الفاروق

الفصل الدراسي الأول

الرياضيات

الصف الأول الثانوي

إعداد : أ/عشري فاروق
ت / 01156244431

أولا: الجبــــر

٢ مقدمه عن الأعداد المركبة
Complex Numbers

الحاجة إلي مزيد من الأعداد

سبق أن درسنا مجموعات الأعداد :

أ مجموعة أعداد العد ع :

ع = {.. ، .. ، .. ، .. ، .. ، ....}

ب مجموعة الأعداد الطبيعية ط :

ط = {.. ، .. ، .. ، .. ، .. ، ....}

حـ مجموعة الأعداد الصحيحة ص :

ص = {.... ، .. ، .. ، .. ، .. ، .. ، .. ، .. ، ....}

ء مجموعة الأعداد النسبية ن :

هـ مجموعة الأعداد غير النسبية ن$'$:

و مجموعة الأعداد الحقيقية ح :

وعند حل المعادلة : س^{٢} + ١ = ٠

فإن : س^{٢} = -١

∴ س = ± $\sqrt{-١}$ ∉ ح

∴ م.ح = $\emptyset$

ولحل هذه المعادلة لابد من البحث عن مجموعة جديدة من الأعداد

العدد التخيلى (ت)

العدد التخيلى هو العدد الذى مربعه = -١

أي أن : ت^{٢} = -١

خاصية مهمة : $\sqrt{-أ}$ = $\sqrt{أ}$ ت ، أ ∈ ح$^{+}$

فمثلاً : $\sqrt{-٣}$ = $\sqrt{٣}$ ت

مثال ①

بسط كلاً مما يأتي :

① $\sqrt{-٣}$ = ...

(أ) -$\sqrt{٣}$ (ب) $\sqrt{٣}$ ت (جـ) $\sqrt{٣ت}$ (د) $\sqrt{٣}$

② $\sqrt{-٣}$ × $\sqrt{-٥}$ = ...

(أ) $\sqrt{١٥}$ (ب) -$\sqrt{١٥}$ (جـ) -١٥ (د) ١٥

③ ت^{٢} + ١ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) -٢ (د) صفر

④ $\sqrt{٢}$ × $\sqrt{-٨}$ = ...

(أ) ٤ت (ب) -٤ت (جـ) ٤ (د) -٤

⑤ (-٢ت) × (-٣ت) = ...

(أ) ٦ت (ب) -٦ت (جـ) ٦ (د) -٦

⑥ (-٢ت)^{٢} × (-٣ت)^{٢} = ...

(أ) ٣٦ت (ب) -٣٦ت (جـ) -٣٦ (د) ٣٦

قوى العدد (ت)

① القوى الأساسية

القوى الأساسية أربع قوى وهى :

ت^{١} = ت ، ت^{٢} = -١ ، ت^{٣} = -ت ، ت^{٤} = ١

② القوى الموجبة :

وهى قوى أعلى من القوى الأساسية :

نعلم أن : ت^{٤} = ١

فيكون: ت^{٥} = ت^{٤} × ت^{١} = ١ × ت = ت

بالمثل: $ت^{٧} = ت^{٤} \times ت^{٣} = ١ \times (-ت) = -ت$

وكذلك : $ت^{٨} = ١$

فيكون:

بالمثل: $ت^{١١} = ت^{٨} \times ت^{٣} = ١ \times (-ت) = -ت$

لاحظ :

يمكن قسمة قوى ت الموجبة على ٤ فإذا كان خارج القسمة

٠,٥ / -١	٠,٢٥ / ت
-ت / ٠,٧٥	١ / ٠,٠٠

أ يشتمل على ٠.٢٥ كان الناتج يساوي ت

فمثلاً: لإيجاد قيمة: $ت^{٣٧}$

نوجد: $٣٧ \div ٤ = ٩,٢٥$

$\therefore ت^{٣٧} = ت$

ب يشتمل على ٠.٥ كان الناتج يساوي -١

حـ يشتمل على ٠.٧٥ كان الناتج يساوي -ت

ء عدد صحيح كان الناتج يساوي ١

مثال ②

بسط كلاً مما يأتي :

① $ت^{١٥} = ...$

(أ) ت (ب) -ت (حـ) ١ (ء) -١

---

② $ت^{٧٢} = ...$

(أ) ت (ب) -ت (حـ) ١ (ء) -١

---

③ $ت^{٢٧٥} = ...$

(أ) ت (ب) -ت (حـ) ١ (ء) -١

---

④ $ت^{٤٣} = ...$

(أ) ت (ب) -ت (حـ) ١ (ء) -١

③ القوى السالبة :

إذا كان قوة العدد ت عدداً سالباً فإننا نضيف عدد من مضاعفات العدد ٤ بحيث تصبح القوة موجبة

مثل :

- $ت^{-٩} = ت^{-٩+١٢} = ت^{٣} = -ت$
- $ت^{-٣} = ت^{-٣+٤} = ت^{١} = ت$
- $ت^{-٢٢} = ت^{-٢٢+٢٤} = ت^{٢} = -١$
- $\frac{١}{ت^{٧}} = ت^{-٧} = ت^{-٧+٨} = ت^{١} = ت$

مثال ③

بسط كلاً مما يأتي :

① $ت^{-١١} = ...$

(أ) ت (ب) -ت (حـ) ١ (ء) -١

---

② $ت^{-٢١} = ...$

(أ) ت (ب) -ت (حـ) ١ (ء) -١

---

③ $ت^{-٢٨٧} = ...$

(أ) ت (ب) -ت (حـ) ١ (ء) -١

---

④ $ت^{-١٠٢} = ...$

(أ) ت (ب) -ت (حـ) ١ (ء) -١

---

⑤ $\frac{١}{ت^{١٩}} = ...$

(أ) ت (ب) -ت (حـ) ١ (ء) -١

---

⑥ $\frac{١}{ت^{-٢٧}} = ...$

(أ) ت (ب) -ت (حـ) ١ (ء) -١

---

④ **القوى بوجه عام :**

مثل : $ت^{٤ن} = ١$ حيث $ن \in ص^+$

فيكون:

- $ت^{٤ن+١} = ت^{٤ن} × ت^١ = ١ × ت = ت$
- $ت^{٤ن+٢} = ت^{٤ن} × ت^٢ = ١ × (-١) = -١$
- $ت^{٤ن+٣} = ت^{٤ن} × ت^٣ = ١ × (-ت) = -ت$
- $ت^{٤ن+٤} = ت^{٤ن} × ت^٤ = ١ × ١ = ١$

العدد المركب

هو العدد الذي يمكن كتابته على الصورة : $أ + ب ت$

حيث $أ$ ، $ب$ اعداد حقيقية ، $ت^٢ = -١$

ويسمى : $أ$ الجزء الحقيقى ويسمى : $ب$ الجزء التخيلي

العدد $ع = ٥ + ٣ت$ هو عدد مركب فيه

- الجزء الحقيقي = ٥
- والجزء التخيلي = ٣

مثال ④

① العدد $ع = ٥ + ٣ت$ هو عدد مركب فيه :

- الجزء الحقيقي =.......... ● الجزء التخيلي =..........

---

② العدد $ع = ٤ - ٣ت$ هو عدد مركب فيه :

- الجزء الحقيقي =.......... ● الجزء التخيلي =..........

---

③ العدد $ع = -١٣ت$ هو عدد مركب فيه :

- الجزء الحقيقي =.......... ● الجزء التخيلي =..........

---

④ العدد $ع = ٣$ هو عدد مركب فيه :

- الجزء الحقيقي =.......... ● الجزء التخيلي =..........

ملحوظة ①

إذا كان : $ع = أ + ب ت$ وكان :

① $أ = ٠$ فإن : $ع = ب ت$

ويسمى العدد $ع$ تخيلي صرف

---

② $ب = ٠$ فإن : $ع = أ$

ويسمى العدد $ع$ حقيقى صرف

---

③ $ع = ٠$ فإن : $أ = ٠$ ، $ب = ٠$

مثال ⑤

إذا كان : $(س - ٦) + (٣ص + س) ت = ٠$

فإن : $س + ص =$...... حيث : $س ، ص \in ح$

ⓐ ٤ ⓑ -٤ ⓒ ٨ ⓓ ٦

الحل

$\because ع = ٠ \therefore$ الجزء الحقيقى = ٠ ، الجزء التخيلي = ٠

$\therefore س - ٦ = ٠ \quad \therefore س = ٦$ ← ①

، $٣ص + س = ٠$ من ①

$٣ص + ٦ = ٠ \quad \therefore ٣ص = -٦$

$\therefore ص = -٢$

$ص + س = ٦ + (-٢) = ٤$

مثال ⑥

إذا كان $ع = (س - ٣) + (س + ٤) ت$ عدداً مركباً

فأوجد قيمة $س$ إذا كان : ① $ع$ حقيقي صرف

② $ع$ تخيلي صرف

الحل

① ∵ العدد ع = أ + ب ت

يكون حقيقى صرف عندما ب = ٠

∴ س + ٤ = ٠ ∴ س = -٤

② العدد ع يكون تخيلي صرف عندما أ = ٠

∴ س - ٣ = ٠ ∴ س = ٣

ملحوظة ②

أ جميع الأعداد الحقيقية هى أعداد مركبة فيها الجزء التخيلي = صفر

٣ = ٣ + ٠ ت ، -٥ = -٥ + ٠ ت

ب جميع الأعداد التخيلية هى أعداد مركبة فيها الجزء الحقيقي = صفر

٢ ت = ٠ + ٢ ت ، ٣ ت = ٠ + ٣ ت

تساوي عددين مركبين

إذا كان : ع١ = س١ + ص١ ت

، ع٢ = س٢ + ص٢ ت

عددان مركبان

فإن : ع١ = ع٢ إذا تحقق الشرطان الآتيان معا

① س١ = س٢ ② ص١ = ص٢

- يتساوى الجزءان الحقيقيان فى العددين
- يتساوى الجزءان التخيليان فى العددين

مثال ⑦

إذا كان :

(س + ص) + ٣ ت = ٥ + (س - ص) ت

فإن : س ص = ...

مثال ⑧

إذا كان :

س + ٢ص + ٥ ت = ٤ + (ص + ٢س) ت

فإن : س + ص = ...

العمليات على الأعداد المركبة

أولاً : جمع وطرح الأعداد المركبة

إذا كان : ع١ = س١ + ص١ ت

، ع٢ = س٢ + ص٢ ت عددين مركبين

فإن :

- ع١ + ع٢ = (س١ + س٢) + (ص١ + ص٢) ت
- ع١ - ع٢ = (س١ - س٢) + (ص١ - ص٢) ت

مثال ⑨

أوجد ناتج ما يلي :

① (٣ + ٢ ت) + (١ - ٤ ت)

الحل

(٣ + ٢ ت) + (١ - ٤ ت)

= (٣ + ١) + (٢ - ٤) ت

= ٤ - ٢ ت

② (٢ - ت) - (٣ - ٥ ت)

الحل

= (٢ - ٣) + (-١ - (-٥)) ت

= -١ + (-١ + ٥) ت

= -١ + ٤ ت

ثانياً : ضرب الأعداد المركبة

إذا كان : ع$_1$ = س$_1$ + ص$_1$ ت

، ع$_2$ = س$_2$ + ص$_2$ ت

عددين مركبين

فإن :

ع$_1$ × ع$_2$ = (س$_1$ + ص$_1$ ت)(س$_2$ + ص$_2$ ت)

= س$_1$س$_2$ + س$_1$ص$_2$ ت + ص$_1$س$_2$ ت + ص$_1$ص$_2$ ت^2

∵ ت^2 = -١

= (س$_1$س$_2$ - ص$_1$ص$_2$) + (س$_1$ص$_2$ + ص$_1$س$_2$) ت

مثال ⑩

أوجد قيمتى س، ص التي تحقق

س + ص ت = (٣ + ٢ت)(١ + ٤ت)

الحل

بوضع الطرف الايسر فى أبسط صورة

∵ س + ص ت = (٣ + ٢ت)(١ + ٤ت)

= ٣(١ + ٤ت) + ٢ت(١ + ٤ت)

= ٣ + ١٢ت + ٢ت + ٨ت^2

∵، ت^2 = -١

= ٣ + ١٢ت + ٢ت - ٨

= -٥ + ١٤ت

∴ س + ص ت = -٥ + ١٤ت

∴ س = -٥ ، ص = ١٤

مثال ⑪

أوجد ناتج : (٧ - ت)(٣ + ٢ت)

الحل

(٧ - ت)(٣ + ٢ت)

= ٧(٣ + ٢ت) - ت(٣ + ٢ت)

= ٢١ + ١٤ت - ٣ت - ٢ت^2

= ٢١ + ١١ت + ٢

= ٢٣ + ١١ت

العددان المترافقان

العددان المترافقان هما عددان مركبان يختلفان في إشارة الجزء التخيلى فقط

إذا كان: ع = أ + ب ت فإن مرافقه $\bar{ع}$ = أ - ب ت

ويكـــون:

العدد	٣ - ٢ت	٥ + ت	٣ت	٧	-ت
مرافقه	٣ + ٢ت	٥ - ت	-٣ت	٧	ت

لاحظ:

● العدد + مرافقه = ضعف الجزء الحقيقي

أ + $\cancel{ب ت}$ + أ - $\cancel{ب ت}$ = ٢أ

● العدد - مرافقه = ضعف الجزء التخيلي للعدد

أ + ب ت - (أ - ب ت) = ٢ ب ت

- **العدد × مرافقه**

= مربع الجزء الحقيقي + مربع الجزء التخيلي

(م + ب ت) (م − ب ت) = م^{٢} + ب^{٢}

مثال ⑫

إذا كان: ع + $\bar{\text{ع}}$ = ٦ ، ع − $\bar{\text{ع}}$ = ٤ ت

أوجد: ع

الحل

نفرض أن: ع = م + ب ت ∴ ع + $\bar{\text{ع}}$ = ٢م

∴ ٢م = ٦ ∴ م = ٣

، ع − $\bar{\text{ع}}$ = ٢ ب ت ∴ ٢ب = ٤

∴ ب = ٢

∴ ع = ٣ + ٢ت

مثال ⑬

- ٢ + ٣ت + ٢ − ٣ت = ...
- (٢ + ٣ت) − (٢ − ٣ت) = ...
- (٢ + ٣ت) (٢ − ٣ت) = ...

مثال ⑭

أوجد المقدار الآتي في أبسط صورة:

(١ + ت)^{٢} + (٣ + ٢ ت) (٣ − ٢ت)

الحل

∵ (١ + ت)^{٢} + (٣ + ٢ ت) (٣ − ٢ت)

= ١ + ٢ت + ت^{٢} + (٩ + ٤)

= $\cancel{\text{١}}$ + ٢ت $\cancel{\text{−١}}$ + (١٣)

= ١٣ + ٢ت

قسمة عدددين مركبين

لوضع العدد: $\frac{\text{م + ب ت}}{\text{حـ + ء ت}}$ **على الصورة:** س + ص ت

نضرب فى مرافق المقام بسطا ومقاما وهو (حـ − ء ت)

مثال ⑮

أكتب العدد: $\frac{\text{٥}}{\text{١ + ٢ت}}$ **على الصورة:** م + ب ت

الحل

بالضرب فى مرافق المقام وهو (١ − ٢ت) **بسطا ومقاما**

$$\frac{\text{٥}}{\text{١ + ٢ت}} = \frac{\text{٥ (١ − ٢ت)}}{\text{(١ + ٢ت) (١ − ٢ت)}}$$

$$= \frac{\text{٥ (١ − ٢ت)}}{\text{١ + ٤}}$$

$$= \frac{\cancel{\text{٥}}\text{ (١ − ٢ت)}}{\cancel{\text{٥}}}$$

= ١ − ٢ت

مثال ⑯

أوجد قيمتى س ، ص التى تحقق:

$$\text{٥ + ٣ت} = \frac{\text{س}^{٢}\text{ + ص}^{٢}}{\text{س + صت}}$$

الحل

$$\because \text{٥ + ٣ت} = \frac{\text{س}^{٢}\text{ + ص}^{٢}}{\text{س + صت}}$$

بالضرب فى مرافق المقام بسطا ومقاما

$$\therefore ٥ + ٣\,\text{ت} = \frac{(\text{س}^٢ + \text{ص}^٢)(\text{س} - \text{ص ت})}{(\text{س} + \text{ص ت})(\text{س} - \text{ص ت})}$$

$$\therefore ٥ + ٣\,\text{ت} = \frac{\cancel{(\text{س}^٢ + \text{ص}^٢)}(\text{س} - \text{ص ت})}{\cancel{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢}}$$

$$\therefore ٥ + ٣\,\text{ت} = \text{س} - \text{ص ت}$$

$\therefore$ $\text{س} = ٥$ ، $\text{ص} = -٣$

مثال (١٧)

إذا كان: $\text{س} = \frac{١٣}{٥ - \text{ت}}$ ، $\text{ص} = \frac{٣ + ٢\text{ت}}{١ + \text{ت}}$

أثبت ان: س ، ص مترافقان

ثم أوجد قيمة المقدار: $\text{س}^٢ + \text{س ص} + \text{ص}^٢$

الحل

$$\because \text{س} = \frac{١٣}{٥ - \text{ت}}$$

بالضرب × (٥ + ت) بسطاً ومقاماً

$$\therefore \text{س} = \frac{١٣\,(٥ + \text{ت})}{(٥ - \text{ت})(٥ + \text{ت})}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{١٣\,(٥ + \text{ت})}{٢٥ + ١}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{\cancel{١٣}^{١}\,(٥ + \text{ت})}{\cancel{٢٦}_{٢}}$$

$$\therefore \boxed{\text{س} = \frac{٥}{٢} + \frac{١}{٢}\,\text{ت}} \longrightarrow (١)$$

$$، \because \text{ص} = \frac{٣ + ٢\text{ت}}{١ + \text{ت}}$$

بالضرب × (١ - ت) بسطاً ومقاماً

$$\therefore \text{ص} = \frac{(٣ + ٢\text{ت})(١ - \text{ت})}{(١ + \text{ت})(١ - \text{ت})}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{٣ - ٣\text{ت} + ٢\text{ت} - ٢\text{ت}^٢}{١ + ١}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{٣ - ٣\text{ت} + ٢\text{ت} + ٢}{١ + ١}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{٥ - \text{ت}}{٢}$$

$$\therefore \boxed{\text{ص} = \frac{٥}{٢} - \frac{١}{٢}\,\text{ت}} \longrightarrow (٢)$$

من : (١) ، (٢)

نجد أن س ، ص مترافقان

$$\because \text{س} + \text{ص} = \frac{٥}{٢} + \cancel{\frac{١}{٢}}\text{ت} + \frac{٥}{٢} - \cancel{\frac{١}{٢}}\text{ت}$$

$$\therefore \text{س} + \text{ص} = \frac{٥}{٢} + \frac{٥}{٢} = ٥$$

$$، \text{س ص} = \left(\frac{٥}{٢} + \frac{١}{٢}\text{ت}\right)\left(\frac{٥}{٢} - \frac{١}{٢}\text{ت}\right)$$

$$= \frac{٢٥}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{٢٦}{٤} = ٦{,}٥$$

المقدار $= \text{س}^٢ + \text{س ص} + \text{ص}^٢$

بإضافة : س ص ، - س ص

$\therefore$ المقدار $= \text{س}^٢ + ٢\text{س ص} + \text{ص}^٢ - \text{س ص}$

$$= (\text{س} + \text{ص})^٢ - \text{س ص}$$

$= (٥)^{٢} - ٦,٥$

$= ٢٥ - ٦,٥ = ١٨,٥$

ملحوظة ③

العددان المركبان : ١ + ت ، ١ - ت

مربع أي منهما = عدد تخيلي

- $(١ + ت)^{٢} = \cancel{١} + ٢ت + \cancel{ت^{٢}} = ٢ت$
- $(١ - ت)^{٢} = \cancel{١} - ٢ت + \cancel{ت^{٢}} = -٢ت$

مثال ⑱

① $(١ + ت)^{٤} =$ ....

أ) ٤ت ب) -٤ت جـ) ٤ د) -٤

---

② $(١ + ت)^{٥} =$ ....

أ) ٤ ب) -٤ت جـ) -٤ + ٤ت د) -٤ - ٤ت

مثال ⑲

أوجد قيمة : $(١+ت)^{١٠}$

الحل

$\because (١+ت)^{١٠} = [(١+ت)^{٢}]^{٥}$

$= [٢ت]^{٥}$

$= ٣٢ت^{٥}$

$= ٣٢ت$

حل المعادلات البسيطة في ك

جميع الأعداد الحقيقية هى أعداد مركبة

وجميع الأعداد التخيلية هى اعداد مركبة

مثال ⑳

أوجد فى ك مجموعة الحل للمعادلات الآتية

① $س^{٢} - ٤ = ٠$

الحل

$\because س^{٢} - ٤ = ٠$

$\therefore س^{٢} = ٤$

$\therefore س = \pm\sqrt{٤}$

$\therefore س = \pm ٢$

$\therefore م . ح = \{٢ ، -٢\}$

---

② $س^{٢} + ٤ = ٠$

الحل

$\because س^{٢} + ٤ = ٠$

$\therefore س^{٢} = -٤$

$\therefore س = \pm\sqrt{-٤}$

$\therefore س = \pm\sqrt{٤}\ ت$

$\therefore س = \pm ٢ ت$

$\therefore م.ح = \{٢ت ، -٢ت\}$

③ س^{٢} + ٢س + ٤ = ٠

الحل

∵ أ = ١ ، ب = ٢ ، حـ = ٤

، ∵ س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أحـ}}{٢أ}$

∴ س = $\frac{-٢ \pm \sqrt{٤ - ٤ \times ١ \times ٤}}{٢ \times ١}$

= $\frac{-٢ \pm \sqrt{٤ - ١٦}}{٢}$

= $\frac{-٢ \pm \sqrt{-١٢}}{٢}$

= $\frac{\cancel{-٢} \pm \cancel{٢}\sqrt{٣}\,ت}{\cancel{٢}}$ = $\frac{-١ \pm ١\sqrt{٣}\,ت}{١}$

= -١ ± $\sqrt{٣}$ ت

∴ م.ح = { -١ + $\sqrt{٣}$ ت ، -١ - $\sqrt{٣}$ ت }

تمارين علي مقدمة عن الأعداد المركبة

① (١ + ت)^{٤} (١ + $\frac{١}{ت}$)^{٤} = ...

أ ١٦ت ب -١٦ت حـ ١٦ د -١٦

---

② ت^{ن} + ت$^{ن+١}$ + ت$^{ن+٢}$ + ت$^{ن+٣}$ = ...

أ ت ب - ت حـ صفر د ١

---

③ **إذا كان :**

٦س + ٤ ت ص – ت س + ت – ١٢ = ٠

فإن : س + ٤ص = ...

