2 + ١٢^2 − ٢ × ٩ × ١٢ حتا ٧٠°

≃ ١٥١,١٢

∴ أ ب ≃ ١٢,٣ سم

حـــل المثلث

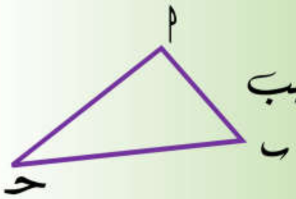
يقصد بحل المثلث إيجاد المجهول من أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا

الحالة الأولى

إذا علم طول ضلع وقياس زاويتين

نوجد قياس الزاوية الثالثة من مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

ثم نستخدم قاعدة الجيب



مثـــال ١

حل المثلث: أ ب حـ الذى فيه:

ق(أ̂) = ٣٨° ٥٢َ ، ق(ب̂) = ٩٦° ٥١َ

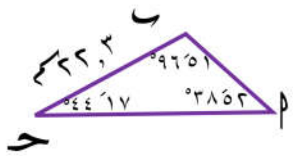
، أَ = ٢٢,٣ سم

الحـــل

∵ ق(حـ̂) = ١٨٠° − [٣٨° ٥٢َ + ٩٦° ٥١َ]

= ٤٤° ١٧َ

من قاعدة الجيب



$$\because \frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـَ}}{\text{جا حـ}}$$

$$\therefore \frac{22.3}{\text{جا } 38^\circ\,52'} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا } 96^\circ\,51'} = \frac{\text{حـَ}}{\text{جا } 44^\circ\,17'}$$

$$\therefore \text{بَ} = \frac{22.3 \times \text{جا } 96^\circ\,51'}{\text{جا } 38^\circ\,52'}$$

∴ بَ ≃ ٣٥,٣ سم

$$، \quad \text{حـَ} = \frac{22.3 \times \text{جا } 44^\circ\,17'}{\text{جا } 38^\circ\,52'}$$

≃ ٢٤,٨ سم

بنفس الطريقة إذا علم محيط المثلث أو طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث وقياسا زاويتين

الحالة الثانية

إذا علم طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما

نستخدم قاعدة جيب التمام

لإيجاد الضلع الثالث

وكذلك لإيجاد قياس زاوية

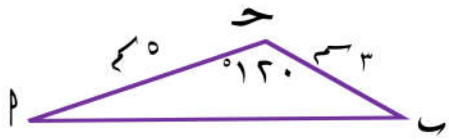
ثم نوجد قياس الزاوية الثالثة من مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة

مثـــال ٢

حل المثلث: أ ب حـ الذى فيه:

، أَ = ٣ سم ، بَ = ٥ سم ، ق(حـ̂) = ١٢٠°

الحـــل



$ح'^2 = ا'^2 + ب'^2 - 2 ب' ا' \text{ جتا } ح$

$= ٩ + ٢٥ - ٢ \times ٣ \times ٥ \text{ جتا } ١٢٠$

$= ٣٤ - ٣٠ \times (\frac{-١}{٢})$

$= ٣٤ + ١٥ = ٤٩$

$ح' = ٧$ سم

نوجد قياس زاوية ب من قاعدة جيب التمام

$\text{جتا } ب = \frac{ا'^2 + ح'^2 - ب'^2}{٢ ا' ح'}$

$\text{جتا } ب = \frac{٩ + ٤٩ - ٢٥}{٢ \times ٣ \times ٧}$

$= \frac{٣٣}{٤٢}$

$ق(\hat{ب}) = ٣٨° \; ١٢' \; ٤٧''$

$ق(\hat{ح}) = ١٨٠° - [٣٨° \; ١٢' \; ٤٧'' + ١٢٠°]$

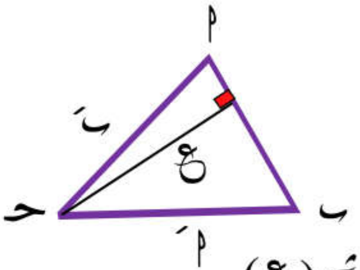
$= ٢١° \; ٤٧' \; ١٣''$

الحالة الثالثة

إذا علم طولا ضلعين وقياس زاوية غير غير محصورة بينهما

في المثلث ا ب ح : إذا علم طول كلاً من : ا َ ، ب َ

وقياس $(\hat{ا})$



نوجد ارتفاع المثلث (ع)