أ ١ ب ٢ حـ ٣ د ٤

---

④ **إذا كان :**

٢س – ٣ + (٣ص + ١) ت = ٧ + ١٠ت

فإن : س + ص = ...

أ ٣ ب ٥ حـ ٨ د ١١

---

⑤ مرافق العدد (٣ ت – ٤) هو ....

أ ٣ ت + ٤ ب –٣ ت + ٤

حـ –٣ ت – ٤ د ٣ ت – ٤

---

⑥ مرافق العدد (–٨) هو ....

أ ٨ ت ب –٨ ت حـ ٨ د –٨

---

⑦ المعكوس الجمعي للعدد المركب (٤ – ٧ ت) هو ....

أ –٤ – ٧ ت ب ٤ – ٧ ت

حـ –٤ + ٧ ت د ٤ + ٧ ت

⑧ إذا كان : ١٢ + ٣ أ ت = ٤ ب – ٢٧ ت

فإن : أ + ب = ...

(أ) −٦ (ب) ١٢ (ج) −٩ (د) ٦

---

⑨ أى مما يأتى يكون عددًا تخيليًا ؟

(أ) $\sqrt{-٥}$ (ب) π (ج) $\sqrt{٥}$ (د) ت^{٢}

---

⑩ ٥ ت^{٧} + ٤ ت$^{-١}$ = ...

(أ) ٩ ت (ب) −٩ ت (ج) − ت (د) ت

---

⑪ إذا كان : س ، ص عددين حقيقيين وكان :

س + ت ص = ت^{٤٣} + ٣ $\sqrt{-٤}$ فإن : س + ص = ...

(أ) ٣ + ٢ ت (ب) ٥ (ج) ٣ (د) ٥ ت

---

⑫ مرافق العدد (٢ + ت)$^{-١}$ هو ....

(أ) $\frac{٢ + ت}{٥}$ (ب) ٢ − ت (ج) $\frac{٢ - ت}{٥}$ (د) ٢ + ت

---

⑬ ت + ت^{٢} + ت^{٣} + ت^{٤} + ... + ت^{١٠٠} = ...

(أ) ت$^{١ + ٢ + ٣ + ...}$ (ب) صفر

(ج) −١ (د) ت

---

⑭ إذا كانت : أ ، ب ، ج ، د أربعة أعداد صحيحة موجبة متتالية

فإن : ت^{أ} + ت^{ب} + ت^{ج} + ت^{د} = ...

(أ) صفر (ب) −١ (ج) ت (د) ١

---

⑮ أى مما يأتى يعتبر تحليلاً للمقدار : س^{٢} + ٤ ؟

(أ) (س − ٢ ت) (س + ٢ ت) (ب) (س − ٢ ت)^{٢}

(ج) (س − ٢) (س + ٢) (د) (س + ٢)^{٢}

---

⑯ بسط كلاً مما يأتي

① ت^{٩} = ...

② ت^{٦٦} = ...

③ ت^{٣٤٥٧٨} = ...

④ ت$^{-٥٤}$ = ...

⑤ ت$^{٤ن+٢}$ = ...

⑥ ت$^{٧١-٤ن}$ = ...

---

⑰ أوجد ناتج ما يأتي في أبسط صورة

أ (٣ + ٢ت) + (٢ − ٥ت)

ب (٢٠ + ٢٥ت) − (٩ + ت)

ج ($\frac{١}{ت}$ + ٥) + (ت$^{-١}$ + ٤)

د ($\sqrt{٢٠٠}$ + $\sqrt{-١٢}$) + ($\sqrt{٥٠}$ − $\sqrt{٣}$ ت)

و $\frac{٤ - ٦ ت}{٢ت}$

ز $\frac{(١ + ٢ت) (٤ + ت)}{٣ - ٢ت}$

---

⑱ حل كلاً من المعادلات الآتية في ك :

أ ٣ س^{٢} + ١٢ = ٠

ب ٤ س^{٢} + ١٠٠ = ٧٥

---

⑲ أوجد قيمتى س ، ص التي تحقق :

أ س^{٢} − ص^{٢} + (س + ص) ت = ٤ ت

ب (٢ س − ص) + (س − ٢ ص) ت = ٥ + ت

تابع تمارين على الأعداد المركبة

١ أي مما يأتي عدداً تخيلياً ؟

(أ) π (ب) $\sqrt{٥}$ (جـ) $\sqrt{-٥}$ (د) $ت^{٢}$

٢ $ت^{٢٤}$ = ...

(أ) -١ (ب) $ت^{٩}$ (جـ) $-ت$ (د) ١

٣ أبسط صورة للعدد التخيلي $ت^{٣٧}$ هي ......

(أ) ت (ب) -١ (جـ) $-ت$ (د) ١

٤ $ت^{-٢٦}$ = ...

(أ) -١ (ب) $ت^{٩}$ (جـ) $-ت$ (د) ١

٥ $\frac{١}{ت^{١٣٩}}$ = ...

(أ) -١ (ب) $ت^{٩}$ (جـ) $-ت$ (د) ١

٦ $ت^{٢٦} + ت^{٢٨}$ = ...

(أ) $ت^{٥٤}$ (ب) $-ت$ (جـ) صفر (د) ٢

٧ $٥ت^{٧} + ٤ت^{-١}$ = ...

(أ) ٩ت (ب) $-٩ت$ (جـ) ت (د) $-ت$

٨ إذا كان: $ن \in ص$ فإن $ت^{٨ن-٣}$ = ...

(أ) ت (ب) -١ (جـ) $-ت$ (د) ١

٩ المعكوس الجمعي للعدد المركب $(٤-٧ت)$ هو ...

(أ) $٤+٧ت$ (ب) $-٤+٧ت$ (جـ) $-٤-٧ت$ (د) $-٤-٧ت$

١٠ مرافق العدد $(٣ت-٤)$ هو ...

(أ) $٣ت+٤$ (ب) $-٣ت-٤$ (جـ) $-٣ت+٤$ (د) $٣ت-٤$

١١ مرافق العدد $(ت-ت^{٢})$ هو ...

(أ) $١-ت$ (ب) $١+ت$ (جـ) $-ت-١$ (د) $ت-١$

١٢ $(١-ت)^{١٠}$ = ...

(أ) ١٦ت (ب) ٣٢ت (جـ) $-١٦ت$ (د) $-٣٢ت$

١٣ $(١-\sqrt{-١})^{٤} - (١+\sqrt{-١})^{٤}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) -٣ (د) صفر

١٤ أبسط صورة للمقدار: $(٢+ت)(٥+ت)$

هي .....

(أ) $٩+ت$ (ب) $٩+٧ت$ (جـ) $٢+٥ت$ (د) $٤+٢٥ت$

١٥ أبسط صورة للمقدار : $ت^{-٤٥}$ = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) ت (د) $-ت$

١٦ مرافق العدد : $(٢+ت)^{-١}$ هو ....

(أ) $٣+ت$ (ب) $٢-ت$ (جـ) $\frac{٢-ت}{٥}$ (د) $\frac{٢+ت}{٥}$

١٧ $(٢-ت^{٩٥})(٢-ت^{٣٩})(٢-ت^{٨٩})$ = ...

(أ) $-١٠+٥ت$ (ب) $٢٥-٥ت$ (جـ) $١٠+٥ت$ (د) $١٠-٥ت$

١٨ إذا كان : $\frac{أ^{٢}+ب^{٢}}{أ+ب\,ت} = ٤-٣ت$ فإن :

أ + ب = ...

(أ) ٧ (ب) -٧ (جـ) ٧ت (د) ٢٥

٣ تحديد نوع جذري المعادلة التربيعية

عند حل المعادلة : أ س^{٢} + ب س + حـ = ٠ حيث

أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية ، أ ≠ ٠ .

باستخدام القانون العام نحصل على الجذرين :

$$ل = \frac{-ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ حـ}}{٢ أ} \quad ، \quad م = \frac{-ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ حـ}}{٢ أ}$$

ونجد أن كلاً من الجذرين يحتوي على المقدار : $\sqrt{ب^{٢} - ٤ أ حـ}$

ويسمى المقدار ب^{٢} − ٤ أ حـ بمميز المعادلة التربيعية

لأنه يحدد نوع جذري المعادلة التربيعية

فإذا كان المميز

① المميز > ٠ (موجبا)

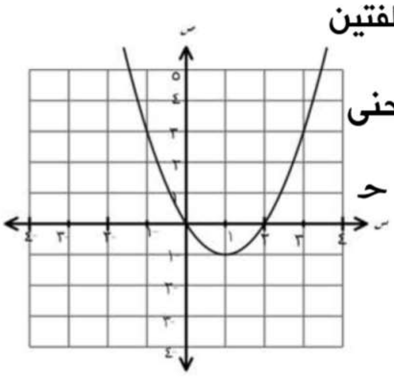
- فإن جذري المعادلة: أ س^{٢} + ب س + حـ = ٠

حقيقيان مختلفان

- ومنحنى الدالة التربيعية المرتبطة بالمعادلة يقطع محور السينات في نقطتين مختلفتين
- الشكل المقابل يمثل منحنى

د(س) = أ س^{٢} + ب س + حـ

∴ ب^{٢} − ٤ أ حـ > ٠



---

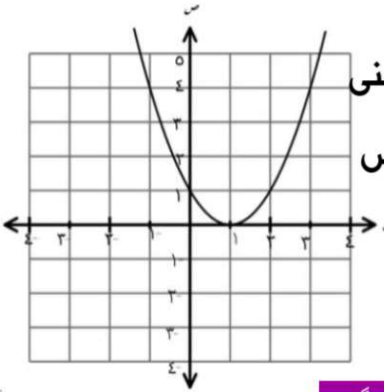
② المميز = ٠

- فإن جذري المعادلة: أ س^{٢} + ب س + حـ = ٠

حقيقيان متساويان وكل منهما يساوي $\frac{-ب}{٢ أ}$

- ومنحنى الدالة التربيعية المرتبطة بالمعادلة يمس محور السينات في نقطة واحدة وهي ($\frac{-ب}{٢ أ}$ ، ٠)
- الجذران مركبان مترافقان
- الشكل المقابل يمثل منحنى دالة تربيعية منحناها يمس محور السينات في نقطة

∴ ب^{٢} − ٤ أ حـ = ٠

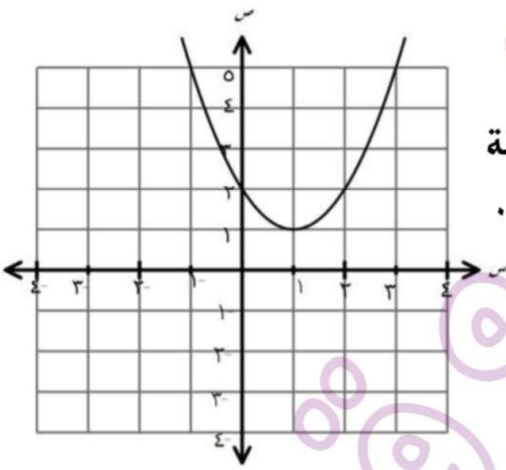


③ المميز < ٠ (سالباً)

- فإن جذري المعادلة: أ س^{٢} + ب س + حـ = ٠

مركبان غير حقيقيين

- وإذا كانت المعاملات حقيقية فإن الجذرين يكونان مركبين مترافقين
- ومنحنى الدالة التربيعية المرتبطة بالمعادلةلا يقطع محور السينات
- الشكل المقابل يمثل منحنى معادلة تربيعية مميزها < ٠



مثال ①

حدد نوع جذري المعادلة : $س + \frac{٩}{س} = ٦$ ، $س \neq ٠$

الحل

∵ $س + \frac{٩}{س} = ٦$ ، $س \neq ٠$ بالضرب فى س للطرفين

∴ $س^٢ + ٩ = ٦س$

∴ $س^٢ - ٦س + ٩ = ٠$

∴ أ = ١ ، ب = -٦ ، ح = ٩

∵ المميز = $ب^٢ - ٤ أ ح$

∴ المميز = $٣٦ - ٤ \times ١ \times ٩ = ٣٦ - ٣٦ = ٠$

∴ الجذران حقيقيان متساويان

وكل من الجذرين = $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{٦}{٢ \times ١} = ٣$

ومنحنى الدالة التربيعية المرتبط بالمعادلة يمس محور السينات فى (٣ ، ٠)

مثال ②

عين نوع جذرى المعادلة التربيعية : $س^٢ - ٣س + ٥ = ٠$

الحل

∵ أ = ١ ، ب = -٣ ، ح = ٥

∴ المميز = $ب^٢ - ٤ أ ح$

∴ المميز = $٩ - ٤ \times ١ \times ٥ = ٩ - ٢٠ = -١١ < ٠$

∴ الجذران مركبان غير حقيقيين

، ∵ المعاملات أعداد حقيقية

∴ الجذران مركبان غير حقيقيين مترافقان

مثال ③

أثبت أن جذرى المعادلة : $٧س^٢ - ١١س + ٥ = ٠$ مركبان غير حقيقيين ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين

الحل

∵ أ = ٧ ، ب = -١١ ، ح = ٥

∴ المميز = $١٢١ - ٤ \times ٧ \times ٥$

$= ١٢١ - ١٤٠ = -١٩ < ٠$

∴ الجذران مركبان غير حقيقيين

∴ $س = \frac{١١ \pm \sqrt{-١٩}}{٢ \times ٧}$

∴ $س = \frac{١١ \pm \sqrt{١٩}\,ت}{١٤}$

∴ $س = \frac{١١}{١٤} \pm \frac{\sqrt{١٩}}{١٤}ت$

∴ م.ح = $\{ \frac{١١}{١٤} + \frac{\sqrt{١٩}}{١٤}ت$ ، $\frac{١١}{١٤} - \frac{\sqrt{١٩}}{١٤}ت \}$

مثال ④

أوجد قيمة أ التى تجعل جذرى المعادلة :

$س^٢ - أس + ٩ = ٠$ متساويين

الحل

∵ أ = ١ ، ب = -أ ، ح = ٩

، ∵ الجذران متساويان

∴ المميز = ٠

∴ $ب^٢ - ٤ أ ح = ٠$

∴ أ² - ٤ × ١ × ٩ = ٠

∴ أ² - ٣٦ = ٠

∴ أ = ± √٣٦

∴ أ = ± ٦

مثال ⑤

إذا كان جذرا المعادلة :

س² − ك س + ٢ك − ٤س + ٥ = ٠

متساويين فأوجد قيمة ك الحقيقية ثم أوجد الجذرين

الحل

نضع المعادلة على الصورة العامة :

∴ س² - (ك + ٤) س + (٢ك + ٥) = ٠

∵ أ = ١ ، ب = - (ك + ٤) ، حـ = (٢ك + ٥)

، ∵ الجذران متساويان

∴ المميز = ٠

∴ (ك + ٤)² − ٤ × ١ × (٢ك + ٥) = ٠

∴ ك² + ~~٨ك~~ + ١٦ - ~~٨ك~~ - ٢٠ = ٠

∴ ك² - ٤ = ٠

∴ ك² = ٤　∴ ك = ± √٤ = ± ٢

عند ك = ٢

∴ المعادلة هى : س² - ٦ س + ٩ = ٠

∴ (س - ٣)² = ٠

∴ س - ٣ = ٠　　∴ س = ٣

∴ الجذران متساويان وكل منهما = ٣

عند ك = - ٢

∴ المعادلة هى : س² - ٢ س + ١ = ٠

(س - ١)² = ٠

∴ س - ١ = ٠　　∴ س = ١

∴ الجذران متساويان وكل منهما = ١

مثال ⑥

أوجد قيم م التى تجعل المعادلة :

(م + ١) س² - ٢ م س + م = ٠

ليس لها جذور حقيقية

الحل

∵ أ = (م + ١) ، ب = - ٢ م ، حـ = م

، ∵ ليس للمعادلة جذور حقيقية

∴ المميز < ٠

∴ ب² - ٤ أ حـ < ٠

∴ (- ٢ م)² - ٤ (م + ١) × م < ٠

∴ ~~٤ م²~~ - ~~٤ م²~~ - ٤ م < ٠

∴ - ٤ م < ٠　　بالقسمة على - ٤ للطرفين

∴ م > ٠　　∴ م ∈] ٠ ، ∞ [

مثال ⑦

أثبت أنه لجميع قيم ا ، ب يكون جذرا المعادلة
(س − ا) (س − ب) = ٥ حقيقيان مختلفان

الحل

نضع المعادلة على الصورة العامة

∴ س^{٢} − ب س − ا س + ا ب = ٥

∴ س^{٢} − (ب + ا) س + (ا ب − ٥) = ٠

المميز = ب^{٢} − ٤ ا ح

المميز = (− ب − ا)^{٢} − ٤ × ١ × (ا ب − ٥)

= ب^{٢} + ٢ ا ب + ا^{٢} − ٤ ا ب + ٢٠

= ب^{٢} − ٢ ا ب + ا^{٢} + ٢٠

= (ب − ا)^{٢} + ٢٠

∵ المقدار (ب − ا)^{٢} ≥ ٠

∴ المميز ≥ ٢٠

∴ جذرا المعادلة حقيقيان مختلفان

ملحوظة ①

إذا كانت المعاملات : ا، ب، ح فى المعادلة
ا س^{٢} + ب س + ح = ٠ أعداداً نسبية
وكان المميز مربعاً كاملاً كان الجذران
حقيقيين نسبيين

مثال ⑧

أثبت أن : جذرا المعادلة :
٣ س^{٢} − ٥ س − ٢ = ٠ أعداد نسبية

الحل

∵ ا = ٣ ، ب = −٥ ، ح = −٢

∴ المعاملات أعداد نسبية

، ∵ المميز = ب^{٢} − ٤ ا ح

= ٢٥ − ٤ × ٣ × (−٢)

= ٢٥ + ٢٤ = ٤٩

= (٧)^{٢}

= مربع كامل

∴ الجذران حقيقيان نسبيان

مثال ⑨

إذا كان : ل ، م عددين نسبيين فأثبت أن جذرى
المعادلة : ل س^{٢} + (ل − م) س − م = ٠
عددين نسبيان

الحل

∵ ا = ل ، ب = (ل − م) ، ح = −م

، ل ، م أعداد نسبية

∴ المعاملات أعداد نسبية

، ∵ المميز = ب^{٢} − ٤ ا ح

= (ل − م)^{٢} − ٤ × ل × (− م)

$= ل^2 - 2ل م + م^2 + 4 ل م$

$= ل^2 + 2 ل م + م^2 = (ل + م)^2$

= مربع كامل

∴ الجذران نسبيان

مثال (١٠)

أوجد قيم العدد الحقيقى ك التى تحقق أن المعادلة : $(ك - 2) س^2 - 2 ك س + ك = 0$ لهاجذران مركبان غير حقيقيين

الحل

∵ $ا = (ك - 2)$ ، $ب = -2 ك$ ، $حـ = ك$

∵ الجذران نسبيان

، المميز $= ب^2 - 4 ا حـ$

∴ المميز $= 4 ك^2 - 4 \times (ك - 2) \times ك$

$= \cancel{4 ك^2} - \cancel{4 ك^2} + 8 ك = 8 ك$

∵ الجذران مركبان غير حقيقيين

∴ المميز < 0 ∴ $8 ك < 0$

∴ $ك < 0$

∴ $ك \in]-\infty ، 0[$

ملحوظة (٢)

(١) إذا كان الجذران حقيقيين فإن المميز ≥ 0

(٢) إذا كان الجذران مركبين مترافقين فإن المميز < 0

تمارين علي تحديد نوع جذري المعادلة التربيعية

(١) المعادلة: $(س - 3)^2 + (س - 4)^2 = 0$ لها ......

ا جذران حقيقيان غير متساويان ب جذران نسبيان

حـ جذران حقيقيان متساويان ء جذران مركبان غير حقيقيين

---

(٢) جذرا المعادلة : $س^2 + ك = 0$ حيث $ك > 0$ يكونان ......

ا حقيقيان مختلفان ب نسبيان

حـ حقيقيان متساويان ء مركبان غير حقيقيان

---

(٣) جذرا المعادلة : $س^2 - 2\sqrt{5} س + 1 = 0$ يكونان ....

ا غير حقيقيين. ب حقيقيين متساويين.

حـ حقيقيين وغير نسبيين. ء حقيقيين نسبيين.

---

(٤) إذا كان : $ا س^2 + ب س + حـ = 0$ ، $ا \in ح^*$ ، $ب \in ح$ ، $حـ \in ح$ وكان $(ب^2 - 4 ا حـ)$ غير موجب فإن جذرى المعادلة يكونان ....

ا مركبين مترافقين. ب حقيقيين مختلفين.

حـ متساويين. ء غير حقيقيين.

---

(٥) إذا كان للمعادلة : $س^2 - 2\sqrt{2} س + ا = 0$ جذران مركبان مترافقان فإن : $ا \in$ ....

ا $]-\infty ، 2[$ ب $]2 ، \infty[$

حـ $]2 ، \infty[$ ء $[-2 ، 2]$

---

⑥ حدد نوع جذري كل معادلة من المعادلات الأتية :

أ) $س^٢ - ٢س + ٥ = ٠$

ب) $-س^٢ + ٥س - ٣٠ = ٠$

ج) $س^٢ - ١٠س + ٢٥ = ٠$

د) $س(س - ٢) = ٥$

هـ) $س + \frac{٩}{س} = ٦$

و) $(س - ١١) - س(س - ٦) = ٠$

ز) $(س + ٢)^٢ + ٥ = ٠$

ح) $(س - ١)(س - ٧) = ٢(س - ٣)(س - ٤)$

ط) $\frac{س}{س + ١} + \frac{س}{س - ١} = ٣$

---

⑦ أوجد قيمة ك فى الحالات الآتية :

أ) **إذا كان جذرا المعادلة :** $س^٢ + ٤س + ك = ٠$

حقيقيين مختلفين

ب) **إذا كان جذرا المعادلة :** $س^٢ = ك + ٢$

حقيقيين مختلفين

ج) **إذا كان جذرا المعادلة :** $ك س^٢ - ٨س + ١٦ = ٠$

مركبين وغير حقيقيين

---

⑧ إذا كان : ل ، م عددين نسبيين **فأثبت أن جذرى المعادلة :**

$ل س^٢ + (ل - م)س - م = ٠$ عددان نسبيان.

---

⑨ أثبت أنه لجميع قيم أ الحقيقية ماعدا (أ = ٢) يكون للمعادلة : $(أ - ١)س^٢ - أس + ١ = ٠$

جذران حقيقيان مختلفان

---

⑩ إذا كان : أ ، ب عددين نسبيين فأثبت أن جذري المعادلة:

$س^٢ - ٢أ^٣ س + أ^٦ - ب^٦ = ٠$ عددان نسبيان

---

⑪ أوجد قيم العدد الحقيقي م التى تحقق أن المعادلة :

$(م - ١)س^٢ - ٢م س + م = ٠$

ليس لها جذور حقيقية

---

⑫ إذا كان للمعادلة : $س^٢ = ك - ٢$ **جذران تخيليان مختلفان فإن ك ٢**

أ) $>$ ب) $<$ ج) $\leq$ د) $\geq$

---

⑬ جذرا المعادلة : $س^٢ + س + جـ = ٠$ **حقيقيان مختلفان إذا كان ....**

أ) $جـ > \frac{١}{٤}$ ب) $جـ > ٤$ ج) $جـ < \frac{١}{٤}$ د) $جـ < ٤$

---

⑭ إذا كان للمعادلة : $٢س^٢ - ١٢س + ك = ٠$ **جذران متساويان فإن ك = ...**

أ) ٩ ب) ١٢ ج) ١٨ د) ٦

---

⑮ إذا كان جذرا المعادلة : $أس^٢ + ب = ٠$ حقيقيين ومختلفين فإن : ....

أ) $أب > ٠$ ب) $أ = ٠$ ج) $أب < ٠$ د) $أ > ٠ ، ب < ٠$

$\therefore$ $ل = \frac{-ب}{٣أ}$ ⟵ (١)

$\because$ حاصل ضرب الجذرين $= \frac{جـ}{أ}$

$\therefore$ $ل \times ٢ل = \frac{جـ}{أ}$

$\therefore$ $٢ل^{٢} = \frac{جـ}{أ}$ ⟵ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢)

$٢\left(\frac{-ب}{٣أ}\right)^{٢} = \frac{جـ}{أ}$

$\therefore$ $٢\left(\frac{ب^{٢}}{٩أ^{٢}}\right) = \frac{جـ}{أ}$

بالضرب فى $٩أ^{٢}$ للطرفين

$\therefore$ $٢ب^{٢} = \frac{جـ}{أ}\ ٩أ^{٢}$

$\therefore$ $٢ب^{٢} = ٩\ أ\ جـ$

وهذا هو الشرط اللازم لكى يكون أحد جذرى المعادلة: $أس^{٢} + ب\ س + جـ = ٠$ ضعف الجذر الآخر

مثال (١٥)

أوجد قيمة أ التى تجعل أحد جذرى المعادلة :

$س^{٢} - أ\ س + ٢١ = ٠$

يزيد عن ضعف الآخر بمقدار ١

الحل

....
....
....
....
....
....
....
....

تمارين على العلاقة بين جذري المعادلة التربيعية ومعاملات حدودها

(١) إذا كان : ل ،م هما جذرى المعادلة التربيعية:

$س^{٢} - ٥س + ٦ = ٠$ **فإن قيمة:** $\frac{١}{ل} + \frac{١}{م} = ...$

(أ) $\frac{٥}{٦}$ (ب) $\frac{-٥}{٦}$ (جـ) $\frac{-٦}{٥}$ (د) -٣٠

---

(٢) المعادلة التربيعية التي جذراها -٩ ، -٨ فيأبسط صورة هي ....

(أ) $س^{٢} + ١٧س + ٧٢ = ٠$

(ب) $س^{٢} - ١٧س + ٧٢ = ٠$

(جـ) $س^{٢} + ٧٢س + ١٧ = ٠$

(د) $س^{٢} + ١٧س - ٧٢ = ٠$

---

(٣) إذا كان : -٥ ، -٢ هما جذري المعادلة :

$س^{٢} + ب س + جـ = ٠$ **فإن قيمة ب، جـ هي..........**

(أ) ب = ١٠ ، جـ = ٧ (ب) ب = -٧، جـ = ١٠

(جـ) ب = -٧ ، جـ = -١٠ (د) ب = ٧ ، جـ = ١٠

---

(٤) إذا كان : ٤ أحد جذري المعادلة :

$س^{٢} + أ س + ٢٨ = ٠$

فإن قيمة أ ، الجذر الآخر هي ....

(أ) أ = ١١ ، الجذر الآخر = -٧

(ب) أ = -١١ ، الجذر الآخر = ٧

(جـ) أ = ١١ ، الجذر الآخر = -٧

(د) أ = ١١ ، الجذر الآخر = ٧

---

(٥) إذا كان جذرا المعادلة: ٦ س^{٢} - م س + ٢٥ = ٠
موجبين والنسبة بينهما؟ : ٣ فأوجد قيمة م

(أ) $\frac{٢٥}{٦}$ (ب) ٣٠ (ج) ٢٥ (د) $\frac{١٢٥}{٦}$

---

(٦) إذا كان : ل ، (٣ - ل) هما جذرا المعادلة :
س^{٢} - أ س - ٨ = ٠ فإن : أ = ...

(أ) ٨ (ب) -٨ (ج) -٣ (د) ٣

---

(٧) إذا كان أحد جذرى المعادلة :
س^{٢} - (ب - ٣) س + ٥ = ٠ معكوسًا جمعيًا للآخر
فإن : ب = ...

(أ) ٥ (ب) -٥ (ج) -٣ (د) ٣

---

(٨) إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة :
(ك - ٢) س^{٢} - ٦ س + ١٢ = ٠ هو ٣ فإن : ك = ...

(أ) صفر (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ١٨

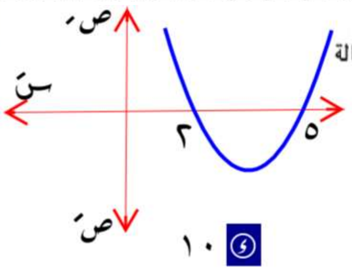
---

(٩) إذا كان أحد جذرى المعادلة :
٣ س^{٢} - (ك + ٢) س + ك^{٢} + ٢ ك = ٠
معكوسًا ضربيًا للجذر الآخر فإن : ك = ...

(أ) ٣ أ، -١ (ب) -٣ أ، ١ (ج) -٣ أ، -١ (د) ٣ أ، ١

---

(١٠) إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة
د : د(س) = أ س^{٢} + ب س + ح ،
فإن : $\frac{ب + ح}{أ}$ = ...



(أ) ٣ (ب) ٧ (ج) ٥ (د) ١٠

---

(١١) حاصل ضرب جذور المعادلات أ س^{٢} + ب س + ح = ٠
، ب س^{٢} + ح س + أ = ٠ ، ح س^{٢} + أ س + ب = ٠ .
يساوي ....

(أ) أ ب ح (ب) ١ (ج) -١ (د) صفر

---

(١٢) قيم ك التي تجعل أحد جذري المعادلة
٤ س^{٢} - ٨ س + ك = ٠ يساوي مربع الجذر الآخر هى ...

(أ) -٤ ، ٨ (ب) ٤ ، -٨ (ج) ٤ ، -٣٢ (د) -٤ ، ٣٢

---

(١٣) إذا كان : ل ، م هما جذري المعادلة :

س^{٢} + ١٤ س + ٦ = ٠

فأوجد قيمة: (ل + ٣) (م + ٣)

---

(١٤) أوجد قيمة ح التى تجعل أحد جذرى المعادلة :
س^{٢} - ١٠ س + ح = ٠ يقل عن مربع الجذر الآخر بمقدار ٢

---

(١٥) أوجد قيمة أ التى تجعل أحد جذرى المعادلة :
٢ س^{٢} - أ س + ٣ = ٠
يزيد عن المعكوس الضربى للجذر الآخر بمقدار ١

---

(١٦) أوجد قيمة أ إذا كان أحد جذرى المعادلة :
س^{٢} - أ س + ٢ أ - ٤ = ٠ أربعة أمثال الجذر الآخر.

---

(١٧) أوجد قيمة ك التى تجعل أحد جذرى المعادلة :
٢ س^{٢} - (ك - ١) س + (ك^{٢} + ٢ ك - ٣) = ٠
ضعف الجذر الآخر.

---

(١٨) فى المعادلة : (ك - ٤) س^{٢} - (٣ - ك) س - ٣ = ٠

أوجد قيمة ك إذا كان :

أ مجموع جذريها يساوى ٥

ب أحد جذريها يساوى المعكوس الجمعى للآخر.

ح أحد جذريها يساوى المعكوس الضربى للآخر.

ء حاصل ضرب جذريها يساوى -٣

٥ تكوين المعادلة التربيعية متى علم جذراها

إذا كان ل ، م هما جذرا معادلة تربيعية فإن

المعادلة هي : $\text{س}^{٢} - (\text{ل} + \text{م})\text{س} + \text{ل م} = ٠$

$\text{س}^{٢}$ - (مجموع الجذرين) س + (حاصل ضرب الجذرين) = ٠

مثال ①

كون المعادلة التربيعية التي جذراها :

① ٥ ، ٣   ② $٢ + \sqrt{٣}$ ، $٢ - \sqrt{٣}$

③ $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ④ $\frac{\text{-٢ + ٢ت}}{\text{١ + ت}}$ ، $\frac{\text{-٢ - ٤ت}}{\text{٢ - ت}}$

الحل

① مجموع الجذرين = ٥+٣ = ٨

، حاصل ضرب الجذرين = ٥×٣ =١٥

∴ المعادلة هي : $\text{س}^{٢} - ٨\text{س} + ١٥ = ٠$

---

② مجموع الجذرين = $٢ + \cancel{\sqrt{٣}} + ٢ - \cancel{\sqrt{٣}} = ٤$

وحاصل ضرب الجذرين = $(٢ + \sqrt{٣})(٢ - \sqrt{٣})$

= ٤ - ٣

= ١

∴ المعادلة هي : $\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ١ = ٠$

---

③ مجموع الجذرين = $\frac{٢}{٣} + \frac{٣}{٢}$

$= \frac{٤ + ٩}{٦} = \frac{١٣}{٦}$

، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{٢}{٣} \times \frac{٣}{٢} = ١$

∴ المعادلة هي : $\text{س}^{٢} - \frac{١٣}{٦}\text{س} + ١ = ٠$

بالضرب ×٦ للطرفين

$٦\text{س}^{٢} - ١٣\text{س} + ٦ = ٠$

---

④ بفرض أن جذرى المعادلة هما ل ، م

، ل = $\frac{\text{-٢ + ٢ت}}{\text{١ + ت}}$ بالضرب × مرافق المقام بسطاً ومقاماً

∴ ل = $\frac{\text{-٢ + ٢ت}}{\text{١ + ت}} \times \frac{\text{١ - ت}}{\text{١ - ت}}$

$= \frac{\cancel{-٢} + \text{٢ت} + \text{٢ت} + \cancel{٢}}{١ + ١} = \frac{\text{٤ت}}{٢} = \text{٢ت}$

، م = $\frac{\text{-٢ - ٤ت}}{\text{٢ - ت}}$ بالضرب × مرافق المقام بسطا ومقاما

∴ م = $\frac{\text{-٢ - ٤ت}}{\text{٢ - ت}} \times \frac{\text{٢ + ت}}{\text{٢ + ت}} = \frac{\cancel{-٤} - \text{٢ت} - \text{٨ت} + \cancel{٤}}{٤ + ١}$

$= \frac{\text{-١٠ت}}{٥} = \text{-٢ت}$

∴ مجموع الجذرين = ٢ت + (-٢ت) = صفر

، حاصل ضرب الجذرين = ٢ت × (-٢ت)

$= -٤\text{ت}^{٢} = ٤$

∴ المعادلة هي : $\text{س}^{٢} + ٤ = ٠$

بعض العلاقات المهمة

① $\text{ل}^{٢} + \text{م}^{٢} = (\text{ل} + \text{م})^{٢} - ٢\text{ل م}$

② $(\text{ل} - \text{م})^{٢} = (\text{ل} + \text{م})^{٢} - ٤\text{ل م}$

③ $\text{ل}^{٣} + \text{م}^{٣} = (\text{ل} + \text{م})[(\text{ل} + \text{م})^{٢} - ٣\text{ل م}]$

④ $\text{ل}^{٣} - \text{م}^{٣} = (\text{ل} - \text{م})[(\text{ل} + \text{م})^{٢} - \text{ل م}]$

⑤ $\frac{١}{\text{ل}} + \frac{١}{\text{م}} = \frac{\text{ل} + \text{م}}{\text{ل م}}$

⑥ $\frac{\text{ل}}{\text{م}} + \frac{\text{م}}{\text{ل}} = \frac{\text{ل}^{٢} + \text{م}^{٢}}{\text{ل م}} = \frac{(\text{ل} + \text{م})^{٢} - ٢\text{ل م}}{\text{ل م}}$

⑦ $\text{ل} - \text{م} = \pm \frac{\sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أ جـ}}}{\text{أ}}$

$= \pm \sqrt{(\text{ل} + \text{م})^{٢} - ٤\text{ل م}}$

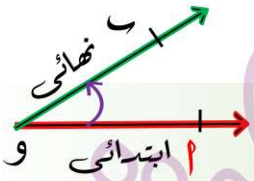
ثانياً : حساب المثلثات

١ الزاوية الموجهة

الزاوية الموجهة :

هي زوج مرتب من شعاعين لهما نفس نقطة البداية ويسمى المسقط الأو ل ضلع إبتدائي ويسمى المسقط الثاني ضلع نهائي

الشكل المقابل :



يمثل : ∠ أ و ب الموجهة

ويمكن التعبير عنها كزوج مرتب : ($\overleftarrow{\text{وأ}}$ ، $\overleftarrow{\text{وب}}$)

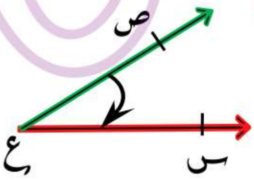
ويسمى :

الضلع : $\overleftarrow{\text{وأ}}$ الضلع الإبتدائى

والضلع : $\overleftarrow{\text{وب}}$ الضلع النهائى

مثـــال ①

فى الشكل المقابل :



① الشكل يمثل : ∠ .... الموجهة

② يعبر عن هذه الزاوية بالزوج المرتب :

(.... ، ....)

③ الضلع الإبتدائى هو ....

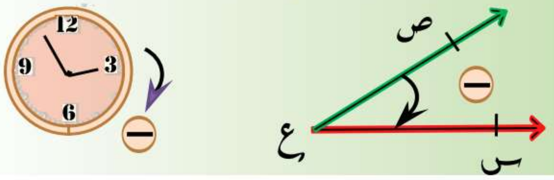
④ الضلع النهائى هو ....

ملحوظة ①

يرسم داخل الزاوية الموجهة سهم ليشير من الضلع الإبتدائى إلى الضلع النهائى

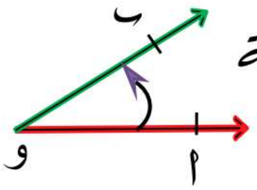
القياس الموجب والقياس السالب للزاوية

(أ) إذا كان اتجاه السهم فى إتجاه دوران عقارب الساعة كان قياسها سالبا



(ب) إذا كان السهم فى عكس إتجاه دوران عقارب الساعة كان قياسها موجبا

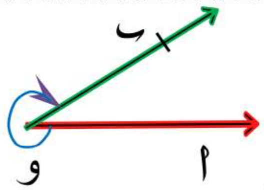
الشكل المقابل :



يمثل : ∠ أ و ب الموجهة

وهى زاوية قياسها موجب

الشكل المقابل :



يمثل : ∠ أ و ب الموجهة

وهى زاوية قياسها سالب

للزاوية الموجهة قياسان أحدهما موجب والآخر سالب بحيث:

القياس الموجب + القيمة المطلقة للقياس السالب = ٣٦٠°

الزاوية التى قياسها الموجب = ١٥٠°

يكون قياسها السالب = ١٥٠° − ٣٦٠° = −٢١٠°

الزاوية التى قياسها السالب = −٧٢°

يكون قياسها الموجب = −٧٢ + ٣٦٠ = ٢٨٨°

لاحظ :

① الزاوية التى قياسها الموجب = θ

، $\theta \in$]٠، ٣٦٠°[

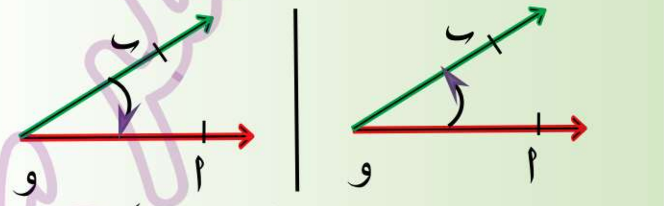
يكون قياسها السالب = θ − ٣٦٠°

② الزاوية التى قياسها السالب = −θ

، $\theta \in$]٠، ٣٦٠°[

يكون قياسها الموجب = −θ + ٣٦٠°

③ في الشكل :



(∠أ و ب) الموجهة ≠ (∠ب و أ) الموجهة

مثال ②

أوجد القياس الآخر للزوايا الموجهة التى قياساتها كالتالى

① −٦٠° ② ١٢٠°

③ −٣٠٠° ④ ١٠٥°

الحل

① القياس الموجب للزاوية التى قياسها

(−٦٠°) = −٦٠° + ٣٦٠°

= ٣٠٠°

② القياس السالب للزاوية الموجهة التى

قياسها (١٢٠°) = ١٢٠° − ٣٦٠°

= −٢٤٠°

③ القياس الموجب للزاوية التى قياسها

(−٣٠٠°) = −٣٠٠° + ٣٦٠°

= ٦٠°

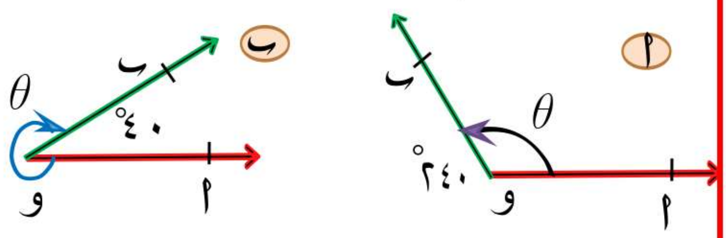
④ القياس السالب للزاوية الموجهة التى

قياسها (١٠٥°) = ١٠٥° − ٣٦٠°

= −٢٥٥°

مثال ③

أوجد قياس الزاوية (θ) فى كل من الأشكال التالية



الحل

أ ∵ اتجاه السهم فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة

∴ θ قياسها موجبا

∴ θ = ٣٦٠° − ٢٤٠° = ١٢٠°

ب اتجاه السهم فى اتجاه دوران عقارب الساعة

∴ θ قياسها سالبا

∴ θ = −(٣٦٠° − ٤٠°) = −٣٢٠°

الوضع القياسي للزاوية الموجهة :

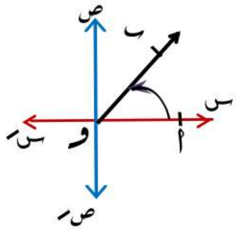
تكون الزاوية الموجهة مرسومة فى الوضع القياسى إذا تحقق الشرطان الآتيان معاً

① رأسها نقطة الأصل (و)

② ضلعها الإبتدائى هو الجزء الموجب لمحور السينات

الشكل المقابل :

يمثل : (∠أ و ب) الموجهة في الوضع القياسي



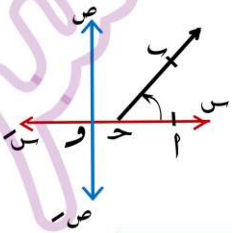
لأن :

- رأسها نقطة الأصل (و)
- ضلعها الابتدائي هو $\overrightarrow{وأ}$ ينطبق على الجزء الموجب لمحور السينات

مثال ④

أي من الزوايا الموجهة الآتية في وضعها القياسي

①



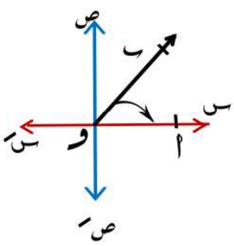
الحل

∠ أ حـ ب الموجهة ليست في الوضع القياسي

لأن رأسها لا تقع على نقطة الأصل

---

②



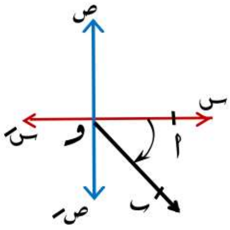
الحل

∠(أ و ب) الموجهة ليست في الوضع القياسي

لأن ضلعها الابتدائي لا ينطبق على الجزء الموجب لمحور السينات

---

③



الحل

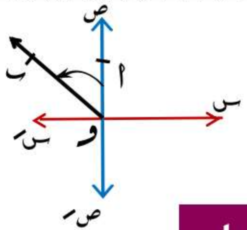
(∠أ و ب) الموجهة في الوضع القياسي

لأن :

- رأسها نقطة الأصل (و)
- ضلعها الابتدائي هو الجزء الموجب لمحور السينات

---

④



الحل

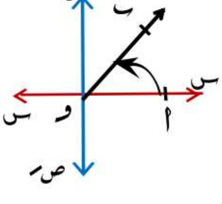
∠(أ و ب) ليست في الوضع القياسي

لأن ضلعها الابتدائي $\overrightarrow{وأ}$ لا ينطبق على الجزء الموجب لمحور السينات

موقع الزاوية الموجهة :

إذا كانت :(∠أ و ب) الموجهة في الوضع القياسي وقياسها θ فإنها :

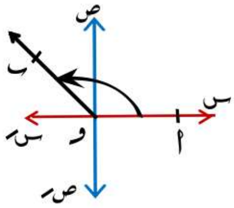
① تقع في الربع الأول



إذا كان :

- ضلعها النهائي $\overrightarrow{وب}$ يقع بين $\overrightarrow{وس}$ ، $\overrightarrow{وص}$
- $\theta \in]$٠°، ٩٠°$[$

(٢) تقع فى الربع الثانى

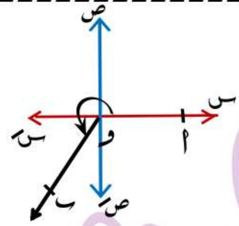


إذا كان :

- ضلعها النهائى $\overrightarrow{و ب}$ يقع بين $\overrightarrow{و ص}$ ، $\overrightarrow{و س'}$
- $\theta \in]٩٠°، ١٨٠°[$

---

(٣) تقع فى الربع الثالث

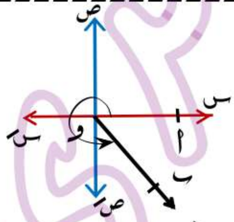


إذا كان :

- ضلعها النهائى $\overrightarrow{و ب}$ يقع بين $\overrightarrow{و س'}$، $\overrightarrow{و ص'}$
- $\theta \in]١٨٠°، ٢٧٠°[$

---

(٤) تقع فى الربع الرابع



إذا كان :

- ضلعها النهائى $\overrightarrow{و ب}$ يقع بين $\overrightarrow{و ص'}$ ، $\overrightarrow{و س}$
- $\theta \in]٢٧٠°، ٣٦٠°[$

---

(٥) إذا وقع الضلع النهائى للزاوية الموجهة على أحد محاور الإحداثيات سميت زاوية ربعية أو محورية

∴ الزوايا الموجهة : ٠ ، ٩٠ ، ١٨٠ ، ٢٧٠ ، ٣٦٠ ، ٤٥٠ ، ..... هى زوايا ربعية

مثال (٥)

عين الربع الذى تقع فيه الزوايا الموجهة المرسومة فى الوضع القياسى التى قياساتها كالتالى

(١) ٤٠°

الحل

∵ ٤٠° ∈]٠°، ٩٠°[∴ تقع فى الربع الأول

(٢) −٥٠°

الحل

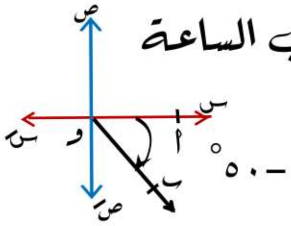
القياس الموجب للزاوية = −٥٠° + ٣٦٠°

= ٣١٠°

، ∵ ٣١٠° ∈]٢٧٠°، ٣٦٠°[

∴ الزاوية تقع فى الربع الرابع

أو : ترسم من الجزء الموجب لمحور السينات فى إتجاه دوران عقارب الساعة



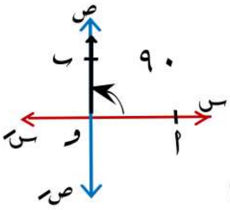
∴ الزاوية تقع فى الربع الرابع

---

(٣) ٩٠°

الحل

∵ عند رسم الزاوية الموجهة التى قياسها ٩٠° فى الوضع القياسى فإن ضلعها النهائى يقع على الجزء الموجب لمحور الصادات



∴ الزاوية التى قياسها ٩٠° هى زاوية ربعية

---

(٤) −١٨٠°

الحل

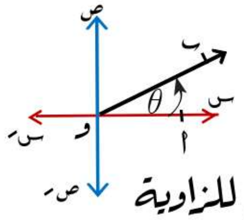
الزاوية الموجهة التى قياسها −١٨٠° فى الوضع القياسى فإن ضلعها النهائى يقع على الجزء السالب لمحور السينات

∴ −١٨٠° هى زاوية ربعية

الزوايا المتكافئة :

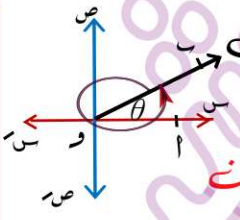
يقال لعدة زوايا في الوضع القياسي أنها متكافئة إذا كان الضلع النهائي لهم جميعا واحد

الشكل المقابل :



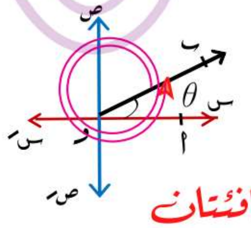
يمثل زاوية قياسها θ

- عند دوران الضلع النهائي للزاوية وهو و ب ← دورة كاملة حول نقطة الأصل فإنه يعود إلى وضعه الأصلي



∴ الزاويتان : θ ، $\boxed{\theta + 1 \times ٣٦٠}$ متكافئتان

وكذلك عند دوران الضلع النهائي و ب ← دورتين حول نقطة الأصل فإنه ينطبق على الضلع النهائي للزاوية التي قياسها θ



∴ الزاويتان : θ ، $\theta + ٢ \times ٣٦٠^\circ$ متكافئتان

وهكذا ......