$= ب' \text{ جا } ا$

① إذا كانت الزاوية $\hat{ا}$ حاده فإنه يوجد أربع حالات إذا كان :

ⓐ $ا' < ع$ لا يمكن رسم مثلث

ⓑ $ا' = ع$ يمكن رسم مثلث وحيد قائم الزاوية

ⓒ $ع < ا' < ب'$ يمكن رسم مثلثان

ⓓ $ا' \geq ب'$ فإنه يمكن رسم مثلث وحيد

② إذا كانت الزاوية $\hat{ا}$ منفرجة أو قائمة فإنه يوجد حالتان إذا كان :

ⓐ $ا' \leq ب'$ لا يمكن رسم مثلث

ⓑ $ا' > ب'$ يمكن رسم مثلث وحيد

مثال ٣

بين ما إذا كان لكل مثلث مما يأتى حل وحيد أو حلان أو ليس له حل ثم أوجد عدد الحلول الممكنة

① أ ب حـ مثلث فيه: ق (أ̂) = ١١٢° ، أَ = ٧سم ، بَ = ٤سم

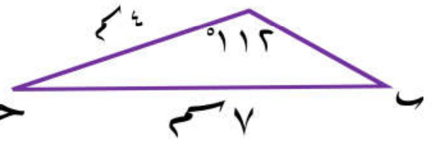
الحل

∵ ق (أ̂) = ١١٢° منفرجة

، ∵ أَ = ٧سم ، بَ = ٤سم

∴ أَ > بَ

∴ يمكن رسم مثلث وحيد



باستخدام قاعدة الجيب

٧ / جا١١٢ = ٤ / جاب ∴ جاب = ٤جا١١٢ / ٧

∴ ق (ب̂) = ٣٢°

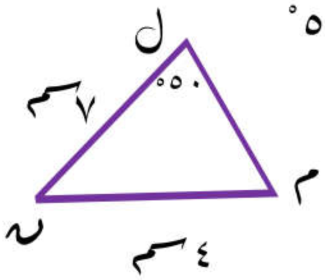
∴ ق (حـ̂) = ١٨٠° − [١١٢° + ٣٢°]

∴ ق (حـ̂) = ٣٦°

② ل م ن مثلث فيه ق (ل̂) = ٥٠° ، لَ = ٤سم ، مَ = ٧سم

الحل

∵ ق (ل̂) = ٥٠° حادة



نوجد: ع = ٧ جا ٥٠°

= ٥,٤

∵ لَ < ع

لايوجد حل للمثلث

أى لا يمكن رسم مثلث بهذه الشروط

③ △ ل م ن الذي فيه ق (∠ل) = ٤٠° ، لَ = ١٢سم ، مَ = ١٥سم

الحل

كراسة

الفاروق

للملاحظات

أ/ عشرى فاروق

ملاحظات

الموضوع | اليوم | التاريخ / / ٢٠

ملاحظات

الموضوع		اليوم		التاريخ	/ / ٢٠

ملاحظات

الموضوع		اليوم		التاريخ	/ / ٢٠

ملاحظات

الموضوع		اليوم		التاريخ	/ / ٢٠

ملاحظات

الموضوع		اليوم		التاريخ	/ / ٢٠

ملاحظات

الموضوع		اليوم		التاريخ	/ / ٢٠

ملاحظات

الموضوع | اليوم | التاريخ ٢٠ / /

ملاحظات

الموضوع | اليوم | التاريخ / / ٢٠

ملاحظات

الموضوع		اليوم		التاريخ	/ / ٢٠

ملاحظات

الموضوع | اليوم | التاريخ / / ٢٠