∴ الزوايا التي علي الصورة : $\theta \pm$ ن × ٣٦٠ ، تكافئ الزاوية التي قياسها θ حيث ن ∈ ص

مثال (٦)

أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب وأخرى بقياس سالب للزوايا الموجهة التالية :

(١) ٥٠°

الحل

القياس الموجب = ٥٠° + ٣٦٠° = ٤١٠°

القياس السالب = ٥٠° − ٣٦٠° = −٣١٠°

---

(٢) −١٢٠°

الحل

القياس الموجب = −١٢٠° + ٣٦٠° = ٢٤٠°

القياس السالب = −١٢٠° − ٣٦٠° = −٤٨٠°

---

(٣) ٣٤٥٦°

الحل

نوجد عدد الدورات الكاملة

∵ ٣٤٥٦ ÷ ٣٦٠ ≃ ٩,٦

∴ ن = ٩ — نطرح من الزاوية المعطاة ٩ دورات

الزاوية المكافئة الموجبة قياسها

= ٣٤٥٦ − ٩ × ٣٦٠° = ٢١٦°

الزاوية المكافئة السالبة قياسها

= ٣٤٥٦ − ١٠ × ٣٦٠° = −١٤٤°

---

(٤) −٣٤٥٦°

الحل

∵ ٣٤٥٦ ÷ ٣٦٠ ≃ ٩,٦

∴ عدد الدورات الكاملة = ٩   ∴ ن = ٩

لإيجاد أكبر قياس سالب نضيف ٩ دورات للزاوية المعطاة

∴ −٣٤٥٦ + ٩ × ٣٦٠° = −٢١٦°

لإيجاد أصغر قياس موجب نضيف ١٠ دورات للزاوية المعطاة

∴ −٣٤٥٦° + ١٠ × ٣٦٠° = ١٤٤°

مثال ⑦

حدد الربع الذى تقع فيه الزوايا الموجهة الذى قياساتها كالتالى

(١) $-٢١٩٦°$

الحل

$\because$ $٢١٩٦° \div ٣٦٠ \simeq ٦,١$ $\therefore$ ن $= ٦$

الزاوية المكافئة الموجبة قياسها

$= -٢١٩٦° + ٧ \times ٣٦٠° = ٣٢٤°$

، $\because$ $٣٢٤ \in]٢٧٠°، ٣٦٠°[$

$\therefore$ الزاوية تقع فى الربع الرابع

---

(٢) $١٦١٥°$

الحل

$\because$ $١٦١٥ \div ٣٦٠ \simeq ٤,٤٩$

$\therefore$ ن $= ٤$

الزاوية المكافئة الموجبة قياسها

$= ١٦١٥° - ٤ \times ٣٦٠° = ١٧٥°$

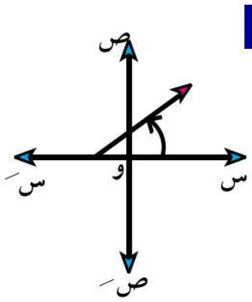
، $\because$ $١٧٥ \in]٩٠°، ١٨٠°[$

$\therefore$ الزاوية تقع فى الربع الثاني

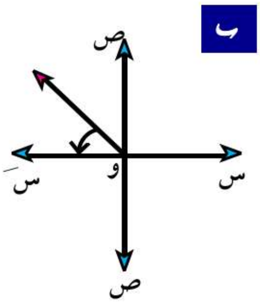
مثال ⑧

أى من الزوايا الآتية تكون فى الوضع القياسى

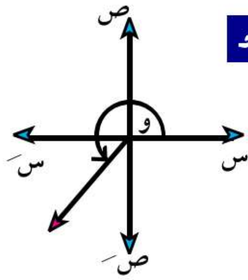
أ



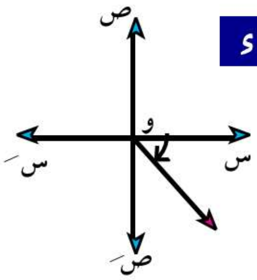
ب



جـ



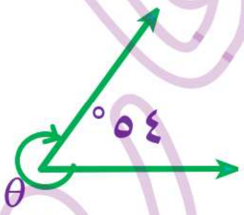
ء



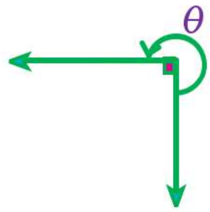
مثال ⑨

أوجد قياس الزاوية (θ) في كل مما يأتي

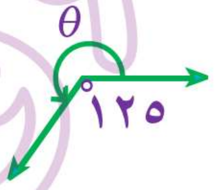
أ



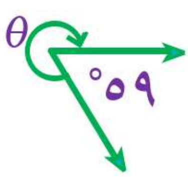
ب



جـ



ء



مثال (١٠)

أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مكافىء للزوايا الموجهة التى قياساتها كالتالى

(١) ١٧٠°

....

(٢) −٣٩٥١°

....

(٣) ١٢٠٠°

....

مثال (١١)

حدد الربع الذى تقع فيه الزوايا الموجهة التى قياساتها كالتالى

(١) ٧٥٠°

....

(٢) −١٥٢٠°

....

(٣) −٢٧٠°

....

مثال (١٢)

عين أصغر قياس موجب للزوايا الموجهة التى قياساتها كالتالى

(١) −٣٠٠°

....

(٢) ١٢٣٧°

....

(٣) −٥٩٠٨°

....

مثال (١٣)

عين أكبر قياس سالب للزوايا الموجهة التى قياساتها كالتالى

(١) ٢٣٦٧° (٢) −٢٥٦٧° (٣) −٤٩٨٧°

....

تمارين علي الزاوية الموجهة

① حدد الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا الموجهة التى قياساتها كالآتى :

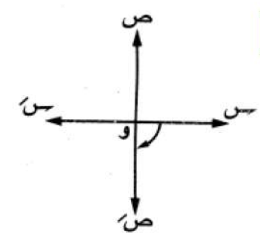
1) ٦٧°

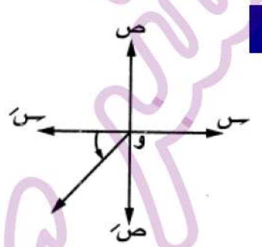
2) -٢٢٠°

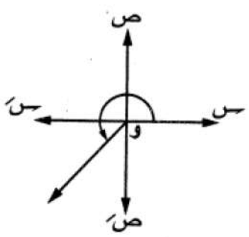
3) ٨٧٥°

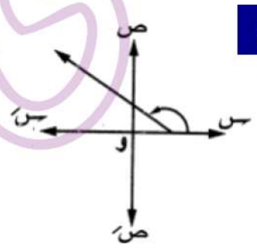
4) -٢٠٢٠°

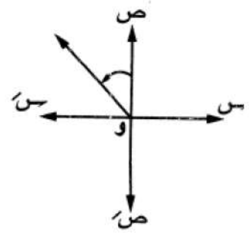
② أى الزوايا الموجهة التالية فى وضعها القياسى ؟ فسِّر إجابتك.

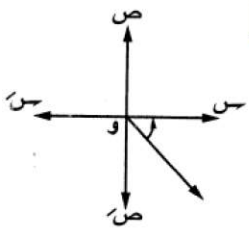
أ


ب


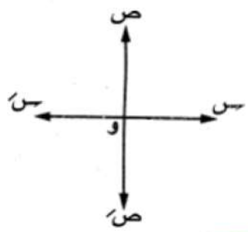
حـ


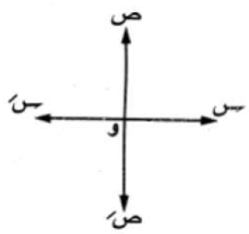
د


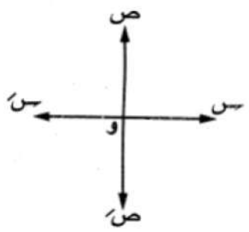
هـ


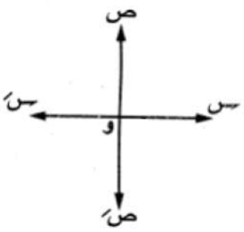
و


③ ضع كلًا من الزوايا الآتية فى الوضع القياسى ، موضحًا ذلك بالرسم :

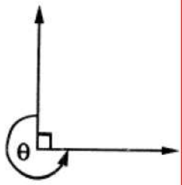
أ -٣١٥°


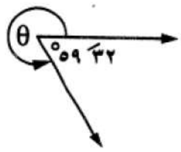
ب -١١٠°


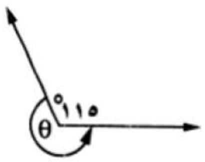
حـ -٨٠°


د ١٤٠°


④ أوجد قياس الزاوية الموجهة θ المشار إليها فى كل شكل من الأشكال الآتية :

أ


ب


حـ


⑤ عيِّن الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا التى قياساتها كالآتى :

أ ١٥٠° ١٤َ ب -٢١٠° حـ ٢٦٩° ٥٩َ ٦٠ً د ٨٩° ٥٩َ

⑥ الزاوية التى قياسها ٦٠° فى الوضع القياسى تكافئ الزاوية التى قياسها ....

أ ١٢٠° ب ٢٤٠° حـ ٣٠٠° د ٤٢٠°

⑦ إذا كان : أ ، ب قياسى زاويتين متكافئتين فإن : -أ ، -ب يكونان ....

أ متكافئتين. ب متكاملتين. حـ مجموعهما -٣٦٠° د متتامتين.

⑧ الزاوية التى قياسها (-٨٥٠°) تقع فى الربع ....

أ الرابع. ب الثالث. حـ الثانى. د الأول.

⑨ جميع الزوايا التى قياساتها كالآتى تقع فى الربع الثانى ما عدا ....

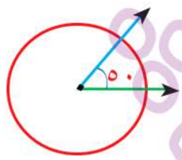
أ -٢٤٠° ب ١٠٠° حـ -١٢٠° د ٨٦٠°

٢ القياس الستيني والقياس الدائري

أولاً : القياس الستيني

تعتمد فكرة هذا القياس على تقسيم الدائرة إلى ٣٦٠ قوساً متساويا وكل زاوية مركزية تقابل قوساً من هذه الأقواس يكون قياسها = ١°

الزاوية التي قياسها ٥٠°



تقابل ٥٠ قوساً من هذه الأقواس

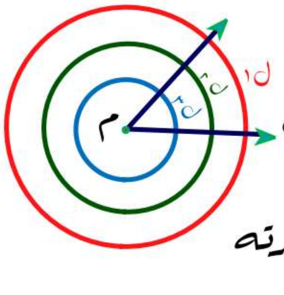
وفي القياس الستيني تقدر الزاوية بالدرجات والدقائق والثواني

- وتنقسم الدرجة إلى ٦٠ جزء وكل جزء يسمى دقيقة : ∴ ١° = ٦٠′
- وتنقسم الدقيقة إلى ٦٠ جزء كل جزء منها يسمى ثانية ∴ ١′ = ٦٠″

- الزاوية التي قياسها ٣٢″ ١٥′ ١٢٣°

وتقرأ ١٢٣ درجة و ١٥ دقيقة ٣٢ ثانية

في الشكل المقابل:



عند قسمة طول أي قوس على طول نصف قطر دائرته

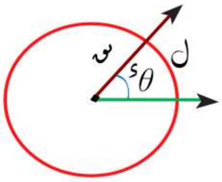
تنتج نسبة ثابتة تسمى :

القياس الدائرى للزاوية المركزية ($\theta^{د}$) المقابلة لهذا القوس

$$\theta^{د} = \frac{ل_١}{نق_١} = \frac{ل_٢}{نق_٢} = \frac{ل_٣}{نق_٣}$$

ثانياً : القياس الدائري للزاوية المركزية

القياس الدائرى لزاوية مركزية ($\theta^{د}$)

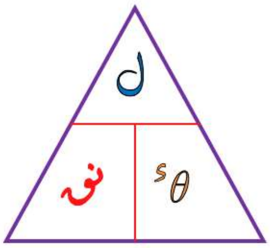


$$\boxed{\theta^{د} = \frac{ل}{نق}}$$

حيث :

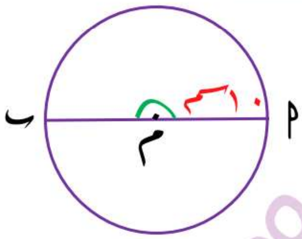
ل : طول القوس المحصور بين ضلعيها

نق : طول نصف قطر دائرتها



مثال ①

فى الشكل المقابل :



م دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم ، $\overline{أب}$ قطر فيها

أوجد :

ٯ (∠ أم ب) المركزية بالراديان

الحـــل

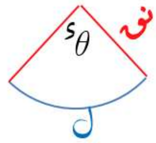
∵ طول القوس $\overset{\frown}{أب}$

= نصف طول محيط الدائرة

طول القوس $\overset{\frown}{أب}$ = π نق ، نق = ١٠سم

∴ ل = ١٠ π سم

، ∵ $\theta^{د} = \frac{ل}{نق}$



$\theta^{د} = \frac{١٠\pi}{١٠} = \pi$

لاحظ

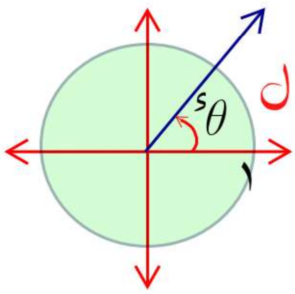
من المثال السابق نجد أن

الزاوية المركزية التي قياسها ١٨٠° قياسها الدائري هو π

ملحوظة ①

في دائرة الوحدة يكون طول نصف قطرها وحدة الأطوال

أي : نق = ١



∴ $\theta^{د} = \frac{ل}{١} = ل$

∴ في دائرة الوحدة يكون :

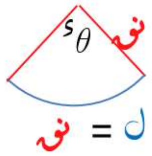
القياس الدائري للزاوية المركزية

= طول القوس المحصور بين ضلعيها

الزاوية النصف قطرية

هي زاوية مركزية في دائرة تحصر بين ضلعيها قوساً طوله يساوي طول نصف قطر الدائرة

$\boxed{ل = نق}$



∴ $\theta^{د} = \frac{نق}{نق} = ١^{د}$

- قياس الزاوية النصف قطرية = ١ د
- الزاوية النصف قطرية هي وحدة قياس القياس الدائري

مثال ②

قياس الزاوية المركزية التي تحصر قوس في دائرة طوله يساوي ثلاثة أمثال طول نصف قطر دائرتها =...... د

مثال ③

زاوية مركزية في دائرة طول نصف قطر دائرتها ١٥سم وتحصر بين ضلعيها قوسا طوله ٢٥سم احسب قياسها الدائري

الحل

∵ ل = ٢٥سم ، نق = ١٥ سم ، $\theta^{د} = \frac{ل}{نق}$

∴ $\theta^{د} = \frac{٢٥}{١٥} = ١,٦٦٧^{د}$

مثال ④

زاوية مركزية قياسها $1,2^{د}$ في دائرة وتحصر بين ضلعيها قوساً طوله ١٢سم احسب محيط دائرتها

الحل

$\because$ $\theta^{د} = 1,2^{د}$ ، ل = ١٢سم

، $\because$ نق $= \frac{ل}{\theta^{د}}$

$\therefore$ نق $= \frac{12}{1,2} = 10$ سم

، $\because$ محيط الدائرة = ٢ π نق

$\therefore$ محيط الدائرة = $2 \times \pi \times 10$

= ٢٠ π سم

مثال ⑤

زاوية مركزية قياسها $1,5^{د}$ في دائرة طول نصف قطرها ١٠سم أوجد طول قوسها

الحل

$\because$ ل = $\theta^{د}$ × نق

نق = ١٠سم ، $\theta^{د} = 1,5^{د}$

ل = $10 \times 1,5 = 15$ سم

مثال ⑥

زاوية مركزية قياسها $1,2^{د}$ في دائرة مساحتها ٢٥ π سم^2

احسب

طول القوس المحصور بين ضلعيها

الحل

$\because$ $\theta^{د} = 1,2^{د}$

، $\because$ مساحة الدائرة = π نق^2

$\therefore$ ٢٥ $\cancel{\pi}$ = $\cancel{\pi}$ نق^2

$\therefore$ ٢٥ = نق^2

$\therefore$ نق = ٥سم

$\because$ ل = $\theta^{د}$ × نق $\therefore$ ل = $1,2 \times 5 = 6$ سم

العلاقة بين القياس الستيني والقياس الدائري

يوجد للزاوية وحدتى قياس هما

القياس الدائرى ($\theta^{د}$)

والقياس الستينى (س°)

ويمكن التحويل بينهما

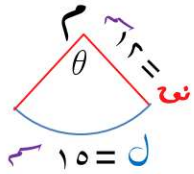
$$\frac{س^\circ}{180^\circ} = \frac{\theta^{د}}{\pi}$$

$$\frac{\text{القياس الستينى}}{180^\circ} = \frac{\text{القياس الدائرى}}{\pi}$$

$\therefore$ القياس الستينى = $\dfrac{\text{القياس الدائرى}}{\pi} \times ١٨٠$

، القياس الدائرى = $\dfrac{\text{القياس الستينى}}{١٨٠} \times \pi$

مثال ⑦



فى الشكل المقابل : زاوية مركزية قياسها θ

فإن :
① $\theta = \dots\dots$ ء
② $\theta = \dots\dots$ °

الحل

$\because$ نق = ١٢ سم ، ل = ١٥ سم

، $\theta^{ء} = \dfrac{ل}{نق}$

$\therefore \theta^{ء} = \dfrac{١٥}{١٢} = ١,٢٥^{ء}$

بالتحويل إلى القياس الستينى

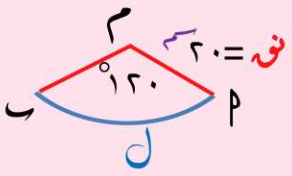
$\because$ س° = $\dfrac{\theta^{ء} \times ١٨٠^\circ}{\pi}$

$\therefore$ س° = $\dfrac{١,٢٥ \times ١٨٠^\circ}{\pi} = ٧١^\circ\ ٣٧'\ ١١''$

مثال ⑧

الشكل المقابل يمثل زاوية مركزية قياسها ١٢٠° فى دائرة طول نصف قطرها ٢٠ سم

احسب طول القوس المقابل لها



الحل

نوجد القياس الدائرى للزاوية المركزية

$\because \theta^{ء} = \dfrac{س^\circ}{١٨٠^\circ} \times \pi \qquad \therefore \theta^{ء} = \dfrac{١٢٠^\circ}{١٨٠^\circ} \times \pi$

نضغط على المفتاح

فنحصل على النتيجة

$\theta^{ء} \simeq ٢,٠٩٤$

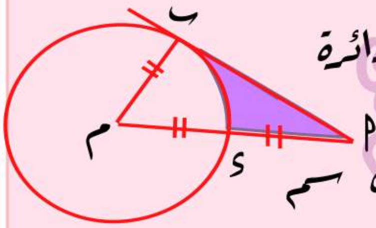
$\because$ ل = $\theta^{ء} \times$ نق

$\therefore$ ل = $٢,٠٩٤ \times ٢٠$

$\simeq ٤١,٨٨$ سم

مثال (٩)

فى الشكل المقابل م دائرة



طول نصف قطرها ٥ سم

رسم $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة عند ب

، $\overline{أم}$ تقطع الدائرة فى ء بحيث أ ء = ء م

إحسب محيط الشكل المظلل

الحل

∵ أ ء = ء م = م ب = ٥ سم

∴ أ م = ١٠

∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة عند ب

ق(∠أ ب م) = ٩٠°

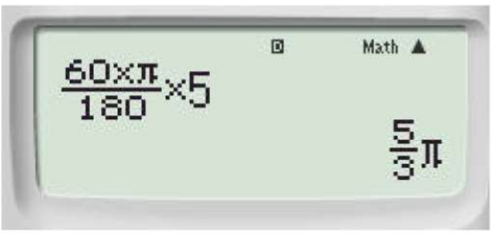
، ∴ جتا م = $\frac{ب م}{أ م} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$

∴ ق(∠ أ م ب) = ٦٠°

، ∵ طول $\overset{\frown}{ءب}$ = $\theta^{ء}$ × نق

∴ طول $\overset{\frown}{ءب}$ = $\frac{٦٠^\circ \pi}{١٨٠^\circ}$ × ٥

= $\frac{٥}{٣}\pi$ سم



∵ △ أ ب م قائم الزاوية فى ب

من نظرية فيثاغورث

∴ أ ب = $\sqrt{(أم)^٢ - (ب م)^٢}$

= $\sqrt{(١٠)^٢ - (٥)^٢}$

= $\sqrt{١٠٠ - ٢٥}$

= $\sqrt{٧٥}$ = ٥$\sqrt{٣}$ سم

∵ محيط الشكل المظلل

= أ ب + أ ء + طول $\overset{\frown}{ءب}$

= ٥$\sqrt{٣}$ + ٥ + $\frac{٥}{٣}\pi$

= ٥ ($\sqrt{٣}$ + ١ + $\frac{\pi}{٣}$) سم

≃ ١٨,٩ سم

مثال (١٠)

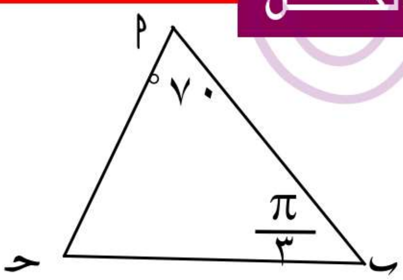
مثلث قياس إحدى زواياه ٧٠° وقياس زاوية أخرى منه $\frac{\pi}{٣}$ أوجد :

القياس الستينى والقياس الدائرى للزاوية الثالثة

الحل

فى △ أ ب حـ

نفرض أن



$ق(\angle أ) = ٧٠^\circ$ ← ١

، $ق(\angle ب) = \frac{\pi}{٣}$

نوجد القياس الستينى للزاوية ب

$ق(\angle ب) = \dfrac{\frac{\cancel{\pi}}{٣} \times ١٨٠^\circ}{\cancel{\pi}} = ٦٠^\circ$ ← ٢

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة

$= ١٨٠^\circ$

$\because ق(\angle حـ) = ١٨٠^\circ - (٦٠^\circ + ٧٠^\circ)$

$= ٥٠^\circ$

$\therefore ق(\angle حـ) = \dfrac{٥٠^\circ \times \pi}{١٨٠^\circ}$

$= \frac{٥}{١٨} \pi$

$\simeq$

$\therefore ق(\angle حـ) \simeq ٠,٨٧^{ء}$

ملحوظة ٢

الزاوية التى قياسها ١٨٠° قياسها الدائرى π

∴ إذا كانت الزاوية الموجهة بدلالة π

لتحويلها إلى قياس ستينى مباشرة

بدون تطبيق القانون نحول π

إلى ١٨٠°

مثال ١١

أوجد القياس الستينى للزوايا الموجهة

التى قياساتها كالتالى

① $\frac{٥\pi}{٣}$

الحل

القياس الستينى $= \frac{٥\cancel{\pi}}{٣} \times \frac{١٨٠^\circ}{\cancel{\pi}}$

$= \frac{٥ \times ١٨٠^\circ}{٣} = ٣٠٠^\circ$

---

② $٠,٥٧^{ء}$

الحل

القياس الستينى $= \frac{٠,٥٧ \times ١٨٠^\circ}{\pi}$

$= ٣١'' \; ٣٩' \; ٣٢^\circ$

مثال ⑫

△ أ ب حـ فيه :

ق(∠أ) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ب) = $\frac{١}{٣}$ ق(∠حـ)

أوجد القياس الستيني و الدائري لزاوية حـ

الحل

نفرض أن :

ق(∠أ) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ب) = $\frac{١}{٣}$ ق(∠حـ)
= ك

∴ ق(∠أ) = ك ← ①

، $\frac{١}{٢}$ ق(∠ب) = ك

∴ ق(∠ب) = ٢ك ← ②

، $\frac{١}{٣}$ ق(∠حـ) = ك

∴ ق(∠حـ) = ٣ك ← ③

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠أ) + ق(∠ب) + ق(∠حـ) = ١٨٠°

ك + ٢ك + ٣ك = ١٨٠°

٦ك = ١٨٠°

∴ ك = ٣٠°

، ∵ ق(∠حـ) = ٣ك

∴ ق(∠حـ) = ٣ × ٣٠° = ٩٠°

∴ ق(∠حـ) = $\frac{٩٠ \times \pi}{١٨٠°} = \frac{\pi}{٢}$

تمارين على القياس الستيني والقياس الدائري

① أوجد لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر طول قوس من دائرة طول نصف قطرها (نق) ويقابل زاوية مركزية قياسها θ في كل من الحالات الآتية :

أ نق = ٢٠ سم ، θ = ٢,٤٣ء

ب نق = ١٥ سم ، θ = ١٠٤° ٥٨َ ٦ً

حـ نق = ٧,٥ سم ، θ = ٦٧° ٤٠َ

---

② أوجد طول نصف قطر الدائرة المرسوم بها زاوية مركزية قياسها (θ) وطول القوس المحصور (ل) في كل من الحالات الآتية :

أ θ = ٧٨° ٣٦َ ٢٦ً ، ل = ٤٣,٩٢ سم

ب θ = ١٣٩° ، ل = ٢٤,٣٢٥ سم

حـ θ = ٠,٧٦٧ء ، ل = ٣٨,٣٥ سم

---

③ أوجد بدلالة π القياس الدائرى لكل من الزوايا التى قياساتها كالآتى :

أ -٢١٠° ....

ب -٢٣٥° ....

حـ ٧٨٠° ....

ء ٩٠° ....

هـ ٣٩٠° ....

و ٣٠٠° ....

ز ١١٢° ٣٠َ ....

---

④ إذا كان القياس الستينى لزاوية ١٢َ ٤٣° فإن قياسها الدائرى يساوى ......

(أ) ٠,٢٨ π (ب) ٠,٢٤ π (حـ) ٠,٢٨ء (ء) ٠,٢٤ء

⑤ الزاوية التى قياسها $\frac{31\pi}{6}$ تقع فى الربع .

(أ) الرابع. (ب) الثالث. (جـ) الثانى. (د) الأول.

---

⑥ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى بالتقدير الدائرى يساوى ....

(أ) π (ب) 2π (جـ) $\frac{3\pi}{2}$ (د) 2π

---

⑦ طول القوس فى دائرة طول قطرها ١٢ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها ٦٠° يساوى .... سم

(أ) 4π (ب) 3π (جـ) 2π (د) 5π

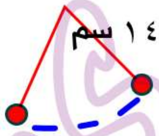
---

⑧ القوس الذى طوله ٥ π سم فى دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم يقابل زاوية مركزية قياسها

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٩٠°

---

⑨ بندول بسيط طول خيطه ١٤ سم يتذبذب بزاوية قياسها $\frac{1}{10}\pi$ فإن طول قوسه ≃ .... سم



(أ) ٤,٦ (ب) ٤,٤ (جـ) ٤,٨ (د) ٤,٢

---

⑩ أ ب جـ د شكل رباعى دائرى ، ق(∠أ) = ٦٠° فإن : ق(∠جـ) = ...

(أ) $\frac{2\pi}{3}$ (ب) $\frac{5\pi}{6}$ (جـ) $\frac{\pi}{6}$ (د) $\frac{\pi}{3}$

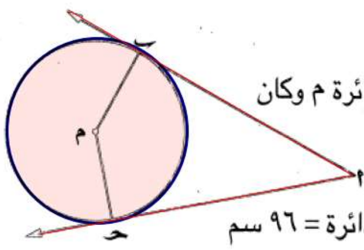
---

⑪ القياس الدائرى للزاوية الخارجة عن الشكل السباعى المنتظم يساوى ......

(أ) $\frac{4}{7}\pi$ (ب) $\frac{3}{7}\pi$ (جـ) $\frac{2}{7}\pi$ (د) $\frac{1}{7}\pi$

---

⑫ فى الشكل المقابل :



إذا كان $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أجـ}$ مماسين للدائرة م وكان

ق(∠أ) = $\frac{5}{12}\pi$ وكان محيط الدائرة = ٩٦ سم

فإن طول القوس الأصغر $\frown{بجـ}$ = ...

20π ، ٢٨ ، $\frac{28}{\pi}$ ، ٢-

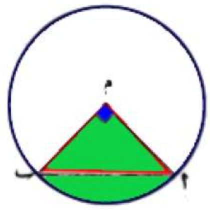
---

⑬ إذا كان طول قوس من دائرة يساوى $\frac{3}{8}$ محيطها فإن الزاوية المركزية التى تقابل هذا القوس قياسها الستينى يساوى ....

(أ) ٤٣° تقريبًا. (ب) ٦٧° ٣٠َ (جـ) ١٣٥° (د) ٣٠°

---

⑭ فى الشكل المقابل :

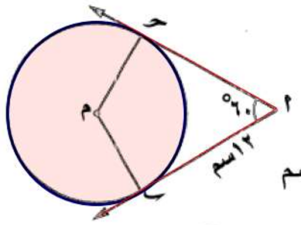


إذا كانت مساحة المثلث م أ ب القائم الزاوية فى م تساوى ٣٢ سم^2

فأوجد محيط الشكل المظلل مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

---

⑮ فى الشكل المقابل :



$\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أجـ}$ مماسان للدائرة م

، ق(∠جـ أ ب) = ٦٠° ، أب = ١٢ سم

أوجد لأقرب عدد صحيح طول القوس الأكبر $\frown{بجـ}$

---

⑯ إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا شكل رباعى كنسبة ٥ : ٤ : ٩ : ٦

فإن قياس أصغر زواياه يساوى ....ء

(أ) $\frac{2\pi}{3}$ (ب) $\frac{5\pi}{12}$ (جـ) $\frac{\pi}{12}$ (د) $\frac{\pi}{3}$

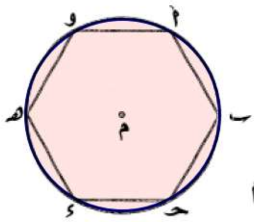
---

⑰ القياس الموجب للزاوية التى يصنعها عقرب الساعات مع عقرب الدقائق عند الساعة الثانية ونصف

(أ) $\frac{3\pi}{4}$ (ب) $\frac{7\pi}{12}$ (جـ) $\frac{\pi}{4}$ (د) $\frac{5\pi}{12}$

---

⑱ فى الشكل المقابل :



أ ب جـ د هـ و شكل سداسى منتظم طول ضلعه ٤ سم

مرسوم داخل دائرة م فإن طول $\frown{أب}$ = ... سم

(أ) $\frac{5}{3}\pi$ (ب) $\frac{4}{3}\pi$ (جـ) 2π (د) π

٣ الدوال المثلثية

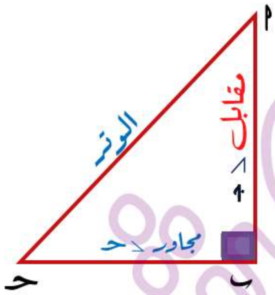
الدوال المثلثية للزاوية الحادة

تذكر أن :

إذا كان : $\triangle$ أ ب حـ قائم الزاوية فى $\angle$ ب

فإن كلاً من :

$\angle$ أ ، $\angle$ حـ حادتين



فإن الدوال المثلثية للزاوية حـ هى :

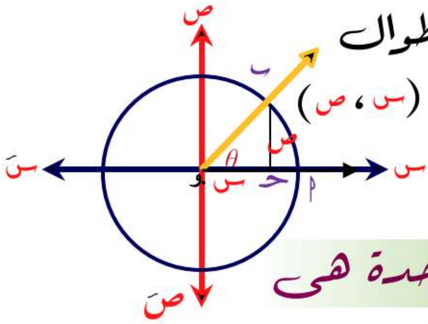
١) جتا حـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}}$

٢) جا حـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}$

٣) طا حـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}}$

دائرة الوحدة

هى دائرة مركزها نقطة الأصل فى نظام إحداثى متعامد وطول نصف قطرها وحدة الأطوال ،

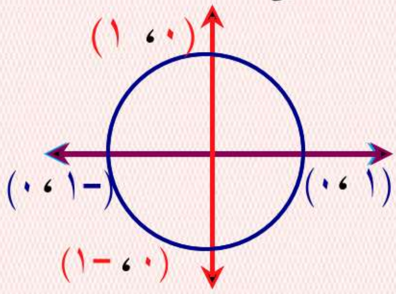


معادلة دائرة الوحدة هى

$س^2 + ص^2 = 1$

ملاحظات مهمة

❶ دائرة الوحدة تقطع محاور الإحداثيات فى النقط



- (١ ، ٠)
- (٠ ، ١)
- (-١ ، ٠)
- (٠ ، -١)

❷ لأى نقطة (س ، ص) تقع على دائرة الوحدة فإنها تحقق معادلتها $س^2 + ص^2 = 1$

ويكون :

- س $\in$ [-١ ، ١]
- ص $\in$ [-١ ، ١]

مثال ①

إذا كانت النقطة (٣ أ ، ٤ أ) ، أ > ٠ تقع على دائرة الوحدة أوجد : قيمة أ

الحل

$\because$ النقطة (٣ أ ، ٤ أ) تقع على دائرة الوحدة

$\therefore$ تحقق معادلتها $س^2 + ص^2 = 1$

$\therefore (3أ)^2 + (4أ)^2 = 1$

$\therefore 9أ^2 + 16أ^2 = 1$

$\therefore 25أ^2 = 1 \quad \therefore أ^2 = \frac{1}{25}$

$\therefore أ = \pm\sqrt{\frac{1}{25}} \quad \therefore أ = \pm\frac{1}{5}$

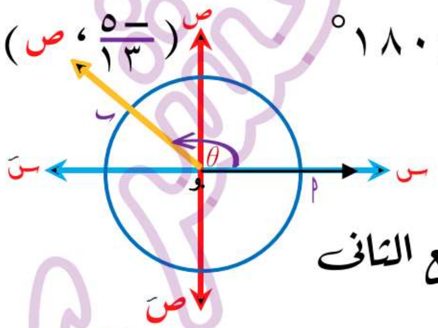
$\because أ > 0 \quad \therefore أ = \frac{1}{5}$

مثال ①

إذا كان θ هو قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $(\frac{-5}{13}$ ، ص$)$ حيث $90 < \theta < 180$ أوجد قيمة : ص

الحل

∵ $°90 < \theta < °180$



∴ تقع فى الربع الثانى

∴ ص > 0

، ∵ النقطة $(\frac{-5}{13}$ ، ص$)$ تقع على دائرة الوحدة

∴ $(\frac{-5}{13})^2 + ($ص$)^2 = 1$

∴ $\frac{25}{169} +$ ص$^2 = 1$

∴ ص$^2 = 1 - \frac{25}{169}$

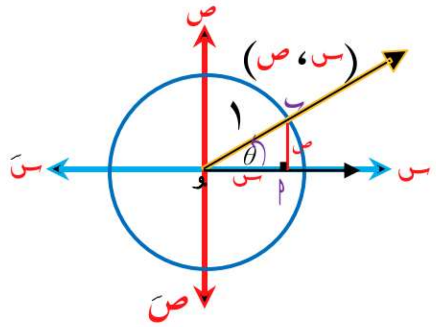
∴ ص$^2 = \frac{144}{169}$ ∴ ص $= \pm\sqrt{\frac{144}{169}}$

∴ ص $= \pm\frac{12}{13}$ ، ∵ ص > 0

∴ ص $= \frac{12}{13}$

الدوال المثلثية

إذا كان : θ هو قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة(س ، ص)



فإن :

الدوال المثلثية

① جتا θ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{س}}{1}$ = س

$\cos\theta$

∴ جتا θ = الإحداثى السينى لنقطة ب

---

② حا θ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{ص}}{1}$ = ص

∴ حا θ = الإحداثى الصادى لنقطة ب

$\sin\theta$

---

③ طا θ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

$\tan\theta$

∴ طا θ = $\frac{\text{الإحداثى الصادى للنقطة ب}}{\text{الإحداثى السينى للنقطة ب}}$

ثالثاً : الهندسة

التشابه — تشابه المضلعات

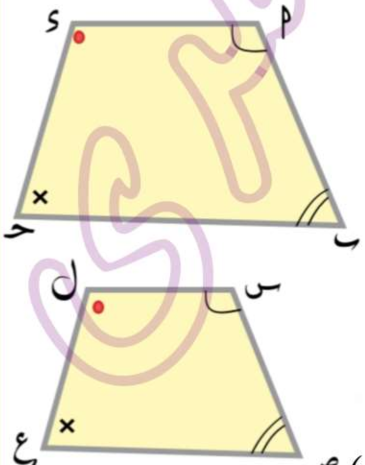
تعريف

يقال للمضلعين م١ ، م٢ (لهما نفس العدد من الأضلاع) أنهما متشابهان إذا تحقق الشرطان الآتيان معاً

① تساوى قياسات زواياهما المتناظرة

② تناسبت أطوال أضلاعهما المتناظرة

فى الشكل المقابل



فى المضلعين :

أ ب جـ د ، س ص ع ل

إذا كان :

① ق(∠أ) = ق(∠س)

، ق(∠ب) = ق(∠ص)

، ق(∠جـ) = ق(∠ع)

، ق(∠د) = ق(∠ل)

∴ قياسات زواياهما المتناظرة متساوية

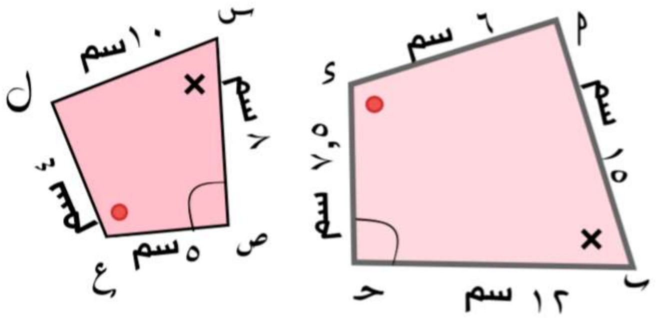
② $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{أ د}}{\text{ل س}}$

∴ أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة

∴ **المضلع** أ ب جـ د ~ **المضلع** س ص ع ل

مثال ①

بين هل المضلعين أ ب جـ د ، س ص ع ل **متشابهين أم لا ؟**



الحل

في المضلعين أ ب جـ د ، ل س ص ع

∵ ق(∠أ) = ق(∠ل)

، ق(∠ب) = ق(∠س)

، ق(∠جـ) = ق(∠ص)

∴ ق(∠د) = ق(∠ع)

∴ قياسات زواياهما المتناظرة متساوية

ومن الرسم و العلامات التى تحدد الزوايا المتساوية

نعين كل ضلعين متناظرين و نوجد النسبة بينهما

$\frac{\text{أ ب}}{\text{س ل}} = \frac{١٥}{١٠} = \frac{٣}{٢}$ ← ①

$\frac{\text{ب جـ}}{\text{س ص}} = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$ ← ②

$\frac{\text{جـ د}}{\text{ع ص}} = \frac{٧,٥}{٥} = \frac{٣}{٢}$ ← ③

$\frac{\text{أ د}}{\text{ع ل}} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$ ← ④

من ①، ②، ③، ④ نجد أن :

$$\frac{\text{أب}}{\text{سل}} = \frac{\text{بجـ}}{\text{سص}} = \frac{\text{جـد}}{\text{عص}} = \frac{\text{دأ}}{\text{لع}}$$

∴ أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة

∴ المضلع أبجـد ~ المضلع لسصع

ملحوظة

إذا ذكر في المسألة أن

المضلع أبجـد ~ المضلع سصعل فإننا نستنتج أن :

① قياسات زواياهما المتناظرة متساوية

ق(∠أ) = ق(∠س)

، ق(∠ب) = ق(∠ص)

، ق(∠جـ) = ق(∠ع)

، ق(∠د) = ق(∠ل)

② أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة

$$\frac{\text{أب}}{\text{سص}} = \frac{\text{بجـ}}{\text{صع}} = \frac{\text{جـد}}{\text{عل}} = \frac{\text{دأ}}{\text{لس}}$$

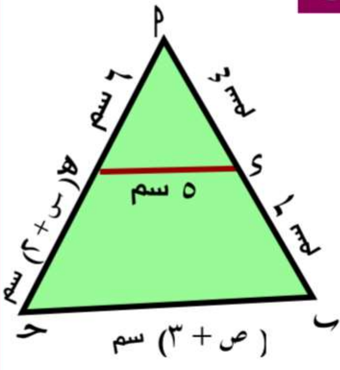
مثال ②

في الشكل المقابل

إذا كان △أبجـ ~ △أدهـ

① اثبت أن : $\overline{\text{دهـ}}$ // $\overline{\text{بجـ}}$

② أوجد قيمتي س ، ص



الحل

∵ △أبجـ ~ △أدهـ

∴ ق(∠أبجـ) = ق(∠أدهـ)

وهما زاويتان متناظرتان

∴ $\overline{\text{دهـ}}$ // $\overline{\text{بجـ}}$

، ∵ △أبجـ ~ △أدهـ

$$∴ \frac{\text{أب}}{\text{أد}} = \frac{\text{بجـ}}{\text{دهـ}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{أهـ}}$$

$$∴ \frac{١٠}{٤} = \frac{ص + ٣}{٥} = \frac{س + ٨}{٦}$$

$$∴ ص + ٣ = \frac{٥ × ١٠}{٤} = ١٢,٥$$

∴ ص = ١٢,٥ − ٣ = ٩,٥

$$∴ س + ٨ = \frac{٦ × ١٠}{٤} = ١٥$$

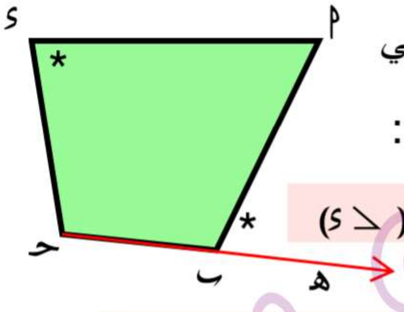
∴ س = ١٥ − ٨ = ٧

تذكر أن

في الشكل الرباعي أبجـد إذا كان :

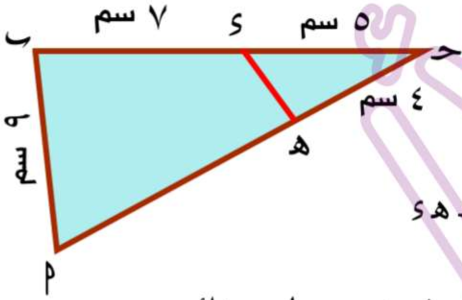
ق(∠أبهـ) = ق(∠د)

فإن الشكل أبجـد يكون دائرياً



مثـــال ③

في الشكل المقابل



إذا كان :

Δ جـ ب أ ~ Δ جـ هـ د

اثبت أن : الشكل أ هـ د ب رباعي دائري .

أوجد طول كلا من $\overline{\text{هـ د}}$ ، $\overline{\text{هـ أ}}$

الحـــل

① ∵ Δ جـ ب أ ~ Δ جـ هـ د

∴ ق(∠ جـ ب أ) = ق(∠ جـ هـ د)

∴ في الشكل الرباعي أ هـ د ب وجد زاوية خارجة عند رأس من رؤوسه قياسها يساوي قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها

∴ الشكل أ هـ د ب رباعي دائري .

② ، ∵ Δ جـ ب أ ~ Δ جـ هـ د

$$\frac{\text{جـ ب}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{جـ د}}$$

$$\therefore \frac{١٢}{٤} = \frac{٩}{\text{د هـ}} = \frac{\text{جـ أ}}{٥}$$

$$\therefore \text{د هـ} = \frac{٤ \times ٩}{١٢} = \frac{٣٦}{١٢} = ٣\text{سم}$$

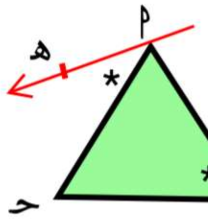
$$، \text{جـ أ} = \frac{١٢ \times ٥}{٤} = \frac{٦٠}{٤} = ١٥\text{سم}$$

∴ أ هـ + ٤ = ١٥

∴ أ هـ = ١٥ - ٤ = ١١سم

تذكر أن

في الشكل المقابل



إذا كان

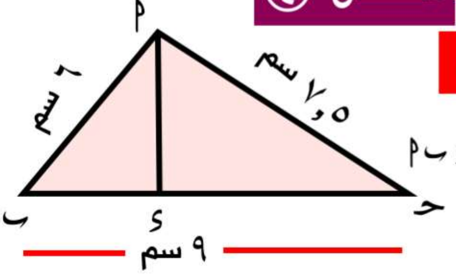
ق(∠ جـ أ هـ) = ق(∠ ب)

فإن :

$\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب جـ

مثـــال ④

في الشكل المقابل



Δ أ ب جـ ~ Δ د ب أ

① اثبت أن $\overline{\text{أ ب}}$ مماسة للدائرة المارة برؤوس Δ أ د جـ

② اثبت أن : أ ب وسط متناسب بين ب د ، ب جـ

③ باستخدام الأطوال على الرسم أوجد طول كلا من $\overline{\text{أ د}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$

الحـــل

① ∵ Δ أ ب جـ ~ Δ د ب أ

∴ ق(∠ أ جـ ب) = ق(∠ د أ ب)

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ د جـ

② ∵ Δ أ ب جـ ~ Δ د ب أ

∴ أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة

$$\therefore \frac{\text{أ ب}}{\text{ب د}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ب أ}}$$

∴ $(\text{أ ب})^2$ = ب د × ب جـ

∴ أ ب وسط متناسب بين ب د ، ب جـ

(٣) ∵ Δ أ ب جـ ~ Δ د ب أ

∴ أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{دب}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{د أ}}$

$\frac{٦}{\text{دب}} = \frac{٩}{٦} = \frac{٧{,}٥}{\text{د أ}}$ ∴ دب $= \frac{٦ \times ٦}{٩} = ٤$ سم

، ∵ ب جـ = ٩سم ∴ ٤ + د جـ = ٩سم

∴ د جـ = ٩ - ٤ = ٥سم

، د أ $= \frac{٦ \times ٧{,}٥}{٩} = ٥$ سم

معامل التشابه

عندما يتشابه المضلعان أ ب جـ د ، س ص ع ل فإن :

$\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{أ د}}{\text{س ل}} =$ مقدار ثابت

و هذا المقدار الثابت يسمى معامل التشابه

و يكون أيضا :

(١) $\frac{\text{أ ب} + \text{ب جـ}}{\text{س ص} + \text{ص ع}} =$ معامل التشابه

(٢) $\frac{\text{محيط المضلع أ ب جـ د}}{\text{محيط المضلع س ص ع ل}} =$ معامل التشابه

(٣) $\frac{٢\text{أ ب} - ٣\text{أ د}}{٢\text{س ص} - ٣\text{س ل}} =$ معامل التشابه

مثال (٥)

إذا كان المضلع أ ب جـ د ~ المضلع س ص ع ل

وكان : $\frac{٢\text{أ ب} + ٣\text{ب جـ}}{٢\text{س ص} + ٣\text{ص ع}} = \frac{٤}{٥}$

و كان : جـ د = ٣٢سم أوجد طول $\overline{\text{ع ل}}$

الحل

∵ المضلع أ ب جـ د ~ المضلع س ص ع ل

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{أ د}}{\text{س ل}} = \text{م}$

بضرب حدي النسبة الأولى × ٢ والنسبة الثانية × ٣

وجمع المقدمات و التوالي

فإن : $\text{م} = \frac{٢\text{أ ب} + ٣\text{ب جـ}}{٢\text{س ص} + ٣\text{ص ع}}$

، ∵ $\frac{٢\text{أ ب} + ٣\text{ب جـ}}{٢\text{س ص} + ٣\text{ص ع}} = \frac{٤}{٥}$ ∴ $\text{م} = \frac{٤}{٥}$

∴ معامل التشابه $= \frac{٤}{٥}$

∴ $\frac{\text{طول أي ضلع}}{\text{طول المناظر له}} = \frac{٤}{٥}$

∴ $\frac{\text{جـ د}}{\text{ع ل}} = \frac{٤}{٥}$ ∴ $\frac{٣٢}{\text{ع ل}} = \frac{٤}{٥}$

∴ ع ل $= \frac{٥ \times ٣٢}{٤} = ٤٠$ سم

ملحوظة

فى المضلعات المتشابهة يكون :

$\frac{\text{طول ضلع المضلع الأول}}{\text{طول ضلع المضلع الثاني}} = \frac{\text{محيط المضلع الأول}}{\text{محيط المضلع الثاني}}$

مثال (٦)

النسبة بين طولي ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين هي ١ : ٣ فإذا كان محيط الأكبر ٣٦سم و محيط الأصغر (٢س+١)سم فما قيمة س ؟

الحل

∵ المضلعان متشابهان

$\because \dfrac{\text{طول ضلع في الأكبر}}{\text{طول نظيره في الأصغر}} = \dfrac{\text{محيط المضلع الأكبر}}{\text{محيط المضلع الأصغر}}$

$\therefore \dfrac{١}{٣} = \dfrac{٢\text{س} + ١}{٣٦}$

$\therefore ٢\text{س} + ١ = ١٢$

$\therefore ٢\text{س} = ١١$

$\therefore \text{س} = ٥,٥$

مثال ⑦

م١ ، م٢ ، م٣ ثلاث مضلعات لها نفس العدد من الاضلاع ومتشابهة و كان :

ك١ هو معامل تشابه المضلع م١ للمضلع م٢

، ك٢ هو معامل تشابه المضلع م١ للمضلع م٣

فإن معامل تشابه المضلع م٢ للمضلع م٣ هو.....

الحل

$\because \text{م}_١ \sim \text{م}_٢ \sim \text{م}_٣$

$\dfrac{\text{محيط م}_١}{\text{محيط م}_٢} = \text{ك}_١ \quad \therefore \text{محيط م}_٢ = \dfrac{\text{محيط م}_١}{\text{ك}_١}$

$، \because \dfrac{\text{محيط م}_١}{\text{محيط م}_٣} = \text{ك}_٢ \quad \therefore \text{محيط م}_٣ = \dfrac{\text{محيط م}_١}{\text{ك}_٢}$

$\because$ معامل تشابه المضلع م٢ للمضلع م٣

$= \dfrac{\text{محيط م}_٢}{\text{محيط م}_٣}$

$= \dfrac{\text{محيط م}_١}{\text{ك}_١} \div \dfrac{\text{محيط م}_١}{\text{ك}_٢}$

$= \dfrac{\cancel{\text{محيط م}_١}}{\text{ك}_١} \times \dfrac{\text{ك}_٢}{\cancel{\text{محيط م}_١}}$

$= \dfrac{\text{ك}_٢}{\text{ك}_١}$

مثال ⑧

م١ ، م٢ ، م٣ ثلاث مضلعات لها نفس العدد من الاضلاع ومتشابهة و كان ، ك١ هو معامل تشابه م١ للمضلع م٢ ، ك٢ هو معامل تشابه م٢ للمضلع م٣ فإن معامل تشابه المضلع م١ للمضلع م٣ هو.....

الحل

....

....

....

....

....

....

ملحوظة

إذا كان المضلع م١ ~ المضلع م٢ و كان

ك هو معامل تشابه المضلع الأول للمضلع الثاني

فإذا كان :

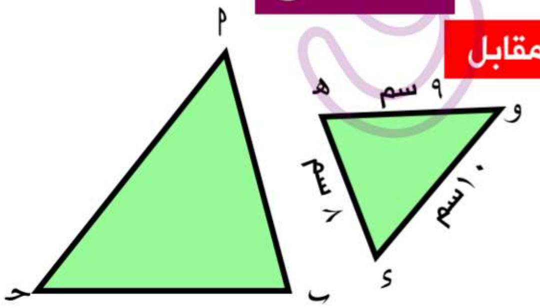
① ك > ١: كان المضلع الأول تكبير للمضلع الثاني .

② ٠< ك < ١: كان المضلع الأول تصغير للمضلع الثاني .

③ ك= ١ : كان المضلعان متطابقان .

مثال ⑨

في الشكل المقابل



Δ ٩ب حـ ~ Δ ءهو ، ءه=٨سم

، هو = ٩سم ، وء= ١٠سم

فإذا كان محيط Δ ٩ب حـ = ٨١ سم

أوجد : أطوال أضلاع Δ ٩ب حـ

الحل

∵ محيط Δ ءهو = ٨+٩+١٠ = ٢٧

، ∵ Δ ٩ب حـ ~ Δ ءهو

∴ $\frac{\text{محيط } \Delta \text{ ٩ب حـ}}{\text{محيط } \Delta \text{ ءهو}} = \frac{\text{٩ب}}{\text{ءه}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{هو}} = \frac{\text{٩حـ}}{\text{ءو}}$

∴ $\frac{\text{٨١}}{\text{٢٧}} = \frac{\text{٩ب}}{\text{ءه}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{هو}} = \frac{\text{٩حـ}}{\text{ءو}}$

∴ $\frac{\text{٣}}{\text{١}} = \frac{\text{٩ب}}{\text{٨}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{٩}} = \frac{\text{٩حـ}}{\text{١٠}}$

∴ ٩ب=٣×٨=٢٤سم

، ب حـ=٣×٩=٢٧سم

، ٩حـ= ٣×١٠ = ٣٠سم

مثال ١٠

المضلع ٩ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل

فإذا كان : ٩ب=٣٢سم ، ب حـ=٤٠سم ،

س ص=٣م-١ ، ص ع=٣م+١ أوجد قيمة م العددية

الحل

∵ المضلع ٩ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل

∴ $\frac{\text{٩ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{ء٩}}{\text{ل س}} = \text{م}$

∴ $\frac{\cancel{\text{٣٢}}^{\text{٤}}}{\text{٣م-١}} = \frac{\cancel{\text{٤٠}}^{\text{٥}}}{\text{٣م+١}}$ ∴ $\frac{\text{٤}}{\text{٣م-١}} = \frac{\text{٥}}{\text{٣م+١}}$

∴ ٤(٣م+١) = ٥(٣م-١)

١٢م+٤ = ١٥م -٥

٥+٤=١٥م-١٢م

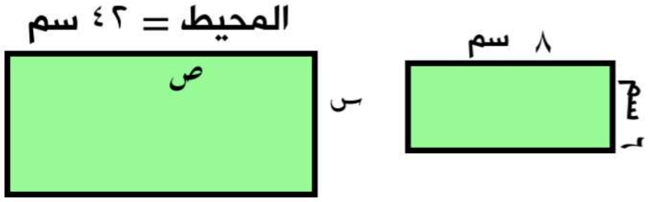
٩ = ٣م

∴ م= ٣

مثال ١١

مستطيلان متشابهان بعدا الأول هما ٦سم ، ٨سم و محيط الثاني ٤٢سم احسب **مساحة** المستطيل الثاني

الحل



∵ محيط المستطيل الأول =(الطول + العرض)×٢

=(٨+٦)×٢=٢٨سم

، محيط المستطيل الثاني = ٤٢سم

∴ $\frac{\text{٢٨}}{\text{٤٢}} = \frac{\text{٦}}{\text{س}} = \frac{\text{٨}}{\text{ص}}$

∴ س= $\frac{\text{٦×٤٢}}{\text{٢٨}}$ = ٩سم

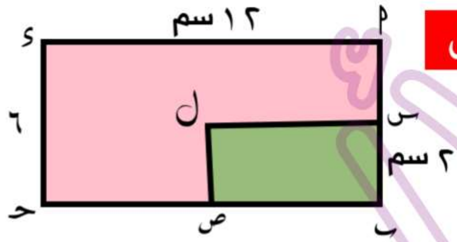
، ص= $\frac{\text{٨×٤٢}}{\text{٢٨}}$ = ١٢سم

∵ مساحة المستطيل = الطول × العرض

∴ مساحة المستطيل الثاني = ٩×١٢=١٠٨سم٢

مثـــال (١٢)

فى الشكل المقابل



المستطيل أ ب حـ ء ~ المستطيل س ب ص ل

فأوجد طول : $\overline{\text{ص حـ}}$

الحـــل

∵ المستطيلان متشابهان

∴ $\frac{\text{عرض الأصغر}}{\text{عرض الأكبر}} = \frac{\text{طول الأصغر}}{\text{طول الأكبر}}$

∴ $\frac{٢}{٦} = \frac{\text{ب ص}}{١٢}$

∴ ب ص $= \frac{٢ \times ١٢}{٦} =$ ٤سم

، ب حـ = أ ء = ١٢سم

∴ ب ص + ص حـ = ١٢ سم

∴ ٤ + ص حـ = ١٢ ∴ ص حـ = ٨سم

التشابه فى المضلعات المنتظمة

جميع المضلعات المنتظمة التي لها نفس العدد من الأضلاع متشابهة لأنها تحقق شرطا التشابه .

- جميع المثلثات المتساوية الأضلاع متشابهة .
- جميع المربعات متشابهة .
- جميع الاشكال الخماسية المنتظمة متشابهة .

التشابه والتطابق

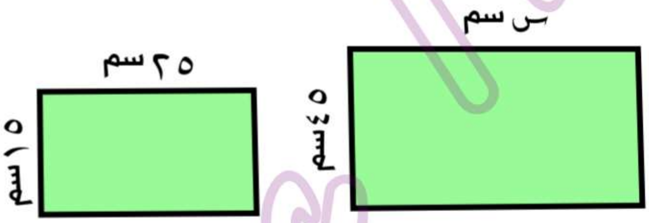
المضلعان المتطابقان متشابهان ،

و معامل تشابهما = ١

تمارين على تشابه المضلعات

① إذا كان المستطيلان الموضحان متشابهين

فما قيمة: س ؟



الحل

② لدينا النقاط : ا (-٦ ، ٥) ، ب (-٦ ، -٥)

، حـ (-٣ ، -٥) ، ء (-٣ ، ٥) ، و (٦ ، ٠)

، س (٦ ، ٣٠) ، ص (١٨ ، ٣٠) ، ع (١٨ ، ٠)

هل المستطيل ا ب حـ ء يشابه المستطيل و س ص ع ؟

الحل

③ مستطيل بعداه ٩سم ، ٦سم مشابه لمستطيل آخر محيطه ٢٠ سم أوجد طول المستطيل الآخر ومساحته ؟

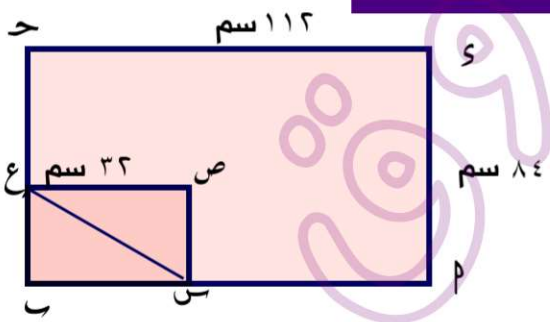
الحل

④ يستخدم أستاذ جامعى جهاز عرض أثناء إلقاء المحاضرات . قدم الأستاذ شريحة عرض عرضها ٦ بوصات و ارتفاعها ٣ بوصات على شكل صورة عرضها $\frac{١}{٢}$ ٥٠ بوصة

أوجد ارتفاع الصورة المعروضة

الحل

⑤ فى الشكل المقابل



إذا كان المستطيل ا ب حـ ء يشابه المستطيل س ب ع ص فأوجد طول $\overline{\text{س ع}}$

الحل

....

⑥ إذا كانت النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين ١ : ٦ و طول احد أضلاع المضلع الاصغر ٤ سم فأوجد طول الضلع المناظر فى المضلع الأكبر

الحل

....

⑦ إذا كان معامل التشابه المضلع أ ب حـ ء إلى المضلع هـ و ز ع هو $\frac{٧}{٤}$ و معامل تشابه المضلع س ص ع ل إلى المضلع هـ و ز ع هو $\frac{١}{٢}$ فأوجد معامل تشابه المضلع أ ب حـ ء إلى المضلع س ص ع ل

الحل

....

⑧ المربع والمستطيل ....

أ متشابهان   ب متطابقان

حـ متناسبان   ء غير متشابهين

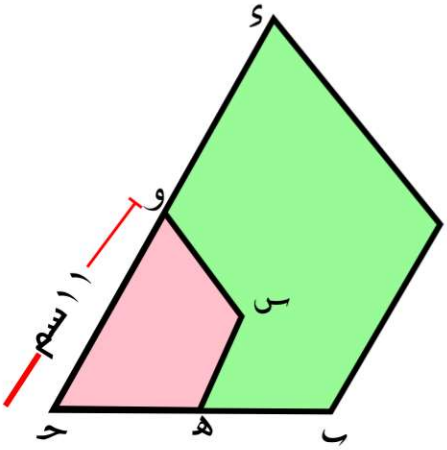
⑨ في الشكل الآتي

إذا كان : أ ب حـ ء ~ س هـ حـ و

س هـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب

، حـ و = ١١ سم

فأوجد طول $\overline{\text{و ء}}$



الحل

....

⑩ إذا كان معامل التشابه لمضلعين متشابهين يساوي ١ فإن المضلعين ....

أ متشابهان   ب متطابقان

حـ متناسبان   ء غير متشابهين

(١١) مستطيل يشابه مستطيلاً آخر بعداه ١٤ سم ، ٥ سم إذا كان معامل تشابه المستطيل الأول والمستطيل الثاني هو ٨ فما مساحة المستطيل الأول

الحـــل

....

....

....

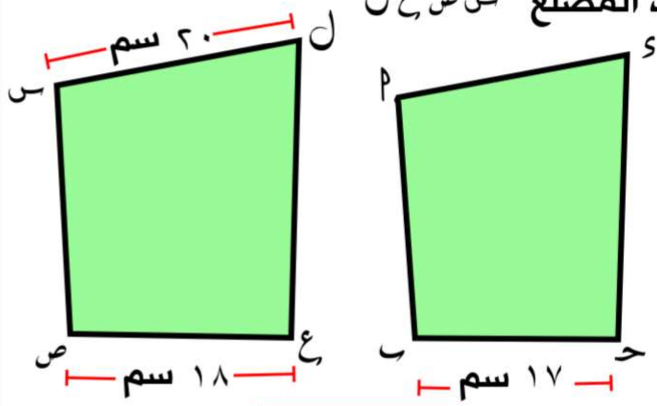
(١٢) إذا كان : أ ب جـ د ~ س ص ع ل

فإن : $\frac{\text{ب جـ} + \text{ص ع}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{س ص} + ...}{\text{س ص}}$

(أ) أ د	(ب) أ ب	(جـ) ب جـ
(د) جـ د	(هـ) ص ع	

(١٣) في الشكل الآتي

إذا كان المضلع أ ب جـ د ~ المضلع س ص ع ل ، ومحيط المضلع أ ب جـ د يساوي ١٠٢ ، فإحسب محيط المضلع س ص ع ل

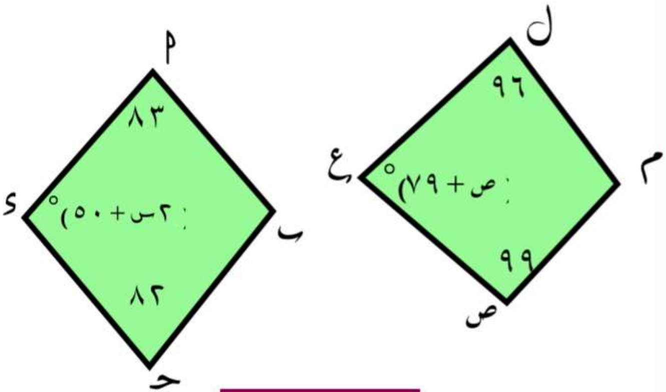


الحـــل

....

....

(١٤) إذا كان المضلع أ ب جـ د يشابه المضلع م ص ع ل فأوجد قيمتي س ، ص



الحـــل

....

....

....

....

(١٥) النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين ٣:١ إذا كان طول أحد أضلاع المضلع الأصغر ٦سم وكان طول الضلع المناظر بالأكبر(س-٥) سم . فما قيمة س؟

الحـــل

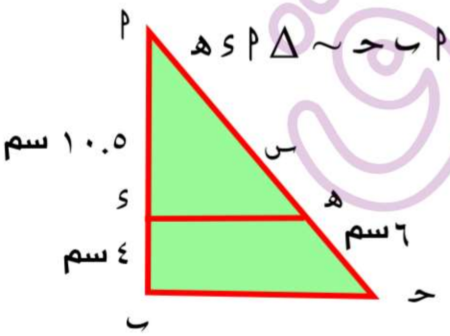
....

....

....

(١٦) إذا كان △ أ ب جـ ~ △ أ د هـ

فما قيمة س ؟



⑰ لكي يتشابه المضلعان م١ ، م٢ يكون كافياً الحصول على..............

(أ) زواياهما المتناظرة متساوية في القياس فقط (ب) اطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة فقط

(جـ) (أ) ، (ب) معاً (د) اطوال أضلاعهما المتناظرة متساوية في الطول

---

⑱ أي مما يأتي صحيح؟

(أ) كل المربعات متطابقة (ب) كل المضلعات المتنظمة متشابهة

(جـ) كل المعينات متشابهة (د) كل المثلثات المتساوية الأضلاع متشابهة

---

⑲ مستطيلان متشابهان بعدا الأول ١٢سم ، ٨سم ، ومحيط الثاني ٦٠ سم فإن طول المستطيل الثاني = ...سم

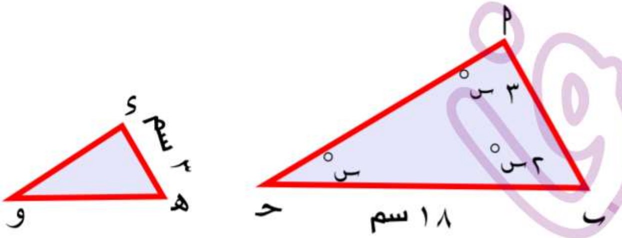
(أ) ١٢ (ب) ١٦ (جـ) ١٨ (د) ٢٤

---

⑳ إذا كان :Δ أ ب حـ ~ Δ ء هـ و، أ ب=٣سم ،ء هـ=٦سم ،هـ و=٨سم فإن ب حـ=........سم

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١,٥

㉑ إذا كان :Δ أ ب حـ ~ Δ ء هـ و فإن و هـ=........سم



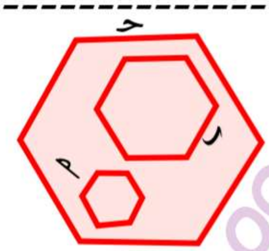
(أ) ٤ (ب) ٣

(جـ) ٦ (د) ٨

㉒ الشكل المقابل يوضح ثلاثة أشكال سداسية منتظمة النسبة بين اطوال أضلاعهم كما يلى : أ:ب= ١:٢ ، ب:حـ=٣:٨

فإذا كان طول ضلع المسدس الأكبر=٣٢سم فإن

محيط المسدس الأصغر = ...سم



(أ) ١٢ (ب) ٤٨ (جـ) ٣٦ (د) ٦

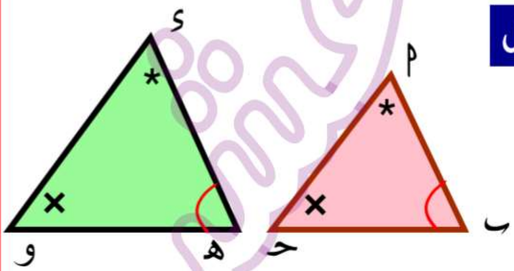
الدرس الثاني تشابه المثلثات

الحالة الأولى لتشابه مثلثين

مسلمة

إذا طابقت زاويتان فى مثلث نظائرهما فى مثلث آخر كان المثلثان متشابهين

فى الشكل المقابل



فى △ أ ب حـ ، △ ء هـ و

ق(أ̂) = ق(ء̂)

، ق(ب̂) = ق(هـ̂)

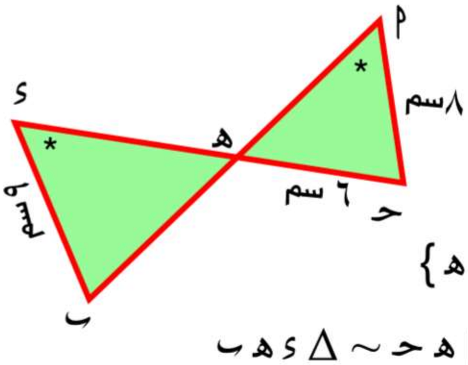
∴ قياسات زواياهما المتناظرة متساوية

∴ △ أ ب حـ ~ △ ء هـ و

وينتج من التشابه أن : $\frac{أب}{ءهـ} = \frac{بحـ}{هـو} = \frac{حـأ}{وء}$

مثـــال ①

فى الشكل المقابل



ق(أ̂) = ق(ء̂)

$\overline{أب} \cap \overline{ءحـ} = \{هـ\}$

① أثبت أن : △ أ هـ حـ ~ △ ء هـ ب

② أوجد : طول $\overline{هـب}$

الحـــل

∵ $\overline{أب} \cap \overline{ءحـ} = \{هـ\}$ ⟵ ①

∴ ق(أ هـ̂ حـ) = ق(ء هـ̂ ب) بالتقابل بالرأس

، ق(أ̂) = ق(ء̂) معطى ⟵ ②

∴ △ أ هـ حـ ، △ ء هـ ب

زواياهما المتناظرة متساوية فى القياس

∴ △ أ هـ حـ ~ △ ء هـ ب (أولاً)

وينتج من التشابه أن :

∴ $\frac{أهـ}{ءهـ} = \frac{هـحـ}{هـب} = \frac{أحـ}{ءب}$

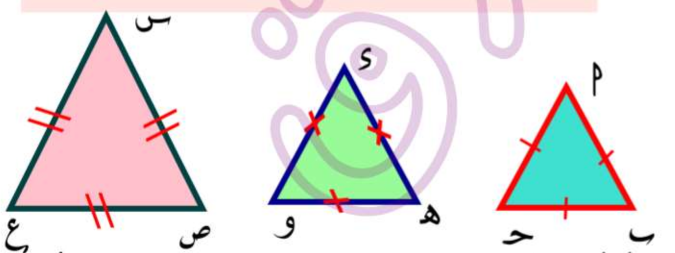
∴ $\frac{٦}{هـب} = \frac{٨}{٩}$

∴ هـ ب = $\frac{٩ \times ٦}{٨}$

∴ هـ ب = ٦,٧٥ سم

ملاحظات

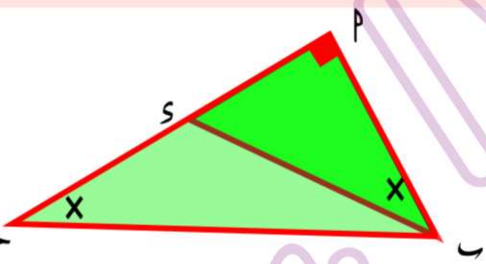
① جميع المثلثات المتساوية الأضلاع متشابهة



المثلثات أ ب حـ ، ء هـ و ، س ص ع متساوية الأضلاع

∴ △ أ ب حـ ~ △ ء هـ و ~ △ س ص ع

② **يتشابه المثلثان القائما الزاوية إذا ساوى قياس زاوية حادة فى أحدهما قياس زاوية حادة فى الآخر**

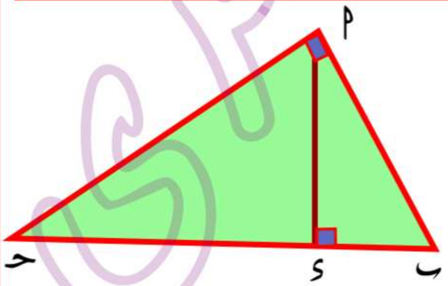


Δ أ حـ ب ، Δ أ ب ء قائما الزاوية فى ∠ أ

ق(أ بَ ء) = ق(أ حَ ب)

∴ Δ أ ب ء ~ Δ حـ أ ب

في الشكل المقابل



ⓐ **المثلثان أ ب حـ ، ء ب أ قائما الزاوية ، ∠ ب زاوية حادة مشتركة فى المثلثين**

∴ Δ أ ب حـ ~ Δ ء ب أ

وينتج من التشابه أن : $\frac{أ ب}{ء ب} = \frac{ب حـ}{ب أ} = \frac{أ حـ}{أ ء}$

ويكون :∵ $(أ ب)^2 = ب ء \times ب حـ$

، $أ ء = \frac{ب أ \times أ حـ}{ب حـ} = \frac{\text{حاصل ضرب طولي ضلعي القائمة}}{\text{طول الوتر}}$

ⓑ **المثلثان أ ب حـ ، ء أ حـ قائما الزاوية ، ∠ حـ زاوية حادة مشتركة فى المثلثين**

∴ Δ أ ب حـ ~ Δ ء أ حـ

وينتج من التشابه أن : $\frac{أ ب}{ء أ} = \frac{ب حـ}{أ حـ} = \frac{أ حـ}{ء حـ}$

ويكون :∵ $(أ حـ)^2 = ء حـ \times ب حـ$

ⓒ **المثلثان ء ب أ ، ء أ حـ قائما الزاوية ، كلاهما يشابه المثلث أ ب حـ**

∴ Δ ء ب أ ~ Δ ء أ حـ

وينتج من التشابه أن : $\frac{ء ب}{ء أ} = \frac{أ ب}{أ حـ} = \frac{ء أ}{ء حـ}$

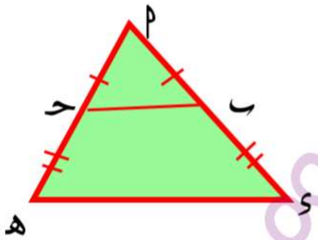
ويكون :∵ $(ء أ)^2 = ء ب \times ء حـ$

③ **يتشابه المثلثان المتساويا الساقين إذا ساوى :**

ⓐ قياس زاوية الرأس في أحدهما قياس زاوية الرأس في الآخر .

ⓑ قياس إحدى زاويتي القاعدة في أحدهما قياس إحدى زاويتي القاعدة في الآخر .

أ في الشكل المقابل :

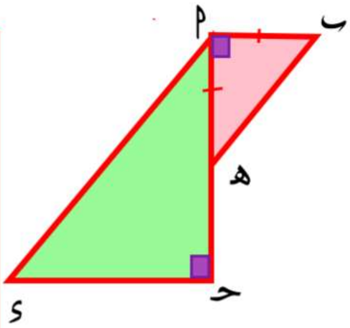


المثلثان أ ب حـ ، أ ء هـ متساويا الساقين

∠ أ زاوية رأس فيهما مشتركة

∴ Δ أ ب حـ ~ Δ أ ء هـ

ب **في الشكل المقابل**



في ∆ ب أ هـ ، ∆ أ جـ د

إذا كان : $\overline{\text{أ ب}}$ = $\overline{\text{أ هـ}}$

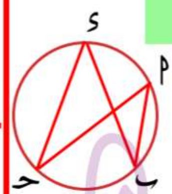
، أ جـ = جـ د

، ق(∠ ب أ هـ) = ق(∠ أ جـ د)

∴ ∆ ب أ هـ ~ ∆ د جـ أ

تذكر أن

① الزاويتان المحيطيتان المشتركتان في نفس القوس تكونان متساويتان في القياس .



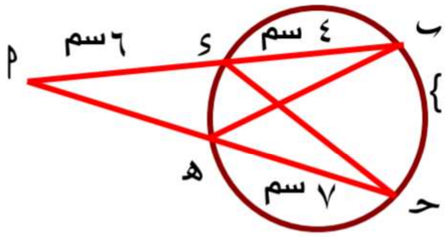
في الشكل المقابل :

ق(∠ ب أ جـ) = ق(∠ ب د جـ)

لأنهما زاويتان محيطيتان مشتركتان في نفس القوس $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$

مثال ②

في الشكل المقابل



$\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$ = {أ}

① اثبت أن : ∆ أ هـ ب ~ ∆ أ د جـ

② أوجد : طول $\overline{\text{أ جـ}}$

الحل

في المثلثين أ هـ ب ، أ د جـ

∵ ق∠(ب) = ق∠(جـ) ⟵ ②

(محيطيتان مشتركتان في نفس القوس $\overset{\frown}{\text{د هـ}}$)

، ∠ أ **مشتركة** ⟵ ①

من ① ، ②

∴ ∆ أ هـ ب ~ ∆ أ د جـ **(المطلوب أولا)**

∵ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ د}} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

$\frac{\text{أ هـ}}{٦} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{د جـ}} = \frac{١٠}{\text{أ هـ} + ٧}$

أ هـ(أ هـ + ٧) = ٦ × ١٠

∴ $(\text{أ هـ})^2$ + ٧أ هـ - ٦٠ = ٠

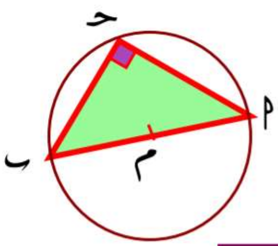
∴ (أ هـ - ٥)(أ هـ + ١٢) = ٠

∴ أ هـ = ٥سم أو أ هـ = -١٢سم (مرفوض)

∴ أ جـ = ٥ + ٧ = ١٢سم

② الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة تكون قائمة .

في الشكل المقابل

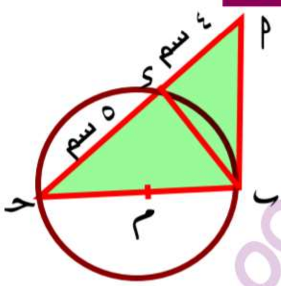


∵ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة

∴ ق(∠ أ جـ ب) = ٩٠°

مثال ③

في الشكل المقابل



دائرة مركزها م

، $\overline{\text{أ ب}}$ **مماسة لها**

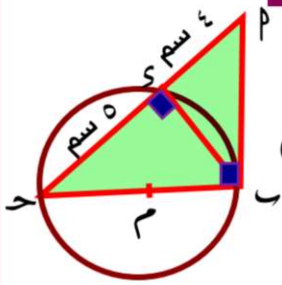
، أ ∈ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ **قطر**

في الدائرة

① **اثبت أن :** ∆ أ ب د ~ ∆ ب جـ د

② **أوجد : طول** $\overline{\text{ب د}}$

الحل



∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس للدائرة عند ب

∴ ق(∠أ ب حـ) = ٩٠° ← ①

، ∵ $\overline{\text{ب حـ}}$ قطر في الدائرة

∴ ق(∠ب ء حـ) = ٩٠° ← ②

∴ Δ أ ب حـ **قائم الزاوية فى ب**

، $\overline{\text{ب ء}} \perp \overline{\text{أ حـ}}$ ∴ Δ أ ء ب ~ Δ ب ء حـ

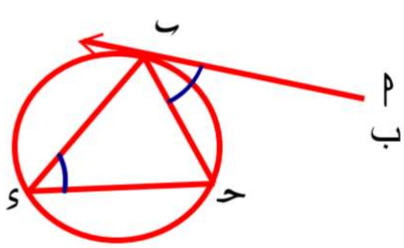
∴ (ب ء)² = أ ء × ء حـ **(نتيجة)**

∴ (ب ء)² = ٤ × ٥ = ٢٠ ∴ ب ء = √٢٠ = ٢√٥ سم

المضلعان المشابهان لثالث متشابهان

③ قياس الزاوية المماسية تساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في نفس القوس .

فى الشكل المقابل



$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس للدائرة عند ب

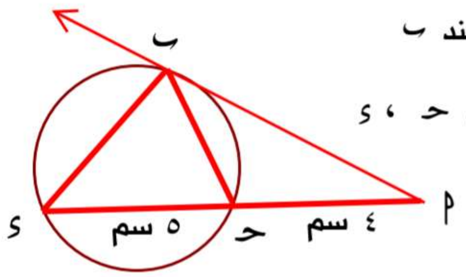
∴ ق(∠أ ب حـ) المماسية = ق(∠ب ء حـ) المحيطية

مثال ④

فى الشكل الآتي

$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ **مماس للدائرة عند ب**

، $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ **قاطع لها في حـ ، ء**



① اثبت أن : Δ أ ب حـ ~ Δ أ ء ب

② أوجد : طول $\overline{\text{أب}}$

الحل

∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس للدائرة عند ب

∴ ق∠(أ ب حـ) = ق∠(ء)

∴ في المثلثين أ ب حـ، أ ء ب

، ∠(أ) مشتركة

ق∠(أ ب حـ) = ق∠(أ ء ب)

∴ Δ أ ب حـ ~ Δ أ ء ب ← ①

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{أ ب}}$

$\frac{\text{أ ب}}{٩} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ب ء}} = \frac{٤}{\text{أ ب}}$

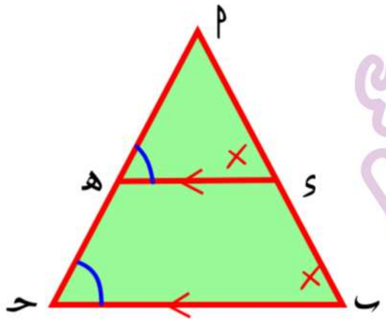
∴ (أ ب)² = ٤ × ٩ = ٣٦

∴ أ ب = √٣٦ = ٦سم ← ②

نتيجة ①

(إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث و يقطع الضلعين الآخرين فإن المثلث الناتج يشابه الأصلي)

في الشكل المقابل



في Δ أ ب جـ

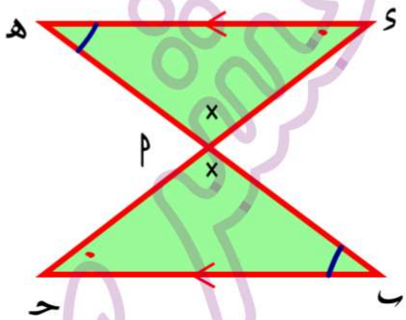
∵ د هـ // ب جـ

∴ Δ أ د هـ ~ Δ أ ب جـ

و ينتج أن :

أد / أب = أهـ / أجـ = دهـ / ب جـ

في الشكل المقابل



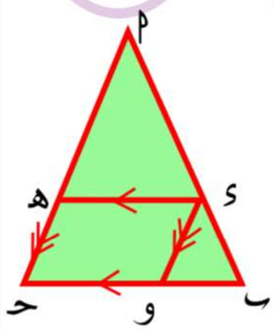
∵ د هـ // ب جـ

∴ Δ أ د هـ ~ Δ أ جـ ب

أد / أجـ = أهـ / أب = دهـ / جـ ب

مثال ⑤

في الشكل المقابل



أ ب جـ مثلث فيه :

د ∈ أب ، رسم د هـ // ب جـ

و يقطع أجـ في هـ

، د و // أجـ و يقطع ب جـ في و

برهن أن : Δ أ د هـ ~ Δ د ب و

الحل

∵ د هـ // ب جـ ∴ Δ أ د هـ ~ Δ أ ب جـ ← ①

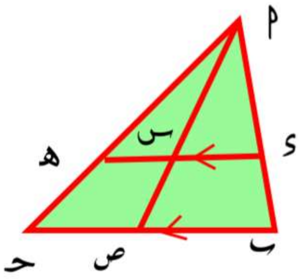
، د و // أجـ ∴ Δ د ب و ~ Δ أ ب جـ ← ②

من ① ، ② ينتج أن

Δ د ب و ~ Δ أ د هـ

مثال ⑥

في الشكل المقابل



د ∈ أ ب ، ص ∈ ب جـ

رسم د هـ فقطع أ ص في س

، وقطع أ جـ في هـ

① اذكر ثلاثة أزواج من المثلثات المتشابهة

② اثبت أن : د س / ب ص = س هـ / ص جـ = د هـ / ب جـ

الحل

∵ د هـ // ب جـ

∴ Δ أ ب جـ ~ Δ أ د هـ ← ①

، ∵ د س // ب ص

∴ Δ أ د س ~ Δ أ ب ص ← ②

، ∵ س هـ // ص جـ

∴ Δ أ س هـ ~ Δ أ ص جـ ← ③

① ، ② ، ③ ثلاثة أزواج من المثلثات المتشابهة

، ∵ Δ أ ب جـ ~ Δ أ د هـ

∴ أ ب / أ د = أ جـ / أ هـ = ب جـ / د هـ

، ∵ Δ أ ب ص ~ Δ أ د س

∴ أ ب / أ د = ب ص / د س = أ ص / أ س

، Δ أ ص ح ~ Δ أ س هـ ∴ $\frac{\text{أص}}{\text{أس}} = \frac{\text{أح}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{ص ح}}{\text{س هـ}}$

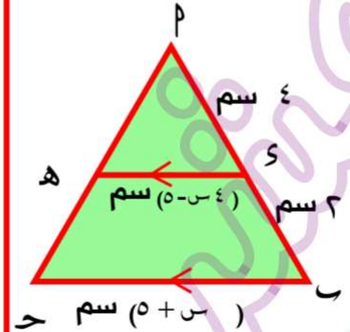
∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أء}} = \frac{\text{أح}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{ب ح}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ب ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{ص ح}}{\text{س هـ}}$

∴ $\frac{\text{ء س}}{\text{ب ص}} = \frac{\text{س هـ}}{\text{ص ح}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ب ح}}$

مثال ⑦

في الشكل المقابل

أوجد قيمة : س



الحل

في Δ أ ب ح ∵ $\overline{\text{ءهـ}} // \overline{\text{ب ح}}$

∴ Δ أ ء هـ ~ Δ أ ب ح

∴ $\frac{\text{أء}}{\text{أب}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ب ح}}$

∴ $\frac{٤}{٦} = \frac{4\text{س} - 5}{\text{س} + 5}$

∴ ٤س + ٢٠ = ٢٤س - ٣٠

∴ ٢٤س - ٤س = ٣٠ + ٢٠

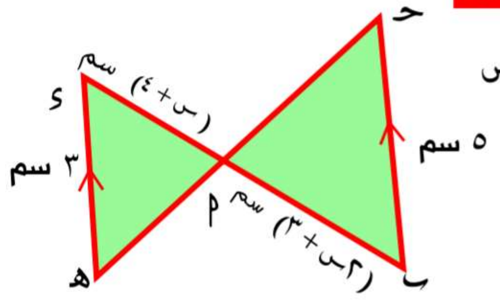
∴ ٢٠ س = ٥٠

∴ س = ٢,٥

مثال ⑧

في الشكل المقابل

أوجد قيمة : س



الحل

∵ $\overline{\text{ب ح}} // \overline{\text{ء هـ}}$

∴ Δ أ ب ح ~ Δ أ ء هـ

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أء}} = \frac{\text{ب ح}}{\text{ء هـ}} = \frac{٢\text{س} + ٣}{\text{س} + ٤} = \frac{٥}{٣}$

٦س + ٩ = ٥س + ٢٠

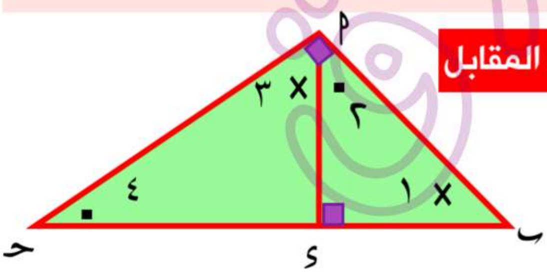
∴ ٦س - ٥س = -٩ + ٢٠

∴ س = ١١

نتيجة ②

إذا رسم من رأس القائمة في المثلث القائم الزاوية عموديا على الوتر إنقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكلاهما يشابه المثلث الأصلي .

في الشكل المقابل



Δ أ ب حـ قائم الزاوية في ∠ أ

، $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$

و نجد من الشكل : (∠١) تتمم(∠٢)

، ∠٣تتمم∠٢ ∴ ق(∠١)=ق(∠٣)

، (∠٣) تتمم(∠٤) ∴ ق(∠٢)=ق(∠٤)

∴ المثلثات ء ب أ ، ء أ حـ ، أ ب حـ

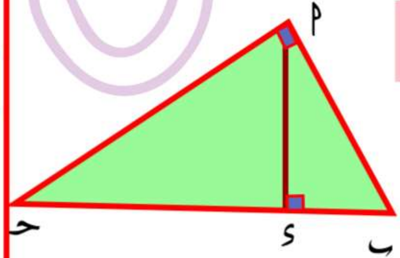
متشابهة و يمكن **ترتيب** رؤوسها كالتالي :

القائمة ، × ، ٠

Δ أ ب حـ ~ Δ ء أ حـ ~ Δ ء ب أ

و ينتج من التشابه أن :

أ ب / ء ب = ب حـ / ب أ = أ حـ / أ ء



∴ (أ ب)^٢ = ب ء × ب حـ

أ ء = (أ حـ × أ ب) / ب حـ

، ء ب / أ ء = ب أ / أ حـ = أ ء / ء حـ

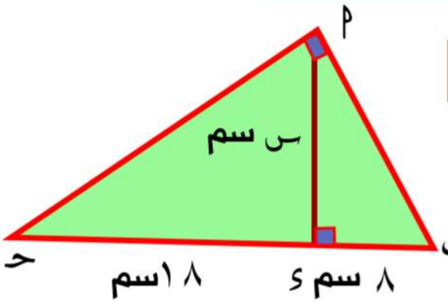
∴ (ء أ)^٢ = ء ب × ء حـ

، ب أ / ء أ = ب حـ / أ حـ = أ حـ / حـ ء

∴ (أ حـ)^٢ = حـ ء × حـ ب

مثـــال ⑨

فى الشكل المقابل



أوجد قيمة : س

الحـــل

∵ Δ أ ب حـ قائم الزاوية في أ ،

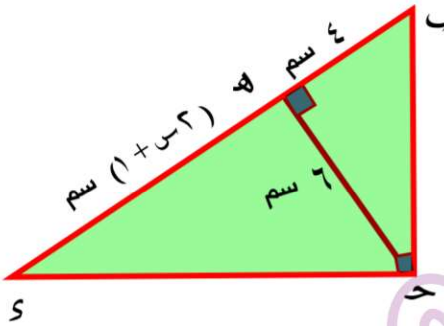
$\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$ من تشابه Δ ء ب أ ، Δ ء أ حـ

ينتج أن : (أ ء)^٢ = ء ب × ء حـ

∴ س^٢ = ٨ × ١٨ ∴ س = $\sqrt{٨ \times ١٨}$ = ١٢ سم

مثـــال ⑩

فى الشكل المقابل



أوجد قيمة : س

الحـــل

∵ Δ ب حـ ء قائم الزاوية في حـ ، $\overline{\text{حـ هـ}} \perp \overline{\text{ب ء}}$

∴ (حـ هـ)^٢ = هـ ب × هـ ء

∴ ٣٦ = ٤(٢س + ١)

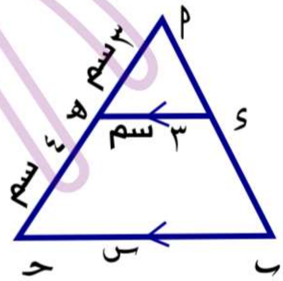
∴ ٣٦ = ٨س + ٤

∴ ٨س = ٣٢

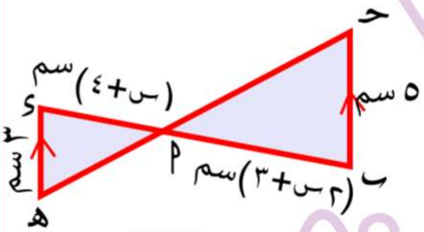
∴ س = ٤

تمارين على الحالة الأولي لتشابه مثلثين

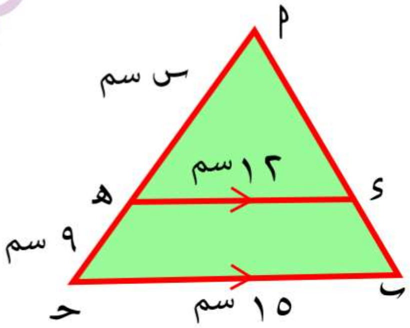
① فى كل من الاشكال الآتية أوجد قيمة : س



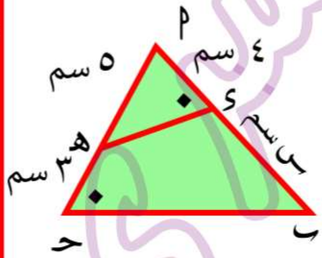
(أ)



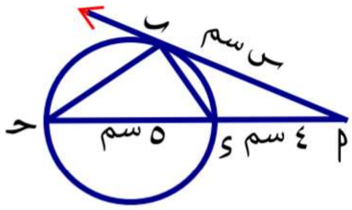
(ب)



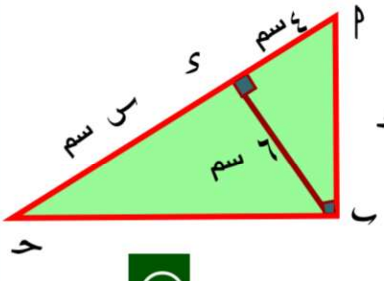
(جـ)



(د)

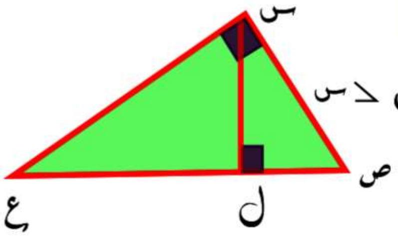


(هـ)



(و)

② فى الشكل المقابل



△ س ص ع قائم الزاوية فى ∠ س

، $\overline{\text{س ل}} \perp \overline{\text{ص ع}}$

أكمل ما يأتي

① △ .... ~ △ .... ~ △ ....

② (س ص)^{٢} = ... × ....

③ (س ص)^{٢} = ... + ...

④ (س ص)^{٢} = ... - ....

⑤ (س ع)^{٢} = ... × ....

⑥ (س ع)^{٢} = ... + ...

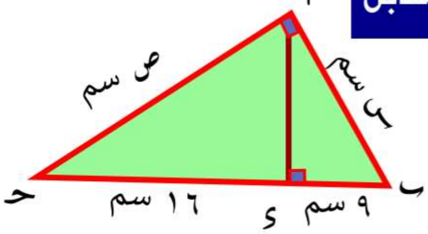
⑦ (س ع)^{٢} = ... - ....

⑧ (س ل)^{٢} = ... × ....

⑨ س ل × ص ع = ... × ....

⑩ س ل = (........ × ....) / ....

③ فى الشكل المقابل



ص / س = ...

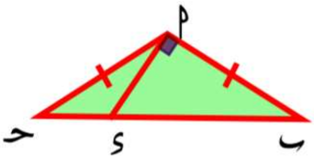
(أ) ١

(ب) ٢

(جـ) ٣/٤

(د) ٤/٣

④ فى الشكل المقابل



△ أ ب جـ منفرج الزاوية فى ∠ أ

أثبت أن :

(أ ب)^{٢} = ب د × ب جـ

....

....

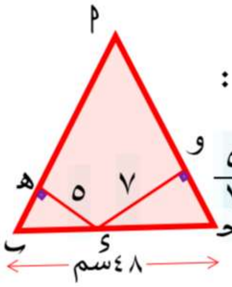
....

....

....

....

⑤ فى الشكل المقابل



أ ب ح مثلث متساوي الساقين حيث :

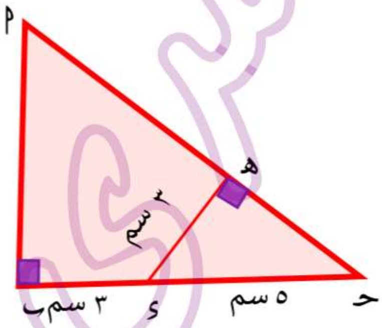
أ ب = أ ح ، ب ح = ٤٨ سم ، $\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءو}} = \frac{٥}{٧}$ ، $\overline{\text{ءو}} \perp \overline{\text{أح}}$ ، $\overline{\text{ءهـ}} \perp \overline{\text{أب}}$

فإن ء ح = ...سم

(أ) ١٢ (ب) ٣٠

(ح) ٢٤ (ء) ٢٨

⑥ فى الشكل المقابل

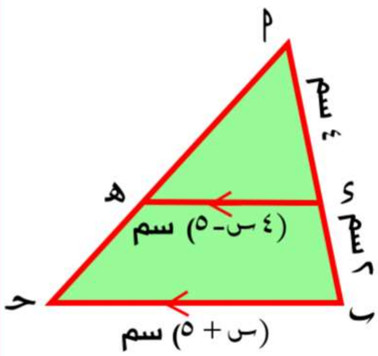


أ هـ = ...سم

(أ) ٥ (ب) ٦

(ح) ٧ (ء) ٨

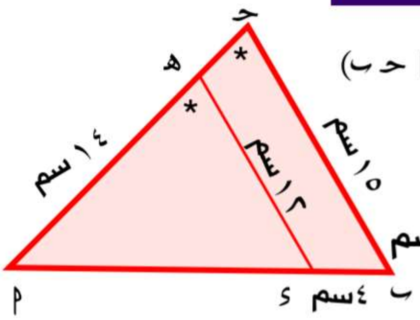
⑦ فى الشكل المقابل



قيمة س = ...سم

(أ) ٢ (ب) ٢,٥ (ح) ٣ (ء) ٣,٥

⑧ فى الشكل المقابل



ق(∠ أ هـ ء) = ق(∠ أ ح ب)

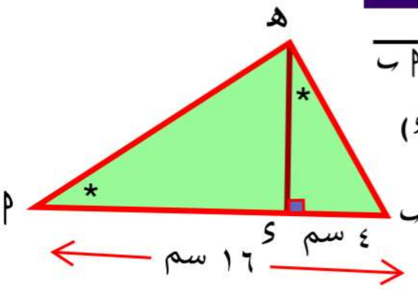
فإن :

أ ء + هـ ح = ...سم

(أ) ١٢ (ب) ١٩,٥

(ح) ١٧,٥ (ء) ٢٢,٥

⑨ فى الشكل المقابل



أ ب هـ مثلث ، $\overline{\text{ءهـ}} \perp \overline{\text{أب}}$

، ق(∠ أ) = ق(∠ ب هـ ء)

فإذا كان :

أ ب = ١٦سم ، ب ء = ٤سم

فاحسب طول $\overline{\text{ب هـ}}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(١٠) في الشكل المقابل : أوجد: طول $\overline{ب ح}$

....

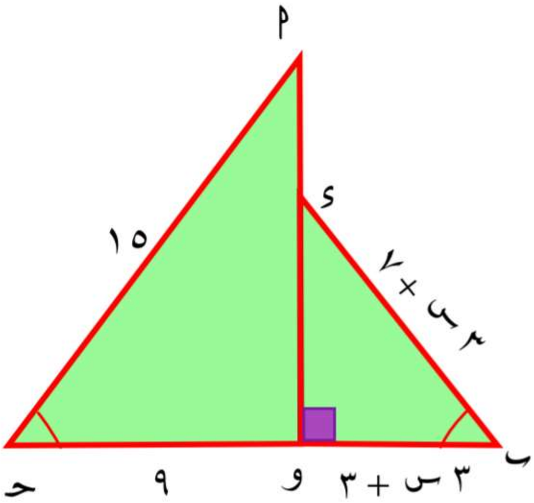
....

....

....

....

....



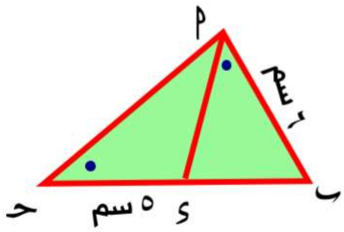
---

(١١) في الشكل المقابل :

إذا كان ق(∠ ب أ ء) = ق(∠ ح)

فإن : طول $\overline{ب ء}$ = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (ح) ٥ (ء) ٦

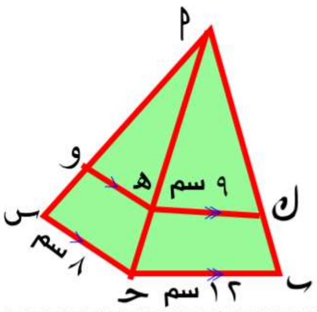


---

(١٢) في الشكل المقابل :

هـ و = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ٩ (ح) ٦ (ء) ٣



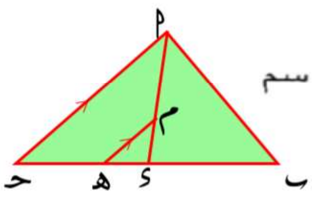
---

(١٣) في الشكل المقابل

م نقطة تلاقي المتوسطات Δ أ ب ح ، م ∈ $\overline{أ ء}$ ، $\overline{م هـ}$ // $\overline{أ ح}$ ، م هـ = ٣ سم

فإن : طول $\overline{أ ح}$ = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٩ (ح) ٦ (ء) ١٢



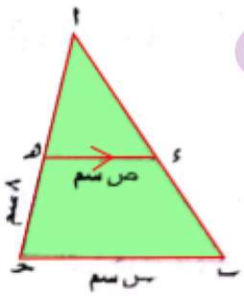
---

(١٤) في الشكل المقابل

إذا كان : $\frac{س - ص}{س + ص} = \frac{٢}{٧}$ فإن أ هـ = ... سم

(أ) ١٦ (ب) ١٠

(ح) ١٥ (ء) ١٢

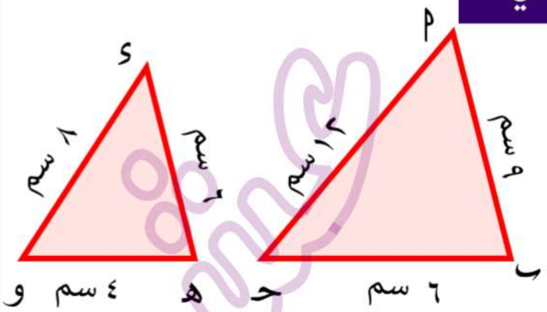


الحالة الثانية لتشابه مثلثين

نظرية ١

إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فى مثلثين فإنهما يتشابهان

مثال توضيحي



أثبت أن:

△ ﺃ ب ج ~ △ د هـ و

الحل

في △ ﺃ ب ج ، △ د هـ و

∵ $\frac{\text{ﺃ ج}}{\text{د و}} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ ← ①

، $\frac{\text{ﺃ ب}}{\text{د هـ}} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ ← ②

، $\frac{\text{ب ج}}{\text{هـ و}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ ← ③

من ① , ② , ③ ينتج أن : $\frac{\text{ﺃ ج}}{\text{د و}} = \frac{\text{ﺃ ب}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{هـ و}}$

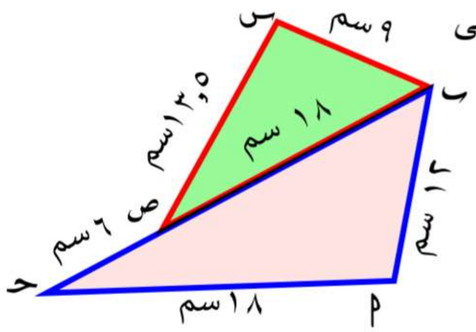
∴ **أطوال أضلاع المثلث** ﺃ ب ج **تتناسب مع أطوال أضلاع المثلث** د هـ و .

∴ △ ﺃ ب ج ~ △ د هـ و

مثال ①

فى الشكل المقابل

ب ، ص ، ج على استقامة واحدة



أثبت أن :

① △ ﺃ ب ج ~ △ س ب ص

② $\overleftarrow{\text{ب ج}}$ ينصف ∠ ﺃ ب س

الحل

△ س ب ص أطوال أضلاعه هي : ١٨، ١٣,٥، ٩

، △ ج ب ﺃ أطوال أضلاعه هي : ١٨، ١٢، ٢٤

∵ $\frac{\text{س ب}}{\text{ﺃ ب}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ ← ①

$\frac{\text{س ص}}{\text{ﺃ ج}} = \frac{13,5}{18} = \frac{3}{4}$ ← ②

$\frac{\text{ب ص}}{\text{ب ج}} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$ ← ③

من ① , ② , ③ ينتج أن :

$\frac{\text{س ب}}{\text{ﺃ ب}} = \frac{\text{س ص}}{\text{ﺃ ج}} = \frac{\text{ب ص}}{\text{ب ج}}$

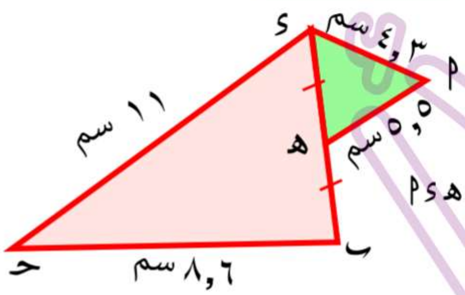
∴ △ ص ب س ~ △ ج ب ﺃ وهو المطلوب أولا

و ينتج من التشابه أن : ق(∠ ص ب س) = ق(∠ ج ب ﺃ)

∴ $\overleftarrow{\text{ب ج}}$ ينصف ∠(ﺃ ب س) وهذا المطلوب ثانيا

مثال (2)

في الشكل المقابل



اثبت أن :

(1) △ د ب جـ ~ △ هـ د أ

(2) أ هـ // د جـ

الحل

في △ هـ د أ ، △ د ب جـ

∵ هـ منتصف د ب ∴ $\frac{\text{د هـ}}{\text{د ب}} = \frac{1}{2}$ ← (1)

، $\frac{\text{أ د}}{\text{ب جـ}} = \frac{1}{2}$ ← (2)

، $\frac{\text{أ هـ}}{\text{د جـ}} = \frac{1}{2}$ ← (3)

من (1)، (2)، (3) ينتج أن :

$\frac{\text{د هـ}}{\text{د ب}} = \frac{\text{أ د}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{د جـ}}$

∴ △ أ هـ د ~ △ جـ د ب   وهو المطلوب أولا

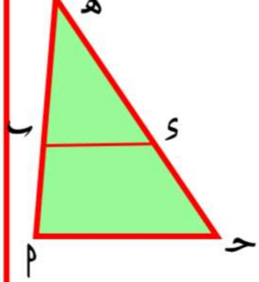
و ينتج من التشابه أن :

ق(∠ أ هـ د) = ق(∠ جـ د ب) وهما زاويتان متبادلتان

∴ أ هـ // د جـ   وهو المطلوب ثانيا

مثال (3)

في الشكل المقابل



أ ب ∩ جـ د = {هـ} حيث

$\frac{\text{أ هـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{د هـ}}$ ، $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{ب د}}{\text{د هـ}}$

اثبت أن : أ جـ // ب د

∵ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{د هـ}}$ ∵ $\frac{\text{مقدم}}{\text{مقدم}} = \frac{\text{تالي}}{\text{تالي}}$

∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{د هـ}}$ ← (1)

، ∵ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{ب د}}{\text{د هـ}}$

∴ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{ب د}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{د هـ}}$ ← (2)

من (1)، (2) **ينتج أن :**

$\frac{\text{جـ هـ}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{ب د}}$

∴ △ أ هـ جـ ~ △ ب هـ د

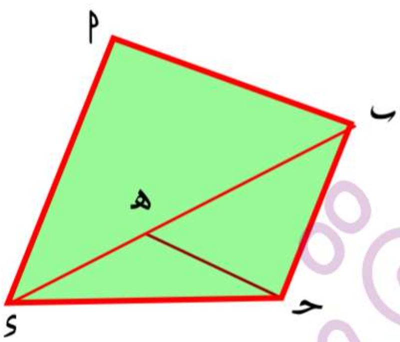
∴ ق(∠ أ جـ هـ) = ق(∠ ب د هـ)

وهما في وضع تناظر بالنسبة للقاطع جـ هـ

∴ أ جـ // ب د

مثال (4)

في الشكل المقابل



$\frac{\text{أ ب}}{\text{د أ}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{ب جـ}}$

، $\frac{\text{ب د}}{\text{د أ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ب جـ}}$

اثبت أن :

(1) أ د // ب جـ

(2) أ ب // جـ هـ

(حاول بنفسك)

الحل

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

مثال ٥

ا ب حـ مثلث ، ء ∈ $\overline{\text{احـ}}$ بحيث : $\frac{\text{بء}}{\text{ءحـ}} = \frac{\text{اب}}{\text{بحـ}}$

، بحـ . اب = بء . احـ   اثبت أن :

$\overline{\text{بحـ}}$ مماسة للدائرة المارة برؤوس المثلث ا ب ء .

(حاول بنفسك)

الحل

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

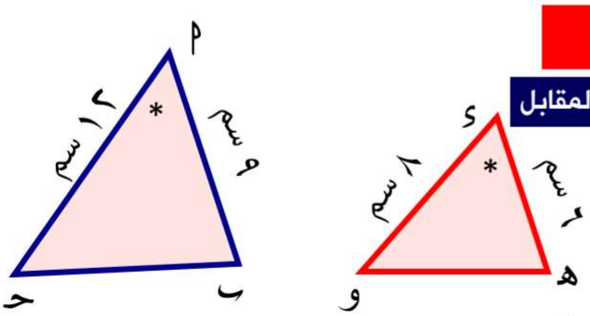
الحالة الثالثة لتشابه مثلثين

نظريـــة ٢

إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر وتناسبت أطوال الأضلاع التي تحتويها هاتين الزاويتين كان المثلثان متشابهين

فمثلاً :

في الشكل المقابل



أثبت أن :

Δ ءهو ~ Δ ابحـ

الحل

في Δ ءهو ، Δ ابحـ

∵ ق(∠ء) = ق(∠ا) ← ①

، ∵ $\frac{\text{ءه}}{\text{اب}} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$

، ∵ $\frac{\text{ءو}}{\text{احـ}} = \frac{٨}{١٢} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{\text{ءه}}{\text{اب}} = \frac{\text{ءو}}{\text{احـ}}$ ← ②

من ①، ② ينتج أن :

Δ ءهو ~ Δ ابحـ و من تشابه المثلثين ينتتج أن

ق(∠ه)=ق(∠ب) ، ق(∠و)=ق(∠حـ)

، $\frac{\text{هو}}{\text{بحـ}} = \frac{٢}{٣}